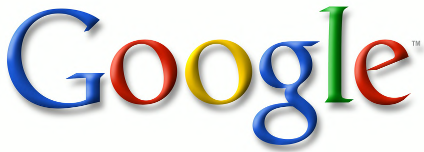
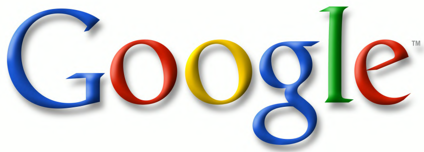
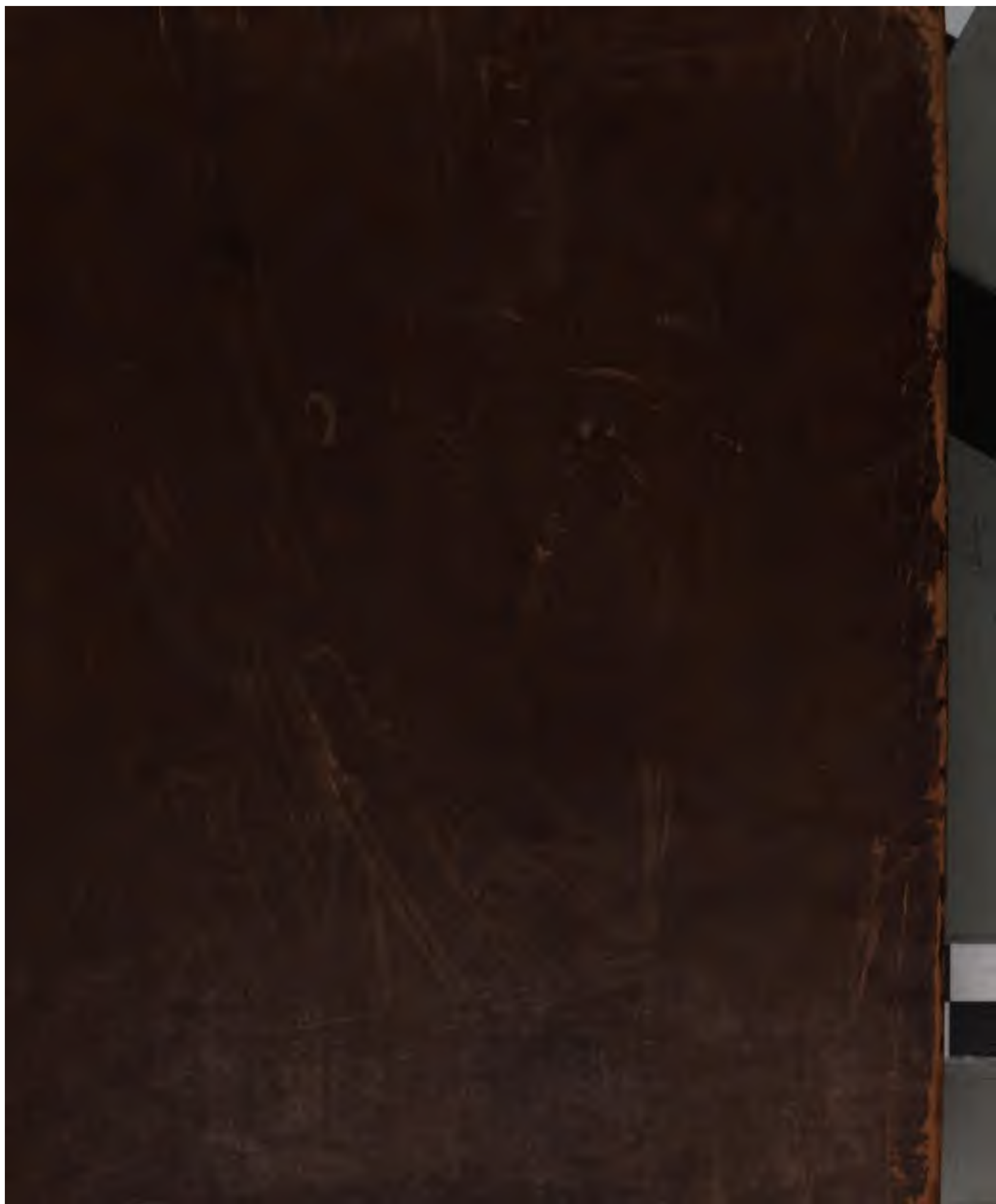



Google



HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES.

ANNÉE MDCCXLVIII. 1748



A BERLIN.
CHEZ HAUDE ET SPENER.
Libraires de la Cour & de l'Academie Royale.
MDCCL.

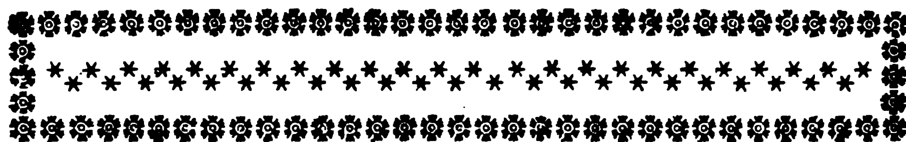
Permis d'imprimer.

P. L. Moreau de Maupertuis
Prefident.

MEMOIRES
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES.

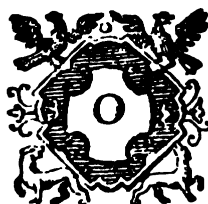
CLASSE DE PHILOSOPHIE EXPERIMENTALE.

* * *



ESSAI
SUR LA
FORMATION DES CORPS
EN
GÉNÉRAL

PAR Mr. ELLER.



ON sait que cette recherche a bien occupé les Philosophes de tout tems. Les sentiments des Anciens sur ce sujet étoient fort partagés; ils cherchoient pour la composition des Corps des principes simples, qui ne fussent point résolubles en d'autres mixtes, & ils croyoient les rencontrer dans l'Eau & dans l'Air, aussi bien que dans la Terre, & même dans le Feu, comme dans les quatre Elémens primitifs. Quelques uns d'entre eux n'en admettoient qu'un seul, d'autres en choisissoient deux, quelques uns montoient jusqu'à trois, Aristote & ses sectateurs rëunissoient tous les quatre, & ce nombre a subsisté jusqu'à nos jours; à moins qu'on ne compte aussi les trois Principes, que quelques uns de la secte Cabalistique & Chimique ont taché de faire valoir, mais qui ne sont pourtant autre chose, quand on les dévelope, que les Extraits, ou prétendus principes purifiés des quatre précedens.

Les Philoſophes modernes du dernier ſiecle ont taché de pénétrer plus avant dans la recherche de ces élemens primitifs, qu'ils ſuppoſent former les Corps. Ils croyent qu'il eſt de la derniere importance de déveloper entierement les premieres parties, ou molecules, qui entrent dans la compoſition des Corps, ou qui en font l'etenduë; ce qu'ils appellent *les Etres ſimples*. Quelques uns ſe contentent de leur petiteſſe inſecable, ce qui revient aux Atomes de Democrite & d'Epicure; d'autres tachent d'etablir leur diviſion à l'infini; d'autres encore regardent, avec Mr. *de Leibnitz*, ces Etres ſimples comme des parties non-etenduës, pour rendre raiſon de ce qui eſt etendu, & qui a des parties, ſelon ſon principe de la raiſon ſuffiſante, qui nous enſeigne; que les êtres etendus, ou les corps compoſés, exiſtent, parce qu'il y a des êtres ſimples, ou des *Monades*.

Les proprietés & les attributs de ces êtres ſimples occupent les eſprits de la plus-part de nos Philoſophes modernes. On n'eſt pas tout à fait d'acord, ſi ces êtres, qui aſpirent à devenir matiere, peuvent occuper un eſpace, ou non? Si ces êtres ſimples, ou ces Monades enfin, ſont doüés d'un mouvement? S'ils poſſedent une force intrinſeque, ou répreſentative? S'ils ont quelque reſſemblance entre eux, ou s'ils ſont diſſemblables à l'infini? Si cette diverſité des êtres ſimples à l'infini prouve aſſez leur exiſtence ſeparée l'un de l'autre? Si l'aſſemblage des êtres non etendus, ſeparément exiſtens, peut cauſer un corps etendu? Si chaque être ſimple, ou Monade, contient une ſuite, ou continuité de changements, qui differe de la ſuite de changements de tout autre être? &c. Je n'aurois jamais fait, ſi je prétendois faire ici le dénombrement de toutes ces contrarietés de ſentimens, dont on n'eſt pas encore d'accord, & qui entretiennent la guerre entre nos Philoſophes; mais comme leur differend n'a pas la mine d'etre vuidé ſi-tot, j'abandonne trés volontiers ces Elémens primitifs, & ces Atomes, les Points de *Zenon*, auſſi bien que les Monades de *Henri Morus* & de *Leibnitz*; d'autant plus facilement que je vois, que chacun tache de ſoutenir ſon hypotheſe par des raiſonnemens, ſans qu'on aye recours aux démonſtrations par les experiences.

Mais

Mais comme, en matiere de Physique, les experiences seules sont le fil d'Ariadne, qui nous mene à la vraye connoissance de la structure la plus cachée des corps, j'ai taché de pénétrer par ce moyen un peu plus avant dans cette composition, ayant eu le plaisir de faire quelques découvertes, qui semblent montrer la nature dans sa plus grande simplicité, lorsqu'elle forme des Corps.

Dans un Mémoire sur la Nature & les proprietés des quatre Elemens, que j'ai eu l'honneur de lire à l'Academie l'année precedente, j'ai montré par des experiences incontestables la conversion de l'Eau dans une veritable terre fixe, homogene & inalterable dans le feu; je tacherai de prouver à present, que c'est cet élement liquide qui fournit pour la plus-part, la base, ou la matiere solide & corporelle, dans les trois régnes de la Nature. Tout le monde convient, que l'Eau est un corps extrémement fluide, transparent, sans couleur, & qui n'affecte ni l'odorat, ni le gout. Les Physiciens modernes se sont donné beaucoup de peine pour pénétrer dans l'interieur, ou dans les parties simples & separées, qui composent cet élément merveilleux; mais ils n'ont pu en venir à bout jusqu'ici, faute de mesure applicable à la petitesse de ses parties constitutives; ce qui prouve assez leur parfaite homogeneité, qui ne permettra jamais, je crois, une diversité à l'infini dans les êtres simples de cet Elément. Par conséquent, le principe des Indiscernables court grand risque de souffrir ici quelque exception considerable.

Voyons à cette heure de quelle maniere l'Eau agit pour former les Corps, & premierement, les Corps des Vegetaux. Cette verité a été soupçonnee déja par l'ancien Philosophe *Thales;* & le grand restaurateur de la Philosophie naturelle, le Chancelier *Bacon*, en étoit convaincu, & adoptoit le meme sentiment. *Van Helmont* le Pére l'a prouvée par l'experience faite avec un saule, qu'il fit croitre à une grosseur considerable, en l'arrosant seulement avec de l'eau commune, sans que la terre du vaisseau dans lequel l'arbre étoit planté, diminuât de son poids. Cela fut confirmé par des experiences semblables de *Robert Boyle*,* & le celebre *Woodward* y en a joint diverses autres, qu'il a communiquées à la Societé Royale de Londres.

* *de Orig. form.* p. 165.

Ces épreuves, il eſt vrai, ne contentent pas ſuffiſamment un Cenſeur rigide, qui pourra objecter; que l'Eau peut diſſoudre, & renfermer aiſément dans ſon ſein une terre ſubtile, qu'elle a entrainée de partout, avant que d'entrer dans le tuyau des racines; laquelle terre ayant été dépoſée enſuite dans les fibres des vaiſſeaux de la plante pour ſon accroiſſement, laiſſe échaper l'humidité, comme ſon vehicule, au travers des pores de ſes branches & de ſes feuïlles. On pourra objecter encore, qu'on découvre dans les plantes une eſpece d'huile, ou matiere inflammable, & un eſprit acide; choſes que l'eau ſimple & élementaire ne ſauroit fournir, moins encore pourroit-elle produire par la circulation ſeule de la ſéve ces ſortes de liquides, ſi differents de la nature de l'Eau.

Ces ſortes d'objections, & autres ſemblables, que je me ſuis formées là deſſus, m'ont enfin encouragé à faire quelques nouvelles Experiences, rélatives à la Végétation par l'eau toute ſeule. Pour cette fin, j'ai pris de l'eau de fontaine, la plus pure que j'ai pu trouver, ſachant bien qu'elle doit dépoſer toutes les parties terreſtres, & heterogenes, dans le ſable, par lequel elle paſſe ſous terre; mais pour m'aſſurer d'avantage de ſa vraye pureté, je la fis paſſer tout doucement par un Alembic de verre au Bain-Marie, c'eſt a dire, par le moyen d'une eau bouïllante qui environnoit l'alembic. Par cette opération, tout ce qu'il y avoit encore de parties heterogenes s'arrêta au fond de mon alembic, & il ne coula dans le récipient qu'une eau parfaitement purifiée de toute terre; laquelle, à ce qu'on m'accordera facilement, ne peut pas monter ſi haut, ſurtout par un degré de chaleur, qui ne cauſe qu'une foible évaporation dans l'Eau, qu'on diſtille de cette maniere.

C'etoit donc avec l'Eau purifiée de cette facon que je fis l'epreuve de la Végétation, ayant placé dans pluſieurs flaccons de verre toutes ſortes de coupures de branches d'arbre, & ſur tout des Oignons de fleurs, qui pouſſerent bientot leur branches, feuïlles & fleurs, quoiqu'ils n'euſſent pour toute nourriture, que l'Eau purifiée de la maniere que je viens de dire. Il n'etoit pas difficile alors de déterminer la quantité, ou le poids de la terre, que cette eau par l'accroiſſement

ſement des branches avoit fourni. Car, ayant trouvé le poids de la terre qu'une branche, qui peſoit, par exemple, une once, rendit aprés ſa combuſtion & calcination, ſi donc une branche du meme poids miſe dans l'eau, peſoit apres cette Végétation une fois autant, plus ou moins, il eſt facile de déterminer alors, que la moitié des parties terreſtres qu'elle contient, a été produite de l'eau dont on l'a arroſé.

Par ces experiences je fus convaincu, que l'eau fourniſſoit la terre, comme la baſe de la ſolidité de tous les Vegetaux ; il me reſtoit encore à lever la grande difficulté, d'ou cette partie inflammable, huileuſe, ou reſineuſe, qu'on rencontre dans les plantes, peut tirer ſon origine ? Les Qualités occultes des Anciens, & les Fermens de quelques Modernes, ne me donnerent pas la moindre ſatisfaction ; je me trouvai obligé de nouveau d'avoir recours aux experiences. J'avois remarqué que la roſée & l'eau de pluye, amaſſées pendant l'Eté, quand on les renferme dans des bouteilles de verre, commencent à ſe troubler avec le tems, & dépoſent peu à peu au fonds un limon, ou matiere trouble & épaiſſe. Ce phénomene meritoit de l'attention; j'en fis cette experience. Aprés avoir jetté l'eau qui nageoit ſur cette matiere bourbeuſe, je la mis dans une Cornuë, & par le degré de feu que je donnai, je vis ſortir des nüages blanchatres, qui dans le récipient ſe convertiſſoient dans une eſpece d'eſprit acide, qui fût ſuivi à la fin par un peu d'huile, ou baume rougeatre, qui ſe trainoit le long du col de la cornuë.

Je croyois d'abord, que la ſolution du probléme en queſtion étoit trouvée; car je m'imaginois d'avoir découvert l'origine de l'acide, auſſi bien que de l'inflammable des plantes, que je cherchois depuis quelque tems. Mais mes réfléxions ulterieures m'apprirent, que la roſée & l'eau de pluye pourroient, en tombant, entraîner trés facilement cette matiere inflammable, dont l'air eſt toujours rempli, & qui réſide dans les vapeurs qui s'elevent ſans ceſſe de la terre, à l'occaſion de la combuſtion & de la putréfaction des plantes & des animaux. Pour ce qui regarde l'eſprit acide que j'avois rencontré, je le croyois une engeance de cet eſprit acide univerſel, qui doit réſider

ſider dans l'air, dont les Cabaliſtes nous vantent tant de merveilles, & qui eſt leur *Demogorgon*, cauſe de la production de toutes choſes dans les trois régnes de la Nature.

Nonobſtant cela, ces phénomenes me donnerent l'occaſion de faire quelques nouvelles experiences, pour me tirer de l'embarras où j'etois par raport à cette recherche; j'eus recours derechef à de l'eau de fontaine, purifiée avec ſoin de toute matiere terreſtre par la diſtillation au bain de vapeurs, comme je l'indique ci-deſſus. Cette eau, par une ſeconde diſtillation, executée de la même maniere, ne laiſſa rien au fond de l'alembic, qu'une trés petite tache transparente; par où je fus convaincu, que cette eau etoit un liquide aſſez homogene, élementaire, qui ne renfermoit pas dans ſon volume la moindre marque d'une matiere acide, ou inflammable; je m'en procurai une quantité ſuffiſante, dont je remplis un grand verre large & cylindrique, ayant l'ouverture égale à ſon fonds; j'eus ſoin de le couvrir avec une feuille de papier que je liai autour de l'ouverture. Une autre portion fut miſe dans une grande bouteille de verre qui contenoit pluſieurs meſures; l'ayant remplie jusqu'à deux tiers, je la fermai avec un bouchon, je les plaçai toutes deux au Soleil, au coeur de l'Eté paſſé, pendant pluſieurs ſemaines, & je remarquai bientôt, que cette eau, toute claire qu'elle étoit au commencement, changeoit inſenſiblement de couleur, & que pouſſant de petites veſſies, & une écume mince à la ſurface, elle devenoit un peu verdâtre au fond, & moins transparente.

Quelques circonſtances m'obligerent de retirer cette eau des rayons du Soleil, mais je n'oubliai pas de l'examiner, pour me donner quelque ſatisfaction ſur le changement, qu'elle avoit ſubi, pendant qu'elle avoit été expoſée au Soleil. Je la mis par repriſes dans un alembic de verre, & je la fis diſtiller ſucceſſivement au bain Marie, jusqu'à ce que j'euſſe retiré toute l'eau pure & claire; il me reſta au fond de l'alembic une petite quantité d'une liqueur trouble & moins transparente, laquelle je verſai dans une petite cornuë de verre, & y ayant adapté un récipient, je pouſſai le feu par degré, qui me fit ſortir à la fin, aprés quelque humidité aqueuſe, de ſemblables nuages blan-

blanchâtres, & un peu d'huile tirant ſur le rouge, que j'avois rencontrée en diſtillant la roſée & l'eau de pluye, aprés qu'elles avoient ſubi une eſpece de putréfaction.

Cette experience me fit naitre une nouvelle idée, d'une trés grande conſéquence par raport à ma recherche ; car je fus convaincu, que les rayons elancés du Soleil, de quelque nature qu'ils puiſſent être, cauſoient dans l'eau une changement eſſentiel, en y introduiſant une matiere impalpable, qui par une eſpece d'alteration, qui approche de la fermentation, fait naitre dans l'examen de l'eau les deux principes ſi néceſſaires à la production des plantes que je cherchois.

Je me procurai auſſi par là la ſolution du problême de l'exiſtence, & de la génération de l'Acide univerſel, tant vanté par la Secte Cabaliſtique de quelques Chymiſtes anciens. Car les rayons, par la chaleur qu'ils cauſent dans l'eau, y operent la même choſe dans ce vaſte eſpace qui entoure nôtre Globe, que ce que je vis naitre dans l'eau renfermée dans mes verres. Quand ces vapeurs fecondées de cette façon, & condenſées en pluye, tombent & pénétrent dans la terre, elles y alterent & changent tout ce qu'elles rencontrent, elles diſſolvent & combinent differentes eſpeces de terres. Et c'eſt à cette opération de l'acide univerſel, que nous devons l'exiſtence de ces ſels differents, comme le Vitriol, l'Alun, le Salpetre, le ſel commun &c. que la terre nous fournit.

Mais, pour retourner à la production & à l'accroiſſement des Vegetaux, nous voyons, (& l'homme le plus ſimple ne l'ignore pas,) que cette action de la Nature n'a lieu que dans cette ſaiſon de l'année, ou le Soleil cauſe un certain degré de chaleur, qui eſt ſuffiſant pour opérer ſur l'eau les effets ſusdits, & qui peut la mettre en mouvement, pour pénétrer dans les tuyaux & conduits les plus cachés des plantes, & des arbres, que la Nature a ſoigneuſement formés, & qu'on y rencontre en forme fluide, & ſous le nom de la ſeve. Quand la chaleur du Soleil, par l'éloignement de cet aſtre, n'a plus la force de procurer ce mouvement dans l'eau, cette action dans les plantes s'arrête, elles reſtent immobiles ; ce que nous voyons arriver

pendant l'hiver, où la chaleur du Soleil diminuë de deux tiers, en comparaison du degré où elle parvient dans le coeur de l'Eté.

Cette chaleur ainsi diminuée, n'est plus capable d'entretenir le mouvement, ou de conserver la fluidité dans l'eau; ses parties se joignent alors ensemble, faute de molecules ignées que le Soleil n'élance plus en quantité suffisante pour les séparer; elle se coagule donc sous la forme de la glace. Ainsi la fluidité de l'eau est uniquement l'effet d'un certain degré de chaleur, qui entretient un mouvement perpetuel entre ses parties constitutives; par conséquent elle ressemble entierement à tout autre corps fondu, agité par l'action du feu; ses parties se trouvant ainsi dans une agitation continuelle, entrent facilement dans les pores de la plus-part des corps qu'elles touchent.

Mais cette action de l'eau est encore entretenuë, & augmentée par la structure de plantes, dont les racines sont autant de tuyaux capillaires, par lesquels s'eleve promtement cet élément liquide, ou cette séve, dans les vaisseaux qui composent le tronc, & comme ceux-ci sont d'une extrême petitesse, la chaleur qui les environne pendant l'Eté, y fait passer l'eau, probablement sous la forme de vapeurs, & cette résolution d'eau en vapeurs, qui ne peuvent se condenser derechef en eau, si longtems qu'elles sont renfermées dans ces tuyaux extrémement petits, est apparement la cause de cette quantité d'air, que Mr. *Hales* a rencontrée dans ses Experiences sur les vegetaux. Quoique la plus part de ces experiences roulent sur la production de l'air, que la fermentation, ou bien que le combat des acides avec les alcalis, ont produit dans ses differens mêlanges, quelques autres experiences de cet Auteur dans sa *Statique des Vegetaux*, nous prouvent, que l'attraction & la dissipation de la séve dans un Tournesol, comparée à la nourriture & à la transpiration d'un homme, est comme 17. à 1. Ainsi, proportions égales & en tems égaux, cette plante tire & transpire 17. fois plus que l'homme, c'est à dire, dans le coeur de l'Eté.

Cette grande difference entre la transpiration animale & vegetale ne doit pas nous étonner, si nous nous donnons le loisir de réflêchir un peu

un peu ſur la ſtructure de l'un & de l'autre. Dans le corps de l'homme, & dans celui de tout autre animal, la maſſe du ſang, ou les humeurs qui circulent, ſont diſtribuées par les arteres, dont la ſtructure eſt conique, & où ce liquide trouve une infinité de réſiſtances, par les angles & courbures des vaiſſeaux arteriels, qui compoſent tant de viſceres & d'organes dans les corps des animaux. Dans les plantes au contraire, il ſe dévelope une ſtructure plus ſimple, & plus aiſée pour faire paſſer la ſéve. Les tuyaux qui reçoivent cette humidité, ſont des canaux cylindriques & paralleles, qui ſe touchent étroitement pour compoſer le tronc; à diverſes diſtances ils ſéparent aux angles aigus, des vaiſſeaux cylindriques ſemblables aux premiers, pour en former des boutons, qui ſont la baſe des branches, des fleurs & des fruits, qui ſe dévelopent de ces boutons.

Tous ces Vaiſſeaux cylindriques, qui compoſent le tronc & les branches d'une plante, ou d'un arbre, ſont fermés entre eux & liés enſemble par un tiſſu cellulaire & membraneux, qui communique avec les vaiſſeaux paralleles, & dont les plus petits canaux reçoivent cette matiere phlogiſtique, huileuſe, ou réſineuſe, par une eſpece de ſecretion, & qui eſt charriée dans le tiſſu cellulaire entre le tronc & l'ecorce de la plante, & dans l'ecorce même, pour la garantir contre le froid, & pour en faire un nouveau dépôt, dont les boutons tirent de cette matiere ce qui leur eſt convenable, ſavoir, le plus eſſentiel de la plante, pour en former les fleurs & les fruits. Une eau de pluye colorée d'une certaine façon, & qui n'etoit point nuiſible à la germination des plantes, que je fis entrer par un petit artifice dans quelques rejettons, ou coupures des arbres, m'a montré avec l'aide d'un Microſcope cette ſtructure, & a confirmé ce que *Malpighi*, *Loewenhoek*, *Grew*, *Hales* & *Bradley* en ont écrit.

Mais cette petite digresſion, où je ne pretends pas donner un détail exact de la ſtructure des plantes dans toute ſon étenduë, m'a mené un peu trop loin de mon but; qui eſt, de faire comprendre la posſibilité, que l'eau ſeule avec l'aide de la chaleur puiſſe prendre une forme corporelle dans les plantes. J'ai montré plus haut, que ce liquide purifié de toute matiere terreſtre heterogene, a non ſeulement

poussé des germes, mais qu'il a causé aussi un accroissement considerable dans les oignons des fleurs, & dans les branches d'arbres coupées pendant l'hiver, ou au commencement du printems. Tout ceci fait voir, que la vitesse étonnante avec laquelle l'humidité, ou la séve reçuë par les racines, passe par les tuyaux cylindriques d'une plante, ou d'un arbre, y cause un frottement trés considerable contre les parois des petits canaux. Je ne balance pas d'assurer, qu'il arrive ici ce que nous voyons arriver, lorsque nous frottons l'eau commune bien purifiée dans un mortier de verre avec un pilon de la même matiere. L'experience fait voir, que par cette manoeuvre, l'eau prise en petite quantité dans le mortier, montre en quelques minutes une coagulation blanche, viscide, terrestre, que la continuation du broyement convertit dans une espece de terre extrémement déliée & fixe.

Par cette métamorphose, savoir, par la conversion de l'eau en matiere terrestre, toute plante, ou arbre, acquiert sa base & sa fermeté ; & lorsque dans la suite les parties terrestres sont tellement augmentées par ce frottement, que quelques vaisseaux en sont remplis, elles se joignent ensemble par la cohésion, qui est si naturelle à tous les corps qui se touchent ; le canal bouché refuse alors le passage à la circulation ulterieure de la seve, devient une fibre solide, & c'est par là qu'une plante, ou arbre, gagne successivement sa solidité. Cette démonstration semble prouver en meme tems, que la terre d'où les plantes sortent, pour gagner leur perfection dans l'air, ne contribuë en rien à leur accroissement, si ce n'est qu'elle reçoit & qu'elle garde dans son sein cette eau nourissante, fecondée par les rayons du Soleil, que la pluye fournit, pour la rendre aux racines, lesquelles augmentent en nombre sous terre, à mesure que la plante s'etend hors de terre, pour attrapper la quantité nécessaire à la nouriture, & pour l'affermir aussi, & l'attacher à l'endroit où elle a poussé ; & nous voyons, que la nature garde toujours une exacte proportion entre les racines & les branches d'une plante, ou d'un arbre, pour ce besoin si nécessaire à leur conservation.

La difference presque inconcevable que nous rencontrons dans ce régne de la Nature, merite ici une petite attention. Nous

voyons

voyons en général, que les plantes croissent & s'aggrandissent d'une même maniere; l'eau préparée & fécondée par la chaleur, & par les rayons du Soleil, est leur nouriture commune. Nonobstant cela, elles se distinguent presque toutes par leurs figures, & par les qualités differentes que nous y rencontrons par nos sens. Il paroit fort vraisemblable que le divin Auteur de la Nature, par sa sagesse infinie, pour la production des especes innombrables, que demande la perfection de ce Tout que nous voyons, a placé cette difference dans la graine de chaque individu. D'habiles Physiciens ont montré que chaque graine, ou semence, aussi bien que les boutons, renferme la delineation entiere d'une plante, ou d'un arbre, en racourci: ce que la maniere d'enter en bouton prouve de ces derniers. La seve ne fait que déveloper successivement ces empreintes des parties infiniment petites par la circulation; & lorsque la plante s'est épanouïe en feuïlles, celles-ci attirent de l'air ce qui leur convient pour être converti dans la nature de cette qualité specifique, dont la premiere graine de cette espece a reçu la forme & la proprieté dans la Création. Ceci se confirme en quelque maniere par l'experience suivante. Les Sapins, les Bouleaux & les Chênes, croissent souvent ensemble dans un terrein sablonneux & sterile. Le premier de ces arbres nous offre une grande quantité de résine & de poix; de sorte qu'on en peut tirer une cinquantaine de livres quelquefois d'un seul arbre de cette espece, pendant qu'on auroit de la peine à decouvrir un grain de cette matiere dans les deux autres; & la terre, ou plutot le sable, desquels ils ont tiré leur nouriture pour croître, ne montre pas le moindre vestige d'une substance résineuse, quand on en a fait la recherche même la plus exacte. Par conséquent, puisque nous voyons, que l'humidité commune, que les racines de ces arbres tirent du sein de la terre, ne fournit point cette difference des Sucs, & de tant d'autres qualités que nous y rencontrons, il faut que la Nature vienne au secours par d'autres voyes, qu'elle cache à la grossiereté de nos sens. Les experiences de Mr. *Hales*, Observateur infatigable, & celles de l'habile Botaniste *Miller* à Chelsea, nous prouvent suffisamment, que cette attraction se fait par les feuïlles, qui ressemblent en cela aux

Veines résorbentes, que nous rencontrons dans tous les points de la surface de nôtre Corps, par lesquelles l'eau, aussi bien que les esprits Chymiques, & même le Mercure, appliqués à la peau, entrent dans les vaisseaux, & se mêlent avec la masse du sang. Cette réfléxion, qui se dévelope par les experiences, nous mene à l'origine des veines, qui sont d'autant plus nécessaires dans les plantes que leur structure même suppose leur existence. Elles transportent ce qui a été attiré de l'air, & en font un depôt dans la substance cellulaire, entre le tronc & l'ecorce, où elles rencontrent les vaisseaux secretoires des arteres. Et c'est là sans doute, où les humeurs préparées se specifient dans la Nature differente des plantes, selon la differente vertu spermatique, que chacune a reçuë dans la premiere formation, lorsque l'Univers sortit de de son néant. L'humidité de l'air attirée, & alterée sans cesse, par l'action du Soleil, & renduë feconde par la proprieté incomprehensible de ses rayons, est cette source intarissable, où toutes les plantes, aussi bien que les animaux puisent, & qui se change dans la nature prolifique de chaque individu. Cela se prouve encore par quelques phénomenes, que nous voyons arriver aux boutons. Ceux-ci renferment, aussi bien que la graine, l'espece de la plante, ou de l'arbre, qui les ont poussés; ce qui est confirmé par la maniere d'enter en bouton. Nous voyons aussi que tel bouton qui rëussit, quand il est enté dans quelques arbres d'une autre espece, a été toujours soutenu par une feuïlle qui se dévelope à la racine de ce bouton. Si on coupe cette feuïlle dans le printems, lorsqu'elle paroit, le bouton n'est plus propre à être enté, puisqu'il ne pousse pas une branche prolifique; ce qui marque que la feuïlle attire de l'air cette sorte d'humidité, qui lui convient pour être convertie dans sa nature, qui la distingue de toute autre espece. L'experience que j'ai faite, de couper de la branche d'un arbre toutes les feuïlles, avant que les fleurs parussent, m'a fait voir, que cette branche reste sterile, sans produire aucun fruit, pendant que les autres branches du même arbre en portent abondament. En un mot, c'est l'eau mise en action par la chaleur, qui forme peu à peu les petites parties solides, & corporelles des plantes; Et la vertu spermatique primordiale, attachée à la semence, y in-

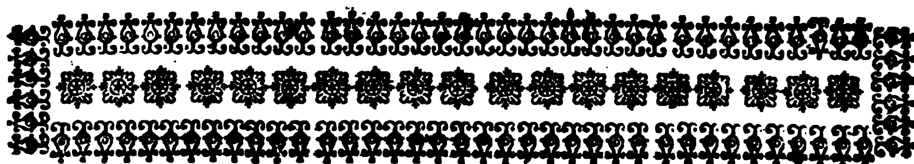
y introduit & perpetuë sa proprieté specifique dans chaque espece & individu.

Aprés qu'on a compris l'evidence de tout ce qu'on vient de prouver jusqu'ici, il n'est pas difficile de comprendre l'origine & la formation des corps dans les animaux; nous y rencontrons une analogie parfaite, si nous remontons jusqu'aux premiers commencemens d'un Embrion; nous y voyons l'ebauche de l'animal futur, comme celle de la plante dans la graine, ou dans la semence; tout se dévelope & s'aggrandit par le mouvement, & par la circulation de l'humidité préparée de la maniere susdite. L'accroissement d'un Corps animal profite de l'avantage que ses sucs nourriciers sont déjà préparés dans les plantes, dont la pluspart des animaux se rassasient. L'eau y a déja souffert sa premiere transformation en visqueux terrestre, mêlé d'onctuosité phlogistique. Ce mixte mis en mouvement par l'action du coeur, & appliqué aux parois des petits vaisseaux, s'y insinuë, les étend, forme des fibres, des membranes, & à mesure que cette viscidité humide se desséche & s'affermit, les membranes se changent en cartilages, & puis en os, selon la premiere delinéation de la structure de l'animal dans son embryon. Si on regarde l'extreme petitesse des vaisseaux lactés, qui se dérobent aux Microscopes dans leur origine, on juge facilement qu'il n'y peut entrer que le plus fluide & le plus délié des humeurs qu'on puisse imaginer; néanmoins nous le voyons changé en matiere solide & terrestre dans les os.

Il ne sera pas trop hardi d'assurer ici, que les mêmes principes suffisent à la production des mineraux. Dans l'analyse de ces Corps, l'eau commune, l'acide, & la matiere inflammable, se montrent par tout. Les differens mêlanges des ces trois principes suffisent pour fournir une infinité de productions minerales; mais la chose est d'une trop vaste etenduë pour être examinée à present, comme il faut; elle me fournira des recherches curieuses dans une autre Dissertation.



RECHER-



RECHERCHES SUR LA NATURE ET LES PROPRIETÉS DU FIEL DE VERRE,

PAR MR. POTT.

Traduit du Latin.



I.

LE ſujet, ſur lequel vont rouler nos recherches, porte communément le nom de *Fiel de Verre.* Il ne lui vient point du fiel, ou de la bile des animaux, que les Phyſiciens prenoient autrefois, pour un pur excrément, comme ſi ce fiel étoit auſſi un excrément que le feu ſeparât du mêlange, d'où ſe forme le verre, & qu'il eut quelque ſorte d'amertume. Cette dénomination vient plutot d'une erreur dans la traduction du nom que cette matiere porte en Allemand. On l'y appelle ordinairement *Glaſs Galle;* & comme le ſens propre du mot de *Galle* eſt *fiel*, on a rendu l'expreſſion entiere par *Fiel de verre.* Mais il me paroit beaucoup plus vraiſemblable qu'il faut rappeller ici l'ancienne ſignification du mot de *Galle*, par où l'on entendoit une bulle d'ecume, & qui ſe conſerve encore dans le mot *Waſſer Galle, ecume d'eau*, qui à cauſe de la legereté de l'air qui y eſt renfermé, occupe la ſurface de l'eau. C'eſt de la même maniere que le fiel de verre eſt toujours pouſſé par la force du feu à la ſurface de la matiere

matiere du verre. On lui a encore donné par la même raison le nom de *graisse*, ou *suin de verre*, *axungia vitri*, quoiqu'il n'y ait rien du tout de gras. Enfin quelques uns l'ont appellé abusivement *sel de verre ;* & *Crollius* avec quelques autres se sont servi du nom d'*Anatron*.

II. Cette matiere n'est autre chose qu'un mêlange de terre & de sel, qui coule comme une écume sur la surface du verre en fusion, & qui pendant ce flux en est separée par abstraction. En effet, quand on a préparé le mêlange des matieres, dont on a coutume de se servir pour faire le verre, & qu'on appelle *Fritte*, & que ce mêlange a eu pendant quelque tems un flux liquide, on le remuë avec un fer propre à cet usage, pour éprouver si la fusion liquide du mêlange est parfaite & universelle ; & aprés s'en être assuré, on enleve avec une cueillere de fer l'écume de sel ardente, qui est au dessus, & qui n'entre pas dans le mêlange du verre, on la jette dans l'eau, & par la coagulation on en fait des pains blancs, ou cendrés. Entre ces pains, ceux qui viennent de la préparation du verre crystallin, surpassent de beaucoup les autres en blancheur, & ce sont eux qui constituent le *Fiel de verre* proprement ainsi dit. Toutes les especes de verre fournissent à la verité une semblable matiere, tant le verre verd commun, ou le verre blanc & de craye, que celui de crystal. Mais le verre commun en fournit moins à cause de la petite quantité de sels qu'il renferme, au lieu que les verres de craye & de cristal, qui contiennent beaucoup plus de sels, donnent bien davantage de ce fiel ; d'où l'on peut tirer cette régle certaine, que plus on fait entrer de corps salins dans la composition de la fritte du verre, plus elle rend de fiel de verre, & réciproquement. Celui qui se vend ordinairement, vient presque toujours du verre de craye & de soude. Il y en a qui prétendent qu'on peut se promettre quelque chose de particulier du fiel de verre qu'on sépare du verre de rubis ; mais je crois que cette prétension est tout à fait dénuée de fondement.

III. Voici les especes ordinaires du Fiel de verre. D'abord il y a le nôtre, ou celui qu'on tire de nos verreries, il y a celui d'Italie, & il y a celui qu'on nomme vulgairement de Hollande, mais qui, à parler

parler plus exactement, eſt d'Eſpagne. Ces eſpeces ont une reſſemblance générale, mais on y remarque auſſi certaines differences dans quelques circonſtances particulieres. Ces differences viennent du plus ou du moins de pureté des ſels, qui ont été employés, tant ſels alcalis, ou cendres clavelées, que cendres des végetaux, Nitre, Tartre, Soude &c. Elles viennent encore des proportions plus ou moins grandes de ces ſels, de l'eſpace de tems plus ou moins long, au bout duquel on tire ce fiel du creuſet de la verrerie, & par conſéquent du plus, ou du moins, de tems qu'il eſt demeuré au feu. Toutes ces cauſes ſont que les maſſes de fiel de verre different, tant à l'egard des parties ſalines qu'à l'egard des parties terreſtres.

IV. Quelques uns préparent eux-mêmes le fiel de verre, en mettant en fuſion au creuſet du ſel commun mêlé avec parties egales, ou avec deux parties de verre, ou avec des cailloux, & en ſéparant les ſcories ſuperieures, ou le ſel, de la maſſe inferieure réduite en verre. Mais ce produit ne s'accorde pas parfaitement avec notre fiel ordinaire de verre, parce qu'il contient encore beaucoup de ſel commun, changé ſimplement en ſel fondu. Il y a auſſi un fiel de verre que les Orfevres font ordinairement de ſel commun, de ſel alcali, & de litarge, & qu'ils employent dans la conferrumination, pour ſuppléer au Borax qui eſt plus cher; mais il n'a pas a non plus une convenance entiere avec le notre, quoique dans certaines circonſtances il puiſſe produire les mêmes effets.

V. Il y a déjà bien des ſiecles que les Phyſiciens, les Chymiſtes, & les Medecins ont fait connoitre dans leurs Ecoles notre Fiel de verre, & q'ils l'ont employé à diverſes opérations Chymiques. Les Ouvriers eux même s'en ſont ſervi, & on en a tiré quelques uſages dans la Medecine. Cependant je n'ai trouvé perſonne encore, qui ſe ſoit propoſé d'enfaire avec exactitude un examen Phyſico-Chymique; & c'eſt ce qui me détermine à l'entreprendre.

VI. Ceux qui, d'aprés les Auteurs qui ont écrit en Phyſique & en Chymie, ont taché juſqu'à preſent de décrire la nature & les proprietés du Fiel de verre, ſe ſont partagés en deux Sectes; les uns le rangeant parmi les eſpeces de ſel commun, & les autres parmi les ſels

alcalis

alcalis fixes. Entre les premiers M. *König*, dans son *Regn. Miner.* le définit; *Une ecume salée du verre, qui se forme d'une quantité de sel & de particules terrestres, & où le sel s'unit si etroitement avec la terre en vitrification qu'il est très difficile de les séparer.* Avant lui, *Tackenius* avoit déjà dit à peu prés la même chose dans son *Hippocr. Chym.* où il en fournit cette description. *C'est*, dit-il, *un sel salé que les Bergers donnent à lécher à leur bêtail en guise de sel commun, qui se fond à l'air, & alors la poudre des cailloux entremêlee se separe, cette liqueur se coagule ensuite en sel commun, comme le prouvent sa granulation & sa distillation.* Et ailleurs il ajoute; *Le fiel de verre tire sa salure de l'acidité du caillou; car il ne précipite pas entierement le Mercure.* C'est aussi pourquoi *Merret* rapporte qu'on s'en sert en France pour saler les viandes. Voilà sans doute le fondement sur lequel *Mort* a dit avec tant de confiance; * *Le fiel de verre approche de la Nature du sel fossile, & on en tire par la distillation un esprit acide, comme l'esprit de sel.* La principale raison sur laquelle tous ces Auteurs s'appuyent, c'est qu'en Italie & en Espagne on employe la soude dans la composition du verre; or cette soude n'est pas un pur sel alcali, mais elle renferme beaucoup de sel commun, parce que la plante *Kali* croit sur le bord de la mer & des lacs salés, où elle attire le sel commun, s'en imbibe, & en conserve beaucoup, sans aucun changement. Aussi peut-on y découvrir au simple goût une saveur salée, & c'est en quoi consiste sa difference d'avec l'alcali commun, aussi bien qu'en ce qu'il s'y trouve aussi quelques parties de sel merveilleux. Ajoutez que le nitre qu'on employe pour faire certains verres, n'est pas pour l'ordinaire assez dépuré, mais qu'il porte de même avec soi quelques parties de sel commun. Cependant, & malgré tout ce qui vient d'etre rapporté, les Experiences suivantes feront voir de la maniere la plus claire, qu'il reste si peu de sel commun dans le fiel de verre, qu'on ne peut se fonder sur aucune raison pour le ranger dans la Classe du sel commun. Les Experiences dont on voudroit s'autoriser pour cet effet, sont en partie fausses, ou superficiellement examinées, en partie mal appliquées.

* *Fac. Chym.* p. 95.

* In Not. ad Neri Vitr. p. 239.

VI. Mr. *Merret* estime* que le fiel de verre est une espece de sel alcali, qui se charge dans la vitrification d'une quantité insuffisante de Terre vitrifiable, & qui par conséquent demeure incomplet. On ne sauroit nier qu'il n'y ait là dedans quelque apparence de probabilité, puisqu'il est constant qu'on ne sauroit faire aucun verre commun, sans y mettre du sel alcali, dont il seroit possible que les parties superfluës se séparassent de cette maniere. De plus, & M. *Merret* ne manque pas non plus d'insister sur ces circonstances, le fiel de verre se fond à l'air, & il produit sur le syrop de violettes le même effet que les autres sels alcalis, c'est de changer sa couleur bleuë en verte. Avec tout cela cette opinion ne sauroit etre adoptée; puisque l'alcali même superflu s'unit etroitement avec la terre vitrifiable, comme on en trouve la preuve dans la masse qui se prépare pour faire la liqueur des cailloux. Il y a aussi plusieurs produits salins manifestement acides, qui donnent la couleur verte au syrop de violettes.

VII. Je me suis donc mis à examiner par moi-même le sujet en question, & cet examen m'a fourni les phénomenes suivans. Le Fiel de verre conserve assez de consistance à l'air, & ne se fond pas aisément par défaillance, à moins quon ne l'ait laissé assez longtems exposé dans une cave froide & humide; auquel cas plusieurs sels moyens commencent à se fondre en quelque sorte: ce qui se remarque aussi dans le sel commun, exposé pendant longtems de la même maniere. Le fiel de verre, comme tous les autres sels, se fond assez promtement dans l'eau, & aprés la filtration, il donne une solution d'une parfaite transparence, déposant dans le filtre une terre blanchatre, tantot plus, tantot moins abondamment; car il y a telle espece qui ne m'a donné que fort peu de cette terre, tandis qu'une autre en a rendu plus de quatre onces par livre. Cette terre avec l'huile de vitriol ne reçoit qu'une trés legere ébullition; ce qui prouve qu'elle renferme fort peu de terre alcaline, & qu'elle consiste principalement en terre vitrifiable. Dans le feu notre sel se soutient, ce qui le met au rang des sels fixes; & lorsqu'on en répand immédiatement sur des charbons ardens, il se fait une fort petite crépitation, & trés differente de la crépitation ordinaire au sel commun. Mais au feu

dans

dans le creuset, il a un flux assez promt & coulant, il rougit un peu, & en même tems, il est propre à accelerer la liquefaction des corps qui se fondent difficilement ; ce qui fait que les Orfevres l'employent avec succés pour fondre la limaille d'argent.

VIII. Notre sel dépuré n'a point d'effervescence avec les menstruës acides, comme l'esprit de nitre, l'esprit de sel commun, & le vinaigre distillé, ce qui empêche qu'on puisse le mettre au nombre des sels alcalis. Cependant quelques especes de ce sel avec l'huile de vitriol font voir une espece d'ebullition, qui provient non du sel alcali, mais plutot du sel commun, dont une petite quantité demeure contenuë dans certaines especes de fiel de verre, & principalement dans celles d'Espagne, qui tirent leur origine de la soude, & dans celles qui viennent des Verreries, où l'on ajoute beaucoup de sel commun à la composition de la fritte. Car les autres especes, où ce sel n'entre pas, n'aquierent pour l'ordinaire aucune effervescence avec l'huile de vitriol ; au lieu qu'il est connu que l'effervescence arrive assez promtement, lorsque l'huile de vitriol est jointe au sel commun. Le changement de couleur qu'eprouve le syrop de violettes ne mene pas non plus à la conséquence qu'on veut en tirer ; puisque la solution de sel commun fondu, la solution de sel armoniac fixe, & plusieurs mêlanges salins qui renferment de la terre alcaline, produisent le même phénomene, qui ne prouve pas toujours la présence du sel alcali. D'ailleurs le fiel de verre ne trouble point la solution d'Alun, ce que font pourtant tous les vrais sels alcalis ; il ne précipite point non plus la liqueur de sel armoniac fixe, d'où l'on est pleinement en droit de conclurre l'absence de l'acide vitriolique.

IX. La solution de notre sel etant filtrée, evaporée, & crystallisée à diverses reprises, donne des crystaux qui ressemblent assés, en partie au tartre vitriolé, en partie au sel des eaux minerales. Si cette crystallisation se fait lentement, & d'une maniere reïterée, les premiers crystaux qui se forment sont oblongs, & les derniers principalement ont pour l'ordinaire une sorte d'ébullition avec l'huile de vitriol, & exhalent une fumée de sel acide, qui est un indice qu'ils renferment quelque quantité de sel commun ; ce qui ne se manifeste

en aucune maniere dans les premiers. Il arrive par conſequent, que ſi l'on ſépare par abſtraction quatre parties d'acide nitreux d'une partie de fiel de verre, l'eſprit qui tranſpire fournit une eau régale propre à la ſolution de l'or. La proportion de ce ſel commun dans le Fiel de verre n'eſt pas toujours égale; cependant il n'arrive presque jamais qu'elle aille au de là du quart, & pour l'ordinaire il y en a beaucoup moins, puisqu'il ne faut que trés peu d'acide de ſel pour convertir en eau régale une grande quantite d'acide nitreux. Si l'on pouvoit fonder un jugement aſſuré ſur l'apparence exterieure de notre ſel, lorsqu'il eſt depuré, on affirmeroit qu'il contient en trés grande partie du tartre vitriolé: mais quand on compare l'extreme réſiſtance que ce tartre vitriolé apporte à la fuſion, avec la grande fuſibilité de notre ſel, cela mene à d'autres idées. Et s'il y a quelque partie de tartre vitriolé dans le fiel de verre, comme il y en a ſurtout dans celui de nos contrées, qui provient de cendres communes peu nettes & clavelées, qui ont été longtems expoſées à l'air, cela ſe connoit d'abord par la maniere dont il crépite & s'ecarte, lorsqu'on le jette ſur des charbons ardens, ou qu'on en preſſe la flamme avec un chalumeau; car ce phénomene ne ſe montre point dans le ſel admirable pur, qui entraîne pourtant avec ſoi en fuſion le tartre vitriolé; ce qui arrive auſſi au tartre vitriolé, qui éprouve une fuſion fort liquide par l'addition du ſel commun, ou du ſel alcali, ou de l'Alun calciné, ou du vitriol ſaoulé de ſon acide. Il faut donc ſuppoſer plutot que notre ſel par rapport à la plus grande & principale partie, s'accorde avec celui qui porte le nom de *ſel admirable de Glauber*. S'il ne ſe forme pas en cryſtaux auſſi grands que ceux de ce ſel admirable, cela ne fait pas une difficulté, car ſa diſpoſition à prendre cette figure eſt détruite par le feu véhément de la vitrification, qui lui fait violer la régle de l'immutabilité de la figure, commune aux ſels. Cela ſe confirme par le ſel admirable lui-même, lorsqu'il eſt pur; ſi on l'expoſe pendant quelque tems à un feu véhément, & qu'enſuite on procede à la ſolution & à la cryſtalliſation, il ne rend que de fort petits cryſtaux. Il eſt néanmoins poſſible que certaines eſpeces de fiel de verre, ſurtout d'Eſpagne, montrent auſſi quelque-

fois

fois une portion de sel merveilleux dans de grands cryſtaux; car je vois qu'il eſt arrivé quelque choſe de pareil à Boyle, quoiqu'il n'ait oſé déterminer l'eſpece, ni aſsigner le veritable nom, lorsqu'il rapporte, * *qu'ayant expoſé à la cryſtalliſation du fiel de verre diſſous dans l'eau, il s'en forma divers cryſtaux en forme de nitre, tout à fait transparens, & à la fin du ſel commun cubique*; à quoi il ajoute, que *ces cryſtaux à la chaleur ſe changent en chaux, mais qu'ils reprennent dans l'eau leur forme cryſtalline.* Ce Phyſicien ne pouvoit réſoudre ce phénomene dans le tems où il vivoit, mais il eſt aſſez connu aujourdhuy que le ſel admirable montre les qualités dont il s'agit. De là vient que la ſolution du fiel de verre précipite la ſolution du Mercure par l'eau forte, en lui donnant une couleur jaune, de la même maniere que la ſolution de ſel admirable, lorsque l'acide du Vitriol eſt adherent au Mercure. Il eſt vrai que la couleur du Mercure précipité avec le ſel admirable eſt un peu plus jaune, qu'avec le fiel de verre; mais je crois qu'il faut en chercher la raiſon dans la Terre alcaline que ce fiel contient. De même la cendre parfaitement edulcorée, ſaoulée enſuite de l'acide du vitriol, & enfin cryſtalliſée, forme une eſpece de ſel amer fuſible, qui a beaucoup de conformité avec le nôtre dans certaines circonſtances.

* Dans ſon Traitté, *de producibil. princ. Chymic.* p. 17.

X. La principale partie du Fiel de verre conſtituë donc une eſpece de Sel admirable, & il ne faut pas ici aller chercher bien loin les ingrediens de ce ſel, puiſque l'on découvre d'abord le ſel commun dans la ſoude, & une eſpece de terre *alcalino-vitreſcible* dans les cendres. Seulement on pourroit former quelque doute ſur l'exiſtence de l'acide vitriolique; mais comme avec le tems les ſels alcalis s'imbibent d'un ſemblable acide, qu'ils tirent de l'air, & qu'il eſt probable que le feu ardent de la verrerie détruit les qualités ſpecifiques des acides, ce qui fait que le reſte retourne à ſon état primitif, il ne faudra pas non plus aller loin pour trouver l'acide en queſtion. Ajoutez que ſouvent dans les terres vitrifiables, comme dans le ſable, les cailloux, les briques &c. on conjecture qu'il y a de l'acide vitriolique renfermé qui ſe répand de là dans la maſſe. *Tackenius* a même oſé determiner qu'il y a de l'acide dans les cailloux, ce qui s'accorde aſ-

ſez

ſez avec les principes de *Beccher*, & ſa Terre primitive, ſans compter une experience qui ſemble encore favoriſer cette opinion; c'eſt qu'après avoir cuit dans un fourneau de potier de l'alcali, des cailloux & du ſel commun, & en avoir fait la ſolution dans beaucoup d'eau, il s'en forme en partie une eſpece de ſel admirable. C'eſt ce qu'il faudra examiner plus ſoigneuſement.

XI. Quand on procure la cryſtalliſation du Fiel de verre d'Eſpagne, en le faiſant evaporer lentement & à diverſes repriſes ſucceſſives, la derniere matiere qui reſte, & qui ne peut plus être réduite en cryſtaux, fournit un peu de ſel alcali avec une petite quantité de terre alcaline, diſſoute dans l'eſprit acide du ſel; car cette matiere entre en efferveſcence avec l'eau forte & précipite la terre; elle acquiert une efferveſcence encore plus forte avec l'huile de vitriol, elle jette la terre alcaline, & exhale en même tems un eſprit de ſel, qui frappe bientot l'odorat. Que ſi l'on fait evaporer la ſolution de Fiel de verre dans un vaſe de plomb, & qu'on l'expoſe à la cryſtalliſation, il en naît alors des cryſtaux aſſez petits; mais ſi l'evaporation & la cryſtalliſation ſe font dans un vaſe d'etain, les cryſtaux ſont beaucoup plus grands & oblongs. Les uns & les autres cependant, expoſés à un air tiede, s'en vont en pouſſiere blanchâtre, comme cela arrive ordinairement au ſel admirable. On peut inferer de là que les vaſes qu'on employe, cauſent des changemens & des altérations à la cryſtalliſation, ce qu'il faut attribuer au plus grand, ou moindre degré de froid, qui peut être pris plus aiſément par un vaſe que par un autre. Il en eſt de même de toutes les autres Experiences Chymiques ſur ce ſujet; on y apperçoit aiſément l'harmonie de notre ſel avec le ſel admirable; car avec la pouſſiere de charbon, il conſtituë un foye de ſouffre, & forme un ſouffre parfait; avec un egal poids d'Antimoine crud, il ſe fond en foye d'Antimoine, ſans laiſſer aucune trace de régule; mais etant fondu avec une ſemblable portion de régule d'Antimoine, il en détruit une partie, ou la convertit en ſcories, & le reſte du régule demeure ſans aucun changement, ſi ce n'eſt que ſes rayes ſont un peu moindres. Le Fiel de verre employé avec l'Alun, & mis enſemble à la calcination, ou à la fuſion, fournit un ſel admirable plus abon-

abondant, & en aſſez grands cryſtaux, parce que l'on ſaoule abondamment le ſel commun ſuperflu par l'acide de vitriol dans l'Alun. Le fiel de verre, fondu avec de la ſoude dépurée, diſſous, & convenablement évaporé, forme d'aſſez grands cryſtaux. Ce même fiel, fondu avec deux parties de ſoude, & longtems expoſé au feu, fournit une grande quantité de verre fuſible ſouffré; parce que l'acide de notre ſel admirable avec la terre de charbon de ſoude, rend d'abord un ſouffre; & la terre vitrifiable de cet acide ſouffré, en continuant le feu, forme un verre ſouffré noir. Pour faire cette Experience il faut employer de la ſoude cruë: car le fiel de verre avec la ſoude non dépurée fournit, au moyen de la fuſion & de la ſolution un foye de ſouffre; au lieu que l'acide vitriolique de notre Sel, uni à la terre de charbon de ſoude, forme un ſouffre, que le ſel alcali de ſoude diſſout & arrête.

XII. Les rapports de notre ſel avec les terres plus ſimples conviennent aux rapports du ſel admirable avec les mêmes terres. C'eſt ainſi que la craye, ou le marbre, avec deux parties de ſel admirable, confluent en une maſſe, qui a la forme d'un verre jaune tirant ſur le verd. La même craye avec autant de fiel de verre refuſe de ſe fondre; mais avec deux parties de fiel de verre, elle forme de la meme maniere une maſſe comme de verre & verdâtre; cependant elle écume beaucoup au commencement, & ſi le creuſet eſt trop rempli, elle en paſſe aiſément les bords: il eſt même arrivé quelquefois, lorſqu'on a donné un feu trop véhément, que toute la maſſe a tranſpiré à travers le creuſet; mais quand on ſe ſert d'un feu plus moderé, il ſe forme une maſſe conſiſtente, blanche & ſaline. De l'albatre, avec une égale quantité, ou avec deux portions de ſel admirable, forme un corps comme de verre, d'un jaune verdatre; neanmoins, en l'expoſant à un feu plus long & plus fort, toute la matiere pénétre le creuſet. Le même albatre avec autant de fiel de verre demeure en quelque maniere poreux, à cauſe des impuretés, qui ſe trouvent communément mêlées au fiel de verre; par la même raiſon avec deux parties de fiel de verre, il en a reſulté une fois une maſſe d'une couleur un peu brune, & une autrefois une maſſe moins ſerrée & blanchâtre: ce-

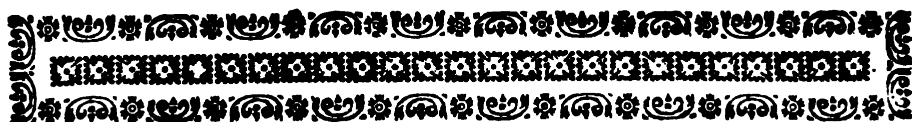
cependant à un feu plus violent, elle passe tout de même à travers le creuset. L'argille blanche mêlée avec une, deux, trois ou quatre parties de sel admirable, & mise au feu, se réunit en une masse sans transparence d'un blanc cendré; la même chose arrive, en remuant de l'argille blanche avec autant, ou avec deux parties, de fiel de verre. Les cailloux remués au feu, avec une, deux, trois, ou quatre parties de sel admirable, se reünissent en une masse blanche, qui a l'air d'ecume, tant sa texture est rare. Les mêmes cailloux, avec une ou deux parties de fiel de verre, se reünissent en une masse semblable, blanchâtre. Deux parties de fiel de verre avec une partie de *Quartz*, se rassemblent aussi, mais superficiellement, & sans qu'il y ait une parfaite union, ou combinaison. De même aussi deux parties de fiel de verre avec une partie de *Spatbum fluxile*, forment une semblable masse, mais jaunâtre & en partie rouge. Enfin le fiel de verre avec un poids égal de verre pulverisé, aprés qu'on l'a fait fondre pendant longtems, laisse un verre imbu d'une couleur blanche, & d'une si grande dureté qu'il rend des etincelles, en le frappant contre l'acier; mais cette grande véhémence du feu détruit la plus grande partie du fiel de verre.

XIII. Il reste encore quelque chose à ajouter sur l'usage du sujet que nous venons d'examiner. Ayant fait voir ci-dessus, que lorsque notre fiel de verre est dépuré, on trouve que la principale partie consiste en sel admirable, cela ouvre un moyen d'acquerir à meilleur prix ce sel qui est cher, & d'employer à sa place dans les Experiences de Chymie, & les usages de Medecine, celui que le fiel de verre fournit. Jusqu'à present le plus grand parti qu'on tiroit de ce fiel, consistoit à s'en servir, comme le font les Orfevres, pour fondre la limaille d'or & d'argent, & pour suppléer au Borax dans la ferrumination. Ceux qui travaillent aux Mines, l'employent aussi dans la fonte des minieres, surtout de celles qui résistent à la fusion; il y sert à donner de la fluidité aux parties roides & terrestres, & à les séparer des parties metalliques, en sorte que celles-ci puissent confluër & s'unir. Mais ce fiel a de la peine à suffire seul partout, parce que le régule retient aisément quelque chose de salin, surtout s'il y a un mélan-

mêlange de souffre dans la miniere; car alors notre sel admirable le résout en foye de souffre, lequel foye s'empare de nouveau d'une quantité assez considerable de métal, le dissout, & le convertit en scories: effet que nous avons déjà remarqué ci-dessus dans l'Experience avec l'Antimoine. On employe avec plus de succés le fiel de verre pour diverses vitrifications, parce qu'il ne cause point de réduction aux corps métalliques calcinés, à cause de l'absence du *phlogiston*, mais qu'au contraire en les attenuant, il les dispose à la vitrification. Il augmente par conséquent la fusibilité du verre de Saturne, tant simple que composé; & en les couvrant, il empêche qu'ils ne s'evaporent si aisément, ou fait que l'air exterieur durcit plus promtement la croute de la surface. La raison en est que cette matiere ne se mêle, ni au verre, ni au metal, mais qu'elle se tient toujours au dessus. Voilà pourquoi encore les Potiers l'employent pour le vernissement des vases de terre. Le fiel de verre est aussi de quelque usage pour augmenter la malleabilité des metaux, qui à cause du mêlange des matieres etrangeres, refusent d'obeïr au marteau, & il agit sur eux en s'imbibant, pendant le flux coulant de la fusion, dans les parties terrestres les plus legeres, qu'il enleve. *Merret* donne la solution du fiel de verre, comme une Recette, pour empêcher dans les Jardins les insectes de toucher aux herbes & aux fleurs, qu'il faut en arroser, & vû son amertume la chose ne manque pas de vraisemblance.

Enfin, dans la Medecine, notre sel, surtout lorsqu'il est dépuré, peut etre employé fort heureusement & en toute sureté, comme laxatif, aperitif & servant à la digestion; il convient aussi pendant la cure des Eaux minerales, aussi bien qu'en cent autres occasions; & cela dans la même proportion, & avec les mêmes effets, que l'on a eprouvé jusqu'ici de la part du Sel admirable, ou de celui d'Angleterre. Cependant je ne conseillerois pas le fiel de verre, qui résulte des compositions de cryſtal artificiel, où l'Arsenic entre.



SUR LES MOYENS PROPRES À DÉCOUVRIR

LA CONSTRUCTION DES VISCERES,

PAR M. LIEBERKÜHN.



Tous ceux qui s'appliquent à l'etude du Corps humain, & qui tâchent d'expliquer par la structure même de cette Machine, ce qu'elle fait, & ce qu'elle peut faire, tous ceux, dis-je, qui sont versés dans ces connoissances, savent suffisamment que nous ne sommes pas encore parvenus assez loin, pour pouvoir démontrer comment se font toutes les actions naturelles. Je ne parle pas de celles que nous appellons animales, parce que les premiers organes par le moyen desquels elles s'executent, sont d'une si grande delicatesse, qu'elle les rend non seulement imperceptibles à nos Observations, mais même qu'elle ne nous permet presque pas d'en concevoir aucune idée. Nous ignorons, par exemple, encore, comment se fait la bile dans le foye, & comment s'opere la secretion de l'urine dans les Reins, quoique *Glisson, Bellini* & *Eustachius*, ayent fait là dessus de trés belles découvertes, qu'on peut trouver dans leurs excellens Ouvrages.

J'omets bien d'autres preuves des bornes étroites de nos connoissances. Cependant nous poussons tous les jours plus loin nos recherches, & je ne doute pas qu'avec le tems on ne vienne à bout d'expliquer bien des choses qui sont encore inexpliquables pour nous, & en particulier de faire des découvertes, dont on tirera beaucoup d'usages dans la Medecine.

Qu'est-

Qu'eſt-ce qui nous empêche de trouver le Mechanisme de ces parties, que nous pouvons néanmoins ſi bien injecter avec de la cire colorée, qu'on ne ſauroit douter que la matiere injectée ne paſſe par tous les vaiſſeaux, dont ces parties ſont compoſées? C'eſt ce qui a lieu ſurtout dans le Foye, & dans les Reins.

Il eſt vrai que *Ruyſch* a dejà pouſſé en quelque ſorte ſes injections dans tous les vaiſſeaux de ces parties là; mais à quoi cela l'a-t-il mené? Il n'y trouve, comme ailleurs, que ce qu'on nomme les *pinceaux* des vaiſſeaux, qui ne nous expliquent pas grand' choſe.

Lorsque ce célébre Anatomiſte avoit injecté quelques viſceres avec une matiere molle, ou liquide, dont il n'etoit pas trop le maître, il la maceroit, & en la contractant beaucoup avec les mains ſous l'eau qu'il rafraichiſſoit ſouvent, il faiſoit paroître partout les *pinceaux* en queſtion.

Mais que produiſoit il par ce moyen? Il détruiſoit la liaiſon des vaiſſeaux plus ſubtils, changeoit leur ſituation, les déchiroit tous, & faiſoit tomber dans l'eau ce qu'il cherchoit à connoitre. Que diroit l'Horloger le moins habile, s'il voyoit qu'on s'y prit de cette maniere pour démontrer la ſtructure d'une Montre?

Auſſi la matiere molle dont *Ruyſch* s'eſt ſervi, ne convient-elle point à cet uſage. Car, dés qu'on en coupe un petit morceau pour l'expoſer au Microſcope, elle ſort des vaiſſeaux par où elle etoit entrée, ils deviennent flasques, la matiere ſéparée ne montre plus que de petits points marqués, ſans apparence de liaiſon; enfin, & en un mot, cette matiere enduit le tout d'une graiſſe, qui ne permet gueres de voir autre choſe que cette graiſſe même.

Il faut s'y prendre plus doucement avec des ouvrages de la Nature auſſi délicatement travaillés, & ſe ſervir d'une matiere plus dure & cohérente pour injecter ces vaiſſeaux, lorsqu'on veut avoir le plaiſir d'en découvrir les merveilles. Voici une idée abregée des moyens dont je me ſuis ſervi pour examiner les parties nobles de notre Corps.

J'appelle *grands vaiſſeaux* des viſceres, ceux qui n'ont pas encore de connexion avec les vaiſſeaux excretoires; & je nomme

petits vaiſſeaux, tant ceux qui ont cette connexion, que les excretoires eux-mêmes.

Telle eſt la maniere d'injecter les grands vaiſſeaux des viſceres.

Prenez de la cire blanche, bien exemte de toute graiſſe de boeuf, ou de mouton, autant que vous en voulez. Joignez y une cinquieme partie de Colophonie, une dixieme de Therebentine de Veniſe; & du Vermillon, ou autre couleur, autant qu'il en faut, pour donner aſſez de teinte & de cohéſion à la matiere réfroidie. Injectez enſuite les grands vaiſſeaux avec cette matiere, au point que vous voulez, en y employant toute la dexterité que demande cette Opération.

Donnons à preſent la maniere de ſéparer les vaiſſeaux fins d'avec les grands, par le moyen de la matiere injectée, en obſervant l'eſpace des cavités des grands vaiſſeaux.

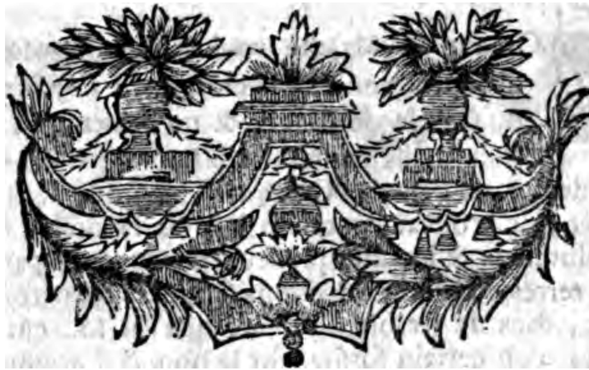
Mettez la partie injectée dans de l'eſprit de nitre aſſez fort, ou dans de l'huile de vitriol, détrempée dans de l'eau. Laiſſez-la dedans, jusqu'à ce que l'acide ait diſſous ce qui n'eſt pas de la cire. Prenez la enſuite, lavez la dans de l'eau fraîche, & vous aurez le plaiſir de voir les cavités des grands vaiſſeaux, formées en cire.

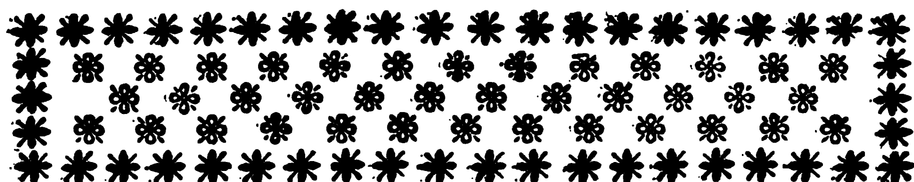
Comme ces ſortes de préparations ſont les plus curieuſes de toutes celles que les Anatomiſtes peuvent garder dans leurs Cabinets, mais quelles y ſont expoſées à être facilement gâtées & caſſées; je vais fournir encore une methode propre à les rendre plus durables, avant que d'expoſer celle que demande l'examen des vaiſſeaux fins.

Prenez deux parties de gypſe en poudre trés ſubtiliſé, & une partie de tuiles pulveriſées. Mêlez bien enſemble ces poudres ſeches dans un vaiſſeau, mettez y enſuite autant d'eau de fontaine qu'il en faut, pour faire une pâte aſſez fluide, aprés avoir mêlé rapidement ces maſſes avec la main. Jettez dans cette maſſe votre préparation de cire, & tenez l'y, jusqu'à ce quelle ait durci. Aprés qu'elle a durci, & qu'on l'a fait ſécher à l'air, mettez la au feu, & de degré en degré faites la chauffer jusqu'à la rougeur. Quand cette rougeur paroit, & que toute la cire eſt brulée, vous avez le moule. Dans ce moule verſez de l'argent bien fondu; aprés quoi mettez le moule dans du vinaigre, & vous trouverez aſſez de facilité à le ſéparer de l'argent.

De cette façon on peut injecter les vaisseaux de degré en degré, & les préparer jusqu'aux vaisseaux les plus fins, que l'on injecte ensuite de cette maniere.

Prenez la matiere que j'ai indiquée pour les grands vaisseaux, & ajoutez y seulement autant d'huile de Therebentine qu'il en faut, pour l'insinuer ensuite dans les vaisseaux plus fins. Coupez aprés cela un petit morceau de la partie que vous voulez examiner, versez une goute d'eau forte sur la surface, & laissez l'y jusqu'à ce qu'elle ait séparé les membranes des vaisseaux. Exposez la enfin au Microscope avec le miroir de réfléxion, & vous verrez un ouvrage bien plus accompli que celui que les Graveurs peuvent executer sur des plaques de cuivre, & dans lequel vous découvrirez & déveloperez tout ce que vous souhaitez.

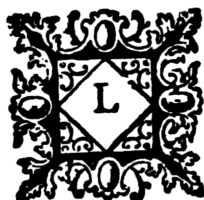




OBSERVATIONS SUR LA VERITABLE OSTEOCOLLE DE LA MARCHE DE BRANDEBOURG,

PAR M. GLEDITSCH.

Traduit du Latin.



I.

LOrsque Sa Majesté voulut bien m'accorder, il y a quelques années, la charge de *Physicien provincial* du Cercle de *Lebus*, & qu'habitant à la Campagne, je cultivois mes études de Botanique dans les contrées qui sont en deçà & en delà de l'Oder, aussi bien que dans celles qu'arrose la Sprée, je trouvai l'occasion la plus favorable de faire dans des lieux sablonneux & incultes plusieurs découvertes par rapport aux pierres, aux terres, & aux productions figurées, ou pétrifiées. C'est, par exemple, dans de semblables lieux que j'ai souvent recueilli de vieilles pieces d'un certain fossile, sur le nom & l'origine duquel j'etois d'abord fort incertain; mais je me procurai ensuite la certitude que c'etoit de veritables branches du *Lapis sabulosus* de *Thomas Erastus*, (*) qu'on nomme vulgairement *Osteocolle*, quoique d'autres luy ayent

(*) Voyez la Lettre qu'il écrivit à Conr. Gesner en 1572. *de natura, materia, ortu & usu LAPIDIS SABULOSI, qui in Palatinatu ad Rhenum reperitur*. On la trouve à la fin de la II. Part. de sa *Disput. de Medicina nova Phil. Theophrasti.*

ayent imposé les noms de *Psammosteum*, *Holosteum*, *Fossile arborescens* &c. (*)

II. Ce fossile, l'un des plus curieux, n'a été gueres connu des Auteurs qui ont écrit sur l'Histoire Naturelle, ou sur la matiere Medicale, on n'en trouve que des descriptions imparfaites & confuses; & c'est ce qui m'a engagé à le soumettre à un examen plus attentif. Il n'etoit gueres question que de la figure externe de notre fossile, & du lieu de son origine, dans les principales rélations qu'on en a données jusqu'ici, & ne faisant pas beaucoup d'attention à la chose même, on avoit confondu plusieurs productions étrangeres, par exemple, les *gypseuses*, les *arenaires*, les *selenitiques*, les *tophacées*, les *stalactitiques*, les *argilleuses*, & même les *concretions salines*, avec les productions *martiales*, & autres *metalliques figurées*. C'est ce qui me donnera lieu de relever plusieurs erreurs, & de les rectifier suivant la mesure de mes forces.

III. Pour arriver à mon but, j'ai fait en divers tems, & dans des saisons differentes, des courses dans les lieux sablonneux & incultes des deux Marches, où ce fossile étoit depuis plusieurs siecles connu de tout le monde, recueilli & employé à des usages tant internes qu'externes. J'en ai pris les informations les plus exactes, & j'ai mis par écrit tout ce qui concernoit notre fossile, par rapport au *lieu*, à la *situation*, à la *figure*, à la *grandeur*, à la *proportion*, & à la *matiere*.

IV. Il y a des terrains assez étendus dans la Marche Electorale & dans la Nouvelle, qui, bien qu'environnés de toutes parts de campagnes plus fertiles, & même excellentes, ne laissent pas d'etre entierement sablonneux & pierreux. C'est ce qui fait qu'aucune plante ne sauroit presque y vivre, ou du moins y prosperer, excepté le *Tithymale*, la *Bruyere*, la *Statice*, l'*Yvraye*, le *Jasion*, le *Pié de Chat*, le *Bouleau*, le *Pin*, & trés peu de *Chiendent*. S'il en faut croire les anciens monumens, toutes ces contrées du tems de nos Ancêtres n'etoient que d'immenses forêts, que la négligence, ou l'avarice des habitans ont détruites, & que l'on a mal à propos entrepris de défricher,

(*) Voy. *Hermann. Maslograph.* p. 183. & f.

cher, pour en faire des champs, où des prés, au lieu qu'on n'en a fait que des terres ingrates & miserables, qui seroient à peine rétablies & fertilisées par le travail & l'industrie d'un siecle entier. Il est résulté de cet attentat oeconomique, si je puis m'exprimer ainsi, les inconveniens les plus fâcheux. En labourant, on détruit le peu de mousse dont la terre sablonneuse est revêtuë, elle meurt, & ensuite l'ardeur du Soleil attenuë le sable, & la violence du vent l'emporte de toutes parts. Il arrive quelquefois, dans de grandes tempêtes, que des lieux élevés s'applanissent, ou qu'il se forme des montagnes dans les plaines; de sorte qu'il ne reste presque aucune esperance de voir une croute mousseuse regarnir ces contrées.

V. Il est fort vraisemblable que les anciennes forêts dont nous avons parlé, n'etoient composées, outre les diverses especes de *Chênes*, que de *Bouleaux*, de *Pins*, de *Peupliers tremblans*, de *Charmes*, & d'*Aunes*; la stenlité du terroir auroit eu peine à en nourrir d'autres. Aprés les avoir abattus, nos Ancêtres qui avoient du bois en abondance, ne se sont pas mis en peine d'en arracher les troncs & les racines; comme le prouvent ces amas de racines qu'on trouve ensevelis ça & là sous le sable, & qui avec le tems s'y sont enfoncés de plus en plus.

VI. C'est dans les endroits que nous venons de décrire qu'on rencontre une quantité considerable de notre fossile, dans un sable plus ou moins leger, blanc, gris, rouge, ou jaunâtre, fort ressemblant à l'espece de sable, qu'on trouve ordinairement au fonds des rivieres. Celui qui touche immediatement notre fossile est plus blanc, & plus mou que le reste, & annonce suffisament l'existence d'une terre plus déliée, qui est d'une blancheur de neige, & qui sous la forme & l'apparence de farine s'attache fortement aux mains. Quand dans les tems pluvieux cette terre vient à se dissoudre dans des lieux élevés, les eaux l'entrainent en forme d'emulsion dans les creux qui se trouvent placés au dessous.

VII. Cette terre subtile ne différe gueres de la *Marne*, & conformément à l'examen que M. *Pott* en a fait, on peut la mettre au rang des veritables terres de chaux. Elle se trouve attachée au sable

dans

dans des proportions trés differentes, depuis la hauteur de trois ou quatre pieds jusqu'à celle de huit; & plus le sable est voisin des branches de notre fossile, plus la quantité de cette terre augmente. On peut même dire qu'il n'y a pas grande difference entr'elle & la matiere même, qui constituë le corps du fossile.

VIII. Quoique nous ayons insinué que cette terre descend le plus souvent des lieux elevés dans d'autres plus bas, cela n'empêche pas qu'on n'en trouve quelquefois des lits entiers mêlés au sable, à la profondeur de quinze ou vint pieds, & même tout le fonds de quelques étangs en est, comme on peut aisément s'en convaincre en examinant celui de divers étangs des cercles de *Barnim* & de *Lebus*. Il y en a surtout un bien remarquable, situé dans le bois fort connu de *Lapenow*; entre les villages de *Friedland* & d'*Hermersdorff*, auquel on a specialement donné le nom de *Weissensee*, à cause de la couleur blanche de son fonds. Et, pour ajouter ceci en passant, ce qui augmente la celebrité de cet Etang dans toute la Province, & dans celles qui y confinent, c'est que les poissons & autres animaux aquatiques y sont blancs, ou du moins plus blancs, en sorte qu'à la couleur seule on peut les distinguer aisément de ceux qu'on prend dans les Etangs voisins. *

* Voy. une petite Diss. j'ai publiée *de Foco sub-globoso, sessili, & molli*.

IX. Pour ce qui concerne le tems de l'année, où notre fossile s'offre aux regards des curieux, il n'y en a point de particulier, comme quelques uns le prétendent; mais ce qu'il y a de vrai, c'est que les tems venteux, ou pluvieux, font distinguer beaucoup plus aisément les pieces de ce fossile, en sorte qu'elles s'offrent, pour ainsi dire, d'elles mêmes aux yeux. L'impetuosité du vent enleve, par exemple, quelquefois tout le sable, & laisse entiérement à nud les extremités du fossile, ou au contraire, le vent rassemble de petits monceaux d'un sable plus luisant, sous lesquels on juge aisément que le fossile se trouve caché, Pareillement une pluye un peu longue, ou une fonte subite de neige, venant à laver diverses branches du fossile, qui poussent vers la surface, les découvre tout à fait, & sépare d'avec le sable le reste de la terre qui les environne. Car ces branches inhérentes indiquent avec beaucoup plus de certitude le tronc entier du fossile qui est ca-

ché, que les pieces rompuës qu'on trouve çà & là comme égarées sur la surface du sable, & que le vulgaire des *Lithophiles* prend pour des indices certains & indubitables. Mais ces bonnes gens se trompent le plus souvent, & sont dans le cas de ceux qui, faute de connoissances métalliques assez etenduës, s'imaginent, en voyant des fragmens de mines, ou des pierres qu'on nomme *gemmes*, épars dans une contrée, qu'on doit infailliblement trouver, en creusant au même endroit, des lits entiers & souterrains de metaux, ou de gemmes. C'est aussi quelque chose de bien ridicule que ce que *Zorn* rapporte de *Colerus*, (*) qui prenoit " l'Osteocolle pour une veritable plante, à laquelle il at-
" tribuoit une petite fleur bleuë, qui laisse en tombant sur le sable
" des traces, par le moyen desquelles on découvre le fossile entier."
On trouve à peuprés des choses du même ordre dans le petit conte suivant, par lequel *Anselme Boetius de Boodt* en imposoit à la crédulité d'un certain *Uldaric de Burchsdorff*, Maître d'Hotel de l'Empereur Frederic Rodolphe II. Il lui disoit, " que dans sa Patrie le *La-*
" *pis sabulosus* croissoit comme une plante, d'une maniere tout à fait
" admirable, & qu'au commencement du Printems on le voyoit
" pousser de terre sous l'apparence d'un petit Chou cabut, avec de
" petites feuilles cendrées, & noirâtres, qui se développoient ensuite,
" & s'etendoient du coté de la terre. Que dans cette petite tête qui
" sortoit, on trouvoit une moëlle, ou poussiere, qui se fondoit aise-
" ment en liqueur, & que les branches de cette plante étoient os-
" seuses." Se peut-il des observations plus fausses, & un récit plus ridicule?

X. A' l'aide du vent, ou des pluyes, les branches de notre fossile se découvrent beaucoup plus aisément dans les lieux elevés que dans les plaines. Quand on les a trouvées, on détache avec précaution le sable d'un coté en suivant la branche jusqu'à ce qu'on soit arrivé au tronc de tout le fossile, & qu'on l'ait mis à nud avec toutes les racines qu'il jette de coté & d'autre. La longueur de la racine, qu'il n'est pas bien possible de déterminer, mene aussi quelquefois obli-

quement

(*) Botanolog: Med. p. 488. Ajoutez à ce que nous disons ici *Schwenckfeldt, Catal. Fossil. Siles.* L. III. p: 387. & *Athan. Kircher. Mus.* p. 207.

quement au tronc même; & quand on y est parvenu, il faut oter tout le sable, (qui a pour l'ordinaire deux pieds au moins de hauteur,) de maniere qu'on puisse appercevoir commodément du même coup d'oeil le partage & le cours des racines. Au reste, tout le sable qui est à decouvert dans les bois, dans les champs, & dans les bruyeres, est ordinairement sec à la profondeur de deux pieds; mais dans les endroits, où notre fossile croit, on trouve déjà l'humidité à un pied; & cette humidité va en augmentant d'une maniere sensible etant même plus grande, à proportion qu'il y a dans le sable une plus grande quantité de cette terre de chaux, dont nous avons parlé ci-dessus. Cette quantité d'humeur croupissante humecte perpetuellement le bas des plus grandes branches de notre fossile, autour desquelles elle se rencontre.

XI. Tant que le tronc entier est encore renfermé dans le sable, la forme du fossile ne s'offre aux yeux que d'un coté, & alors elle représente assez parfaitement le bas du tronc d'un vieil arbre champêtre, par rapport à la figure, à la grandeur, à la situation & aux proportions; & les racines en partie descendent jusqu'à la profondeur de quatre à six pieds, en partie s'etendent obliquement de tous cotés. Il faut relever ici ce que quelques uns des Auteurs, qui ont écrit sur l'Histoire Naturelle, avancent de contradictoire à la vraye situation de ce fossile, en disant que *ses branches croissent à la surface de la terre*. Il y a pourtant des rélations qui sont assez d'accord avec notre exposé, comme celles de *Beckmann*, (*) d'*Hermann*, (**) & d'*Erastus*, (***) Professeur autrefois assez célébre à Heidelberg, qui s'exprime ainsi au sujet de la grandeur & de la figure de notre fossile. " Aux environs du " même endroit, nous avons trouvé le tronc, qui conservoit la même " grandeur jusqu'aux racines, ensorte qu'il ressembloit à un tronc " d'arbre recourbé dans cet endroit. "

 XII. Ce

(*) Dans une Lettre à *Henri Oldenbourg*, inserée dans les *Transf. Phil.* du mois de Septembre 1668.

(**) *Maslogr.* p. 184 & f. où l'Auteur donne la figure, non de tout le fossile, mais d'une grosse branche, & encore peu fidelement.

(***) *loc. cit.* Voy. le Note sur le §. I.

XII. Ce que nous avons dit jusqu'ici, sert non seulement à faire connoitre la figure de notre fossile, mais on y apperçoit encore plusieurs circonstances, qui menent à des conclusions fort probables sur la génération. Le tronc même du fossile, dont la grandeur & l'epaisseur varient, doit sans doute son origine au tronc de quelque arbre mort, & en partie carié: ce qui se prouve suffisamment par la lésion & la destruction de sa structure interieure. Car le tronc exterieurement raboteux, est rompu d'un coté, & creusé par une espece de carie, qui enleve non seulement toute la substance interieure, dont le défaut est suppléé par la terre de chaux, ou par le sable, mais même ne laisse souvent aucun vestige de l'ecorce, ni des cercles du corps ligneux. Quelquefois pourtant, mais rarement, on trouve encore le parenchyme à l'extremité des racines.

XIII. Les racines les plus fortes, & les plus voisines du tronc, soit qu'elles descendent profondément en ligne droite dans le sable, soit qu'elles s'etendent obliquement, sont presque toujours plus grosses que le bras, mais elles s'amincissent peu à peu au se divisant, de sorte que les dernieres ramifications ont à peine une circonference, qui égale le diametre d'une plume d'oye. Pour les productions capillaires des racines, elles ne se trouvent en aucun endroit du fossile, sans doute parce que la tenuité de leur texture ne leur permet pas de resister à la putrefaction; mais on ne laisse pas d'observer dans les racines des traces abondantes de leur existence, telles que sont, par exemple, divers tubercules, des noeuds, des avances, des éminences, & de petits creux dispersés sur la surface.

XIV. Quelquefois une *Matrice* d'une figure singuliere entoure les racines, surtout les plus grandes, & les serre étroitement. Sa substance n'est pas fort cohérente, & ressemble à de la limaille. C'est un composé d'ecorce en pousiere, & de bois pourri; & l'on y trouve un témoignage certain de la corruption à laquelle a été réduit un arbre auparavant vivant. C'est ce qui fait que, quoique le sable ne manque pas d'humidité, on ne sauroit détacher cette matrice entiere, mais qu'elle tombe aussi-tot en une masse informe, en se confondant avec la terre de chaux & le sable. Surtout quand le sable domine dans

dans le mêlange avec la terre. La matiere de notre fossile est un mixte qu'on a peine à définir: au moins ne peut-on le faire qu'à l'egard des fragmens les plus purs; tous les autres montrent une extrême inconstance, tant à l'egard de leur composition, que de leur humidité & de leur dureté. C'est ainsi, par exemple, comme des observations fréquemment répetées le prouvent, qu'on trouve rarement le tronc & les grosses racines, durcies ou petrifiées dans le sable; elles y sont plutot un peu humides, & molles; & lorsqu'on les expose à l'air, elles deviennent séches & friables. On peut établir quelques proportions dans leur composition, mais on en découvre moins dans les autres, qui sont plus petites, & qui, tant dans le sable qu'à la surface, conservent rarement le même ordre de composition. Ces dernieres ont outre cela une écorce purement sablonneuse, raboteuse, d'une couleur cendrée ou mêlée; & sous ce sable on trouve une substance, qui a quelque humidité, mais qui est pourtant dure, & presque entierement pierreuse. Cette difference a été, si je ne me trompe, inconnüe aux Auteurs, qui jusqu'à present n'avoient entrepris l'histoire de l'Osteocolle, que d'aprés les fragmens qui se trouvent dans les Apoticaireries, & qui sont de ceux qui ont souffert les injures du mauvais tems.

XV. La couleur du fossile encore enseveli sous le sable, est ordinairement d'un blanc tirant sur le jaune; mais pourtant quelques parties ont la blancheur de la neige, tandis que d'autres sont cendrées, ou noirâtres. Cela dépend souvent du sable seul, & quand on l'a ecarté, la blancheur de la matiere se manifeste. Quelquefois aussi, ce changement de couleur arrive par la simple exposition à l'air.

XVI. Les circonstances du tems & du lieu, la figure externe, la situation, & le mêlange des parties, se trouvent donc déterminées au sujet de notre fossile, par les Observations que nous venons de proposer. Il sembleroit convenable d'en offrir à présent la figure aux yeux du Lecteur; mais divers obstacles déjà insinués ci-dessus ne le permettent pas. On en approcheroit assez, vû le rapport extreme de la figure exterieure, en faisant graver des racines de divers arbres, mortes & cariées. En effet, il n'y auroit aucune contradiction à dire, que

que des changemens d'une même espèce, *pierreux*, par exemple, ou *salins*, ou *metalliques*, peuvent arriver aux racines d'arbres de plusieurs especes differentes; & l'experience le confirme. Il n'y auroit par conséquent non plus aucune absurdité dans l'opinion, que des arbres de diverses especes venant à mourir, & ensuite à se pourrir & se creuser, concourent à la formation d'un seul & même fossile, assavoir le notre.

XVII. Considerons présentement l'interieur de ce fossile avec plus d'attention; nous y trouverons plusieurs choses fort remarquables. Et d'abord à l'egard des racines, les principales sont tout à fait entieres, & d'une substance presque uniforme. Cette substance est plus rare au milieu, & vers l'ecorce plus dure, & en quelque sorte graveleuse. Il y a cette difference entre les branches plus grosses & plus épaisses, & les moindres, que les premieres sont composées d'une matiere beaucoup plus déliée, plus pure, & qui, à cause du défaut d'une sorte de glu naturelle, à moins de cohésion; au lieu que celles-ci, c'est à dire, les moindres & les plus petites, admettent le plus souvent deux substances dans leur composition. Certaines petites branches d'un seul & même tronc, quoique cachées dans un sable assez humide, sont dures, & leur dureté augmente, au point qu'elles deviennent de veritables pierres, qui rendent des étincelles en les frappant contre l'acier. Quelquefois j'en ai vu à la surface du sable plusieurs, dont le centre est creusé; mais ce sont le Soleil & la temperature de l'air, qui les ont calcinées hors du lieu de leur formation; elles appartiennent à la Classe de celles que nous avons indiquées ci-dessus §. I. & IX.

XVIII. Cependant, quoique les racines de notre fossile soient moins creusées en forme de tuyaux, lorsqu'elles ne sortent pas de leur place naturelle, on y remarque encore d'autres differences. Il y en a, par exemple, quelques unes dont la substance est tellement uniforme, qu'on ne sauroit distinguer l'ecorce d'avec le centre, au lieu que dans d'autres le centre est tout percé de petits trous, qui le font ressembler exactement à la *diploë* des Os; phénomene, dont nous expliquerons plus bas la raison, qui dérive de la formation même du fossile.

ſile. Dans certaines groſſes branches il demeure quelquefois des reſtes de bois pourri, ſans ſuc, & comme de la limaille; tandis que dans d'autres le centre du corps ligneux eſt ſec, dur, & presque comme de corne: ce qui s'etend quelquefois à diverſes repriſes jusqu'à la longeur de quatre, ou de ſix pieds. Cette portion *cornée* du corps ligneux n'eſt point une des moindres racines, une racine capillaire, (comme pourroit ſe l'imaginer une perſonne peu au fait de ces matieres;) pour s'aſſurer du contraire, il n'y a qu'à examiner les troncs d'arbre, qui dans les lieux marêcageux viennent à ſe détruire peu à peu, etant creuſés, & rendus poreux par l'humidité naturelle du terroir.

XIX. Nous avons dejà donné une idée de la matiere de notre fosſile, & nous avons fait connoitre l'extreme rapport qu'il y a entr'elle, & la terre de chaux mêlée au ſable: pour achever de dire ici ce que nous en penſons, il n'y presque point, ou même point de difference entre ces matieres. Il faut ſeulement prendre garde qu'il ne s'agit point de ces pieces, qui étant expoſées à l'air, y éprouvent des changemens. La maſſe terreſtre, qui, à proprement parler, conſtituë notre fosſile, eſt une vraye terre de chaux, & quand on l'a nettoyée du ſable & de la pourriture qui peut y reſter, l'acide vitriolique, avec lequel elle prend une forte effervescence, la diſſout en partie: mais je ſuis pourtant en doute, ſi c'eſt une Terre pure, & entierement dégagée de la liqueur du bois pourri, ou de l'acide. Le ſavant *Henckel* * nie l'effervescence & la ſolution de l'Oſteocolle dans l'acide du vitriol; mais il faut qu'il ait pris quelque autre fosſile pour l'Oſteocolle de la Marche.

* *Flora Saturn.* p. 285.

XX. La matiere de notre fosſile, lorsqu'elle eſt encore renfermée dans le ſable, eſt molle, elle a de l'humidité, ſa cohérence eſt lâche, & elle exhale une odeur acre, aſſez foible cependant; ou bien elle forme un corps graveleux, pierreux, inſipide & ſans odeur. Tout cela met en évidence, que la terre de chaux de ce fosſile n'eſt point *du gravier fin, lié par le moyen d'une glu,* comme le prétendent *Th. Eraſtus* † & *Hermann;* * ce dernier etant même perſuadé, *que le ſable fin ſe convertit avec le tems dans la matiere de notre fosſile.* Cela répugne aux principes reçus, ſuivant lesquels toute eſpece de ſable

† *ib. ſup.* p. 140.

* *Maßlogr.* p. 185.

sable étant une terre vitrifiable, se trouve par là en opposition avec les terres de chaux, & ne peut jamais se changer en elles.

XXI. Lorsqu'on peut remarquer quelque proportion dans la composition de la matiere de notre fossile, elle consiste pour l'ordinaire en parties égales de sable & de terre de chaux, comme je m'en suis assuré en les séparant dans l'eau. De cette maniere, une once de matiere pure a rendu une demi-once & cinq grains de terre de chaux trés deliée, où se trouvoit mêlée une portion de sable commun, grossier & pesant, qui alloit au poids d'une drachme & quinze grains; à quoi il faloit ajouter enfin deux drachmes d'un sable trés fin, qu'on avoit plus de peine à séparer du reste de la terre de chaux. Ainsi il ne manquoit au poids entier de la matiere que deux scrupules qui s'etoient perdus dans la solution. L'examen Chymique de notre fossile a été fait par Mrs. *Kundmann*, *Neumann*, *Pott*, & quelques autres, aux écrits desquels nous renvoyons ceux qui en sont curieux, le sujet n'etant pas de notre ressort. Nous attendons une nouvelle analyse de l'Osteocolle, que M. *Marggraff* nous fait esperer. *

* C'est celle qui suit ce Mémoire.

XXII. Par rapport à la génération de notre fossile, les Auteurs se partagent en divers sentimens; mais les contradictions où ils tombent, viennent surtout de ce qu'ils confondent d'une maniere étonnante des corps étrangers, & entiérement differens. Il y en a aussi, qui déduisent, par exemple, l'origine de notre fossile d'une espece d'incrustation fortuite & confuse, salino-terrestre, ou glutineuse, pareille à celle qui produit le *Zingiberites*, aussi bien que plusieurs veines mêlées d'argille & de sable. Mais lorsqu'en comparant soigneusement toutes les circonstances qui concernent notre fossile, nous l'examinons attentivement, & suivant les régles de l'Histoire Naturelle, dans le lieu même de sa formation, nous n'avons plus besoin de recourir à aucune de ces fictions. Quelques Auteurs ont été plus prés du vrai, mais en trés petit nombre, comme *Neumann*, qui a pris notre fossile pour *une racine d'arbre petrifiée*, & *Ferrantes Imperatus*, † qui dit; que l'Osteocolle est *une racine changée en pierre, molle comme du ciment, & d'une substance sablonneuse*. Ces dernieres opinions sont plus solidement appuyées. En effet notre fossile, dont

† Hist. Nat. 255.

dont la figure naturelle & conſtante eſt celle d'une racine d'arbre champêtre, n'eſt réellement autre choſe qu'*une ſemblable racine avec le bas du tronc, qui etant morte a été pourrie dans le ſable par l'humidité croupiſſante, & dont le tems a changé l'apparence, en la rempliſſant de terre de chaux*. Les obſervations que nous rapporterons encore dans la ſuite, acheveront de juſtifier notre hypotheſe.

XXIII. Outre le témoignage de l'experience, on peut encore prendre pour garans les caracteres ſuivans, qui conviennent à tout corps naturel & vrai, qui a ſubi le changement de la pétrification, & qui le diſtinguent ſenſiblement de toutes les incruſtations, ou productions figurées quelconques. Ces caracteres ſont la *figure*, la *grandeur*, le *nombre*, la *ſituation*, & la *proportion naturelle*. Quand ils ſe trouvent réünis dans un corps petrifié, & le rendent conſtamment ſemblable à un corps tel qu'il etoit dans ſon état de vie, cela détruit entiérement tout ſoupçon d'incruſtation, ou de telle autre formation fortuite & confuſe.

XXIV. En parcourant des lieux champêtres & marécageux, on rencontre çà & là des troncs d'arbre pourris, qui ont une parfaite reſſemblance avec les troncs vivans les plus ſains, & qui, à en juger par leur grandeur, devroient avoir un poids trés conſiderable, quoique ſouvent ils ayent à peine quelques livres. C'eſt qu'ils n'ont point de ſubſtance ligneuſe interieure; en ſorte que depuis la tige jusqu'aux racines c'eſt une pure cavité, où il ne reſte presque que les nerfs qu'on nomme *cornés*, & un petit nombre de vaiſſeaux cartilagineux du corps ligneux, toutes les apparences néanmoins s'y conſervant. Cet effet ſingulier eſt cauſé par l'abord perpetuel de l'humidité, & par l'état croupiſſant, qui pourriſſent peu à peu toute cette ſubſtance interieure, comme l'experience en fait foi.

XXV. Cette humeur putride & croupiſſante pénetre la tige par le moyen de ſon acreté, en paſſant à travers la texture celluleuſe jusqu'au cercle ligneux, elle obſtruë partout les fibres du bois, les amollit, & les ronge, de maniere qu'il en réſulte la ſolution de tout le continu, à la reſerve d'un trés petit nombre des parties les plus pures, qui ſemblent réſiſter entiérement à la putréfaction. Des

troncs & des racines dans cet état sont ce que l'on peut imaginer de plus propre à la génération de notre fossile dans le sable; & voici comment la chose se passe. Il se forme dans ces troncs, & dans ces racines, des cavités, où s'insinuë facilement par le moyen de l'eau la solution de sable & de terre de chaux, en entrant par tous les trous & les endroits cariés, & en descendant jusqu'aux extremités de toute la tige & des racines, jusqu'à ce qu'avec le tems toutes ces cavités se trouvent exactement remplies. L'eau superfluë trouve aisément une issuë, dont les traces se manifestent dans le centre poreux (voy. §. XVIII.) des branches les plus pures qui sont moindres. C'est là l'unique maniere dont arrive la formation de notre fossile; la chose est incontestablement appuyée sur l'experience, & c'est par là que l'on explique sans peine, comment l'Osteocolle reçoit & conserve la figure, la grandeur, la situation, & la proportion exactement naturelle qu'on y remarque. Qu'est ce qui pourroit donc nous empêcher d'imiter la formation de ce fossile, & de produire nous-mêmes en un moindre espace de tems de l'Osteocolle, faite avec plus d'art, & plus pure? Je n'y vois point de difficulté.

XXVI. Au reste on découvre la raison de cette mollesse des plus grosses branches de notre fossile, dont nous avons parlé §§. XVI. XVII. en réfléchissant surtout, que toute l'humidité distille pendant un plus long espace de tems, & sans discontinuer, à travers le sable jusqu'au tronc. En effet le corps de l'Osteocolle déjà tout formé se trouve plus dense que le sable, & trop serré pour transmettre l'eau, & s'il le fait, ce n'est qu'avec beaucoup de lenteur & de difficulté, ce qui fait qu'il y a autour du fossile une humidité qui croupit perpetuellement, & qui est un veritable obstacle à la pétrification. *M. Henckel* a déjà touché cette idée assez heureusement, dans celui de ses Ouvrages que nous avons cité plus haut. D'ailleurs il n'y a point de contradiction entre ce que nous avançons ici, & ce que nous avons dit §. XIV. des plus petites branches qui sont aux extremités, & qui étant comme dispersées, & fort éloignées du centre, sont polies & presque de pur sable.

XXVII. Ce

XXVII. Ce que l'Auteur de la *Masslographie*, & quelques autres, disent au sujet de l'incrustation, ne s'accorde point avec la verité, tant à cause qu'il ne s'y trouve point de glu naturelle propre à produire cet effet, ou du moins qu'elle est trop délayée, que parce qu'on trouve souvent dans la masse de notre fossile une portion égale de sable & d'ordures. Outre cela il y a divers bois morts, ou pierres, qui se trouvent environnées de matiere pareille à celle qui forme l'Osteocolle, c'est à dire, de sable & de terre de chaux; & qui ne reçoivent point pour cela d'incrustation.

XXVIII. (*) Je vais continuer à dégager l'histoire de l'Osteocolle de toutes les fictions, dont on l'avoit embarassée. Pour cet effet je mettrai sous les yeux de l'Academie les nouvelles pieces de ce fossile, que j'ai dernierement recueillies, & j'y joindrai les Observations incontestables, que j'ai réiterées plusieurs fois, & avec toute l'exactitude dont je suis capable, sur les lieux mêmes de la formation.

XXIX. J'ai toujours eu une veritable ardeur pour l'etude de l'Histoire Naturelle, & j'ai parcouru avidement tous les Tresors qui ont été publiés, pour en étendre les bornes. L'Osteocolle m'a fourni une nouvelle occasion de les feuilleter avec attention. Mais j'avoüe ingenüement, que je n'y ai jamais rien trouvé, qui pût mener à quelque certitude sur la connoissance de ce fossile, & procurer en particulier un jugement assuré sur sa génération. Au contraire je n'ai presque rencontré partout qu'une extreme confusion. Quelques uns des échantillons que les Auteurs produisent, approchent à la verité de la forme & de la couleur de l'Osteocolle; mais la plupart n'ont même aucune ressemblance avec ce fossile, qui puisse leur en faire porter le nom.

XXX. Il m'est arrivé surtout de rencontrer fréquemment, tant dans les Cabinets des Curieux, que dans les Apoticaireries, une certaine espece de tuf, en partie informe, en partie composé de l'assemblage de plusieurs petits tuyaux de differente nature, qu'on faisoit

F 3 passer

(*) Ici commence un second Mémoire, que M. *Gleditsch* lut à l'Academie un an aprés le premier, pour lui rendre compte de nouvelles Observations, qu'il avoit faites depuis ce tems-là.

paſſer pour de l'Oſteocolle. Ce tuf ſe trouve en abondance dans plusieurs contrées de la Thuringe, par exemple, autour de *Tennſtædt*, *Sondersbauſen*, *Oſt* & *Weſt-Creiſen*, *Greſen-Ebrig* &c. ſur les bords de l'*Helpa*, & en d'autres endroits, & il eſt caché à la profondeur d'un pied ou de deux, ſous les terres les plus fertiles. On prétend qu'aprés avoir réduit une grande quantité de ce tuf en poudre par le moyen de certaines machines particulieres, on la porte tous les ans à *Meiſſen*, pour entrer dans la compoſition de la Porcelaine.

XXXI. Il m'eſt bien arrivé auſſi aſſez ſouvent de trouver de la vraye Oſteocolle, mais elle étoit ſi vieille, & ſi gâtée par l'action de l'air, qu'il étoit impoſſible de s'en ſervir pour faire des Obſervations. En voulant employer de ſemblables pieces alterées, pour en tirer des concluſions ſur la nature & la génération de tout le foſſile, on pourroit tomber dans des erreurs pareilles à celles des perſonnes, qui prennent pour des os de quelques Géans d'une grandeur étonnante, les os des animaux marins qu'on rencontre ſous terre. J'ai encore remarqué une plus grande confuſion à cet egard dans les Apoticaireries qui ſont hors de la Marche, & où l'on devroit trouver de veritable Oſteocolle, auſſi bien que dans les nôtres. On n'y employe, ſurtout vers les confins de la Forêt noire, que du Gypſe le plus commun, qui prenant le titre d'Oſteocolle, ſert à tous les uſages de Chirurgie, par une erreur trés dangereuſe, mais à laquelle perſonne ne s'oppoſe.

XXXII. Il ſemble qu'on ait quelque raiſon de demander ici, pourquoi les Phyſiciens n'ont encore dit que des choſes ſi incertaines ſur l'origine de notre foſſile, quoiqu'il y ait environ trois ſiecles qu'on en fait mention dans les Ecrits des Medecins. Mais il faut remarquer que, malgré l'ancienneté de ſon uſage, les pieces d'Oſteocolle ont été conſiderées fort négligemment, parce qu'elles paroiſſent peu pures, & qu'elles tombent aiſément en pouſſiere. Le petit peuple ramaſſant ces pieces, les alloit porter à bas prix aux Apoticaires, & leur livroit pêle-mêle les branches trouvées ſous le ſable, ou celles qui s'étoient calcinées à la ſurface, blanches, gâtées, dures, entamées, &c. Et c'eſt d'aprés cet état que les Auteurs ont fait leurs rélations, qui y conviennent fort bien. Il y a longtems que je m'etois

apperçu

apperçu que les opinions erronées de ces Auteurs dérivoient principalement de cette ſource. Si les pauvres gens qui ramaſſoient l'Oſteocolle, n'avoient voulu en apporter aux Apoticaires que de bien nette, & dégagée de toute pourriture de bois & d'ecorce, ceux-ci ne leur en auroient pas ſu beaucoup plus de gré, & ne les auroient gueres mieux payé.

XXXIII. Le ſeul Ecrivain que je ſache, qui dans le ſiecle paſſé ait aſſez bien connu l'Oſteocolle, eſt *Ferrantes Imperatus*. Il en a donné une courte deſcription dans ſon *Hiſtoire Naturelle*, & a joint la figure fort nette d'une piece, qui paroit avoir été formée dans un tronc de Bouleau. Quoique depuis lui quelques uns ayent parlé par ci par là dans leurs Ecrits de l'Oſteocolle, & en ayent même dit certaines choſes néceſſaires à ſavoir, perſonne néanmoins n'a pu démontrer ſolidement l'origine de ce foſſile, & cela faute d'Obſervations.

XXXIV. A' l'egard du terroir natal de l'Oſteocolle, où elle habite, pour ainſi dire, & a coutume de ſe former, l'Experience jointe au conſentement de pluſieurs Auteurs, dépoſe que le plus convenable eſt un terroir ſterile, ſablonneux, & leger. Au contraire toute Terre graſſe, conſiſtente, argilleuſe, onctueuſe, limoneuſe, &c. lorsqu'elle vient à etre délayée par quelque écoulement abondant d'eaux, laiſſe paſſer lentement & difficilement l'eau elle-même, à plus forte raiſon quelques autres terres, comme celle dont l'Oſteocolle eſt formée. L'Oſteocolle ſe mêleroit intimément à la terre graſſe, ou elle formeroit des lits plats au dedans d'elle, plutot que de pénétrer une ſubſtance auſſi conſiſtente.

XXXV. Voici le nom des endroits ſablonneux & incultes des deux Marches, ou j'ai ſpécialement recueilli des fragmens d'Oſteocolle, & en ai obſervé la génération. Le premier lieu qui m'ait fourni de veritable Oſteocolle, c'eſt une campagne fort ſablonneuſe, qui confine aux Villes de *Potsdam*, *Treuenbritzen*, & *Belitz*, où je fis cette decouverte en 1735. A' ces premiers fragmens j'en joignis d'autres, que me fournit Mr. *Feldmann*, habile Medecin & Phyſicien de *Ruppin*, qui les avoit tirés de la montagne ſablonneuſe de *Cremme*. En 1737. je fis une récolte abondante d'Oſteocolle dans le territoire même

même de Berlin, hors de la porte qu'on nomme de Halle, & dans les terres sablonneuses, qui vont du Village de Schoeneberg à Charlottenbourg; mais les pieces etoient assez petites & vieilles. J'ai encore rencontré ce fossile dans plusieurs endroits du Cercle de *Lebus*, entr'autres autour de la Ville de *Müncbenberg*, & des Villages de *Hoppengarten*, *Quilitz*, *Rosentbal* & *Friedland*, où j'ai recueilli beaucoup de pieces d'Osteocolle en divers tems, depuis 1738. jusqu'en 1741. aussi bien que dans les districts voisins de la basse Lusace, autour des Villes de *Beskow*, *Storckow* & *Lieberose*. Mais l'abondance & la varieté de l'Osteocolle régnent surtout dans les petites collines séches & sablonneuses de la Nouvelle Marche, & principalement dans les champs, vignobles & bruyeres, qui sont autour de la Ville de *Drossen*, & de *Sonnembourg*. C'est là où depuis 1742 jusqu'en 1747. j'ai fait mes plus importantes Observations sur la veritable génération de l'Osteocolle.

XXXVI. J'ai dejà parlé §. VIII. de la matiere de notre fossile, quand il est enséveli dans ces lits, qu'on trouve quelquefois mêlés en grand nombre au sable. Dans la derniere course que j'ai faite sur le territoire de *Drossen*, j'ai eu occasion d'examiner de nouveau de semblables lits, qui se trouvoient auprés d'une vigne abandonnée. Le terroir de la vigne, sterile & sablonneux, étoit couvert jusqu'à la profondeur d'environ un pied d'une espece de sable blanc, leger, & pur, sous lequel se trouvoient quelques lits de terre de chaux, qui alloient obliquement de haut embas à six ou huit pieds le profondeur, (étant à peu prés disposés comme une certaine sorte de pierre de taille.) Chaque lit de cette terre de chaux, de l'epaisseur d'environ deux pouces, & qu'on auroit pu appeller plutot une *lame*, ou *plaque*, de terre de chaux, étoit un peu humide & molle; la substance en étoit beaucoup plus épaisse & plus dense que celle de l'Osteocolle dejà formée dans le creux d'un arbre pourri, mais elle étoit tout aussi fragile.

XXXVII. Cependant la substance de cette lame grossiere permet le passage à travers sa partie inferieure, où elle a le plus d'humidité & de mollesse, à diverses petites racines d'arbres & d'arbustes, tels que le Cerisier, le Cornoillier, le Coudrier, l'Eglantier &c. dont les

les ramifications capillaires se dispersent presque par toute la lame. J'ai aussi observé des morceaux de bois autour de ces lames, sans en avoir jamais remarqué un seul, qui ait souffert d'incrustation, ni de pétrification.

XXXVIII. Dans les endroits de la vigne en question, opposés à ceux-ci, & qui sont les plus élevés, on trouve sous le gazon des veines de terre de chaux, dont le mêlange est confus & incertain, & au milieu desquelles se rencontrent des amas de feuïlles de Coudrier, qui ne sont pas encore pourries. Ces veines se forment & s'accroissent tous les ans dans les tems de pluye, lorsque l'ecoulement des eaux entraîne avec soi vers les lieux situés plus bas, la terre de chaux, avec la terre ordinaire, les feuïlles, le sable & les autres ordures, plus ou moins divisées, sous la forme & l'apparence de rayons. Mais, ni ces veines, que les ignorans confondent avec l'Osteocolle, ni les lames dont nous avons parlé, ne constituënt point la veritable Osteocolle, quoiqu'elles renferment une partie de terre de chaux, qui est même quelquefois la plus forte dans le sable. En effet toute terre de chaux, & figurée, n'est pas de l'Osteocolle; celle là seule doit porter ce nom, qui par le moyen de la terre de chaux a subi un changement & une concretion, qui la rendent semblable à une vraye racine d'arbre, ou celle qui a été effectivement formée dans une racine d'arbre creuse & cariée, que l'eau pourrit & remplit peu à peu de terre de chaux, de maniere qu'elle renferme une partie de la substance vegetale dissoute, & quelle retient les caracteres naturels d'une racine d'arbre, savoir la figure, la grandeur, la situation & la proportion. Voilà la seule production qu'on puisse nommet à juste titre *Osteocolle*, & la seule qui devroit avoir le droit d'entrer dans les Apoticaireries, pour fournir des usages dans la Medecine.

XXXIX. A' la descente des mêmes lieux, vers une aunaye marêcageuse, j'ai fait une petite Observation, à laquelle je ne m'attendois point du tout, & qui m'a causé une veritable admiration. Il y a dans un lieu escarpé un haut Pin d'environ soixante ans, qui étend ses branches au loin, & qui est d'une verdure éclatante. Un débordement subit d'eaux a entraîné autrefois d'autour de cet arbre une

quantité de ſable, qui couvre les couches humides du terrain voiſin. Cela a mis entierement à nud ſes racines de devant, elles ſont expoſées à l'air, & par là ce bel arbre menace à toute heure ruïne.

XL. Cela m'a fait naitre l'envie d'examiner ſes racines de derriere, qui ſont, ou enfoncées dans le ſable, ou couvertes de mouſſe. En levant la petite envelope mouſſeuſe, il s'eſt offert à ma vuë un ſpectacle tout à fait agréable, ſavoir, une branche de la groſſeur du bras, continuë au tronc, dont toute la ſubſtance morte étoit changée en veritable Oſteocolle, la terre ligneuſe & pourrie étant demeurée au centre; Cas certainement des plus rares, & qui fournit une preuve de mon hypotheſe au deſſus de toute exception, puisqu'on y voit la pétrification d'une racine encore enſévelie de la longeur de ſix pieds dans le ſable, & qui tient à l'arbre vivant. Je ne crois pas qu'aprés cela on puiſſe encore former le moindre doute ſur la génération de l'Oſteocolle.

XLI. Rien ne fait plus de peine que l'extreme fragilité de notre foſſile, lorsqu'il eſt encore tout frais; fragilité qui ne permet pas d'en conſerver aucune belle piece entiere pendant longtems, la ſeule action de l'air, ou le moindre mouvement, y produiſant mille fentes, qui le font tomber par pieces entre les mains.

XLII. Enfin j'ai trouvé l'occaſion la plus favorable de répeter toutes mes Experiences ſur l'Oſteocolle, & de leur donner tout le degré poſſible de certitude. Le lieu qui me l'a fournie, eſt un monticule ſablonneux & deſert, qui termine un petit bois de pins dans la contrée de *Sonnenbourg*.

XLIII. J'y ai vu la veritable Oſteocolle déjà formée en diverſes manieres, dans les racines de pluſieurs arbres, creuſées par la pourriture. Ces racines, ſuivant la diverſité de leur diſpoſition, étoient plus ou moins profondément remplies; tantot des troncs entiers étoient convertis en Oſteocolle, tantôt une, ou pluſieurs racines, les autres n'etant pleines que de cette terre noirâtre de bois pourri, qu'on nomme en Allemand *Holtz-Erde*, ou même de pur ſable. Dans quelques arbres dont l'ecorce étoit fenduë vers le bas, on voyoit la matiere de l'Oſteocolle, en maſſe encore groſſiere, chercher une iſſuë vers

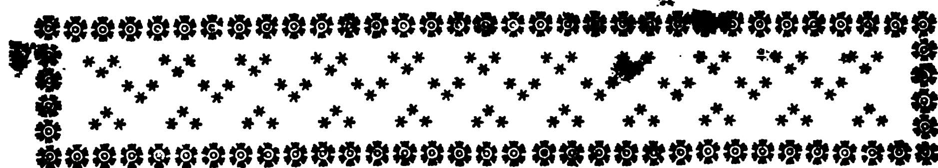
les

les extrémités qu'elle s'etoit rassemblée ; dans d'autres, l'Osteocolle n'avoit pu occuper profondément les cavités, à cause de la quantité de sable, ou de terre pourrie, qui s'y etoit déjà insinuée.

XLIV. J'ai aussi compris que plusieurs troncs étoient uniquement remplis de terre de bois, ou de sable, parce que dans la plupart des autres le mêlange des ces matieres en parties presque egales, rendoit l'Osteocolle trés impure, & ne permettoit presque pas de la reconnoître hors du lieu de sa formation. J'ai en effet trouvé la substance ligneuse de quelques uns, réduite dans une poussiere qui ne se dissipoit pas, mais qui mêlée avec l'Osteocolle, formoit une concretion pierreuse, plus ou moins dure.

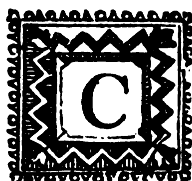
XLV. C'est ainsi qu'à force de voyages pénibles, mais agréables, je me flatte d'avoir rassemblé toutes les Observations qui servent à expliquer l'origine, la forme, & la génération de l'Osteocolle, & à rendre complette la veritable histoire de ce fossile.





EXPERIENCES CHYMIQUES
FAITES
SUR L'OSTEOCOLLE DE LA MARCHE,
PAR M. MARGGRAF.

Traduit du Latin.



I.

CE qui m'a fourni la principale occasion de faire un examen chymique de ce mixte qu'on nomme *Osteocolle*, c'est la connoissance plus exacte que nous en a donnée M. *Gleditsch*, * & les pieces mêmes de ce fossile, qu'il a bien voulu me fournir, & qui m'ont procuré la certitude, que je travaillois sur la veritable Osteocolle, & non sur quelcune des matieres, auxquelles on a faussement donné ce nom.

* Voyez le Mémoire précedent.

II. Toutes les Experiences Chymiques que je vais rapporter, ont donc uniquement pour objet cette espece d'Osteocolle, que M. *Gleditsch* a trouvée dans les contrées de *Sonnenbourg* & de *Drossen*, entre l'*Oder* & la *Warte*: & il ne faut les entendre d'aucune autre espece.

III. Entre les diverses pieces d'Osteocolle, que j'ai reçuës de M. *Gleditsch*, j'ai cru ne devoir soumettre à l'examen chymique, que celles qui étoient les plus pures, & dans lesquelles le mélange paroissoit le plus parfait. J'ai fait choix en particulier de cette branche remarquable, dont M. *Gleditsch* a parlé dans son Mémoire, † comme ayant

† ub. sup. §. XL.

ayant encore fait partie d'un Pin vivant, lorsqu'elle a été convertie en Osteocolle. C'étoit un morceau épais, pas trop dur, qui répréfentoit exactement une Racine d'arbre, & qui contenoit par-ci par-là quelques fibres de la racine, dont il avoit été formé, mais en petit nombre, & fort minces.

IV. La principale raison, pour laquelle j'ai préferé cette piece d'Osteocolle à toutes les autres, pour en faire le sujet de mes Experiences, c'est que je l'ai trouvée moins sablonneuse, & moins mêlée de particules vegetales que les autres; & aussi, parce que j'en ai pû tirer par la lotion une plus grande quantité de terre subtile que des autres.

V. J'ai donc commencé mes opérations par la lotion, ou élutriation, de l'Osteocolle. Pour cet effet j'en ai pris une demi-livre, que j'ai d'abord bien pilée dans un mortier de verre net, je l'ai mise ensuite dans un vase de verre, dont l'orifice étoit large, j'y ai versé de l'eau claire, & j'ai bien remué le tout; aprés quoi la partie la plus pesante s'etant réposée au fonds, j'ai versé un instant aprés la liqueur encore trouble dans un autre vase. J'ai versé de nouvelle eau sur ce qui étoit resté dans le verre aprés la décantation, laquelle j'ai réïteré de la même maniere, continuant ce travail, jusqu'à ce que l'eau ne parût plus trouble, J'ai mis reposer l'eau trouble, & peu à peu j'ai vû une terre blanche subtile gagner le fonds. Cette terre, aprés avoir été desséchée, pesoit quatre onces & demie. Cela étant fait, j'ai aussi procuré l'exsiccation de la partie plus pesante, qui étoit demeurée dans le premier verre, & j'ai trouvé trois onces & demie d'un sable fin.

VI. Ayant fait la décantation & la filtration de l'eau claire, qui restoit aprés que la terre subtile s'étoit reposée, je l'ai evaporée jusqu'à la sécheresse, & j'en ai tiré une trés petite quantité de substance salino-terrestre; qui etant délayée dans de l'eau, a causé une foible précipitation de la solution d'argent, de Mercure, & de plomb, faite dans l'acide du nitre; mais c'étoit si peu de chose, que cela ne méritoit presque point d'attention.

VII. Ayant exactement séparé de la maniere susdite, tant la terre subtile, que la terre sablonneuse plus pesante, je me suis premierement mis à l'examen de la terre subtile, & j'ai observé qu'elle entroit en effervescence avec tous les acides, par exemple, avec l'acide de sel commun, de nitre, & de vitriol, aussi bien qu'avec les acides des végétaux. L'acide vitriolique attaque cette terre subtile avec beaucoup de véhémence, en la faisant écumer. Cette même terre, jettée peu à peu dans l'esprit de vitriol, s'en imbibe presque entiérement; & lorsqu'elle en est parfaitement saoulée, forme une masse épaisse, comme de la bouïllie. J'ai versé de l'eau chaude sur cette masse, je l'ai bien remuée, j'ai ensuite fait la filtration, & par une évaporation convenable, je l'ai disposée à la crystallisation; ce qui étant fait, cela m'a donné de petits crystaux oblongs, mais en trés petit nombre. L'acide vitriolique paroit avoir ici les mêmes rélations avec notre sujet, qu'il a avec la pierre de chaux, à la partie terrestre de laquelle il s'attache principalement; & c'est par la même raison qu'on ne peut séparer de ce sujet que trés peu de particules salines.

VIII. Au contraire, l'acide du nitre s'empare de notre terre avec une plus grande véhémence, & la dissout entiérement, à la reserve d'une fort petite quantité, qui tombe au fonds du vase, & qui n'est autre chose que la partie la plus subtile de cette terre sablonneuse, qui s'y étoit mêlée pendant l'elutriation. Quand l'acide du nitre a été parfaitement saoulé de cette terre, il en résulte une solution, qui a une parfaite ressemblance avec la solution de la pierre de chaux par l'esprit de nitre. L'ayant filtrée, je lui ai procuré la consistence convenable par l'exhalation, mais il ne s'est point voulu former en crystaux. C'est ce qui m'a engagé à dessécher cette solution par l'évaporation; ce qui étant fait, j'ai observé que cette masse desséchée, lorsqu'on l'exposé à l'air, attire facilement l'humidité, & se fond en une liqueur brunâtre. J'ai aussi mis une portion de cette solution desséchée dans un petit creuset, je l'ai exposée au feu, cette masse s'est mise à écumer, & l'esprit de nitre s'est envolé copieusement par voye d'exhalation. Enfin, tout l'esprit de nitre étant presque évaporé, j'ai gouverné le feu de la même maniere, dont les Chy-

mistes

miftes ont accoutumé de le faire dans la préparation du Phosphore de *Balduinus*, & par cette voye j'ai moi-même produit un Phosphore, aussi beau que celui qu'on prépare ordinairement, en employant la craye & l'esprit de nitre. En traittant de même la pierre de chaux avec l'esprit de nitre, j'ai eu un semblable produit, c'est à dire, un beau Phosphore. Les experiences que renferme cette opération, font donc voir la convenance de la terre de chaux avec la terre de craye.

IX. Notre terre subtile d'Osteocolle est aussi saisie assez rapidement par l'acide du sel commun, & se dissout entiérement, de la même façon que nous avons déjà indiquée, en parlant de l'esprit de nitre; à cause de quelques particules sablonneuses, qui se sont mêlées avec cette terre subtile dans l'elutriation. Ici aussi, pendant la solution, il tombe quelque chose au fonds, quoiqu'en trés petite quantité. Quand l'acide du sel est parfaitement saoulé de cette terre, & qu'ensuite on filtre cette solution, & qu'on la fait evaporer jusqu'a la sécheresse, parce qu'elle se refuse à la cryftallisation; les mêmes rélations se manifestent, que lorsqu'on dissout la pierre de chaux dans cet acide, & que l'on continuë le même procédé. En effet cette solution desséchée se fond à l'air au bout de quelque tems, & il lui arrive d'ailleurs précisement la même chose, qu'au sel armoniac fixe, ou à toute autre solution faite avec la chaux vive & l'acide de sel, & puis desséchée.

X. J'ai ensuite ajouté du sel armoniac à cette terre subtile d'Osteocolle, savoir, deux parties de terre avec une de sel armoniac dépuré, je les ai mêlées exactement par voye de trituration; mais de ce mélange, non plus que d'un semblable fait de pierre de chaux cruë, & de sel armoniac, je n'ai pu dégager rien d'urineux; car mon mixte ne rendoit aucune odeur. Mais, lorsqu'en l'approchant du feu il a commencé à s'y embraser, non seulement l'urineux s'est envolé en abondance, mais même ce qui est resté dans le creuset a formé um mixte salin vrai & parfait, qui étoit un sel armoniac fixe, pareil à celui que produisent ordinairement la pierre de chaux, ou la chaux vive, avec le sel armoniac.

XI. Je

XI. Je n'ai pas cru devoir oublier non plus d'examiner, si cette terre d'Osteocolle, traittée düement, pourroit produire de la chaux vive? Pour cet effet j'en ai pris environ une once que j'ai exactement calcinée, pendant l'espace d'une heure, dans un creuset fermé; & aprés le réfroidissement, j'ai remarqué qu'elle possedoit parfaitement toutes les qualités & les proprietés de la pierre de chaux calcinée. En effet cette terre d'Osteocolle, traittée de la maniere précedente, quand on la pile ensuite au mortier avec le sel armoniac, dégage aussitot, comme la chaux vive, la partie urineuse; ou si l'on jette cette terre calcinée dans l'eau froide, elle s'echauffe, & aprés cette incelescence, l'eau qui surnage, montre toutes les proprietés de l'eau de chaux vive; car elle précipite la solution de Mercure sublimé, en donnant à ce précipité une couleur d'un jaune clair; elle précipite de même la solution de Mercure faite dans l'eau forte, en lui donnant une couleur brunâtre; elle trouble les solutions d'Argent, de Cuivre, de Plomb, de Fer, de Zinc & de Bismuth, faites dans l'acide du nitre, aussi bien que la solution d'Etain dans l'eau régale; enfin elle donne une belle couleur verte à une eau blëue extraite des Violettes.

XII. Cette terre toujours traittée de la même maniere, comme la chaux vive, rend caustique le sel alcali fixe, & en le cuisant, le rend aussi acre, que pourroit faire la chaux vive elle même. Elle dissout aussi fort volontiers le souffre commun: car, en mêlant quatre parties de cette terre calcinée, avec une partie de souffre, & y ajoutant environ six ou huit parties d'eau, le souffre se dissout fort bien dans la coction, & ensuite se précipite aisément de la lessive filtrée, en y ajoutant des acides. Ainsi, dans toute cette opération, la conformité entre la terre d'Osteocolle & la chaux vive se manifeste de la maniere la plus évidente.

XIII. Enfin, j'ai aussi mêlé deux parties de sel alcali fixe avec une partie de cette terre, & les ayant mis en fusion, j'en ai tiré une masse opaque, d'une couleur blanchâtre, qui est parfaitement semblable à la masse que produisent deux parties de sel alcali fixe, mises en fusion avec une partie de chaux vive.

XIV. Par

XIX. Par rapport à l'autre partie terrestre, que j'ai indiquée §. V. & que l'elutriation sépare de l'Osteocolle, en la faisant tomber au fonds, comme la partie la plus pesante; ce n'est autre chose qu'un sable fin, & par conséquent une vraye & belle terre vitrifiable. En effet, quoique cette partie de l'Osteocolle entre encore dans une effervescence assez forte avec les acides, cela ne vient que de l'union des acides avec un petit nombre de particules de chaux, qui demeurent adhérentes à cette terre, & qui n'ont pas pu souffrir une exacte séparation. J'ai versé sur une portion de cette terre de l'Esprit de nitre, qui a pris encore à la verité avec elle une forte effervescence, mais qui a laissé, sans y toucher, la terre sablonneuse la plus pure, parce qu'en effet cette terre, aprés la lotion & l'exsiccation, ne présente autre chose qu'un sable subtil trés pur. J'ai bien mêlé dans le mortier une partie de cette terre sablonneuse, dessechée avec partie égale de sel alcali fixe, & je les ai mises en fusion, en y employant le plus violent degré de feu; ce qui a produit un beau verre jaune, couleur qui lui vient peut-etre du petit nombre de particules de fer, qui s'y trouvent encore mêlées. Cette opération montre donc clairement que la terre d'Osteocolle dont il s'agit ici, appartient à l'espece des cailloux, ou du sable, & que par conséquent c'est une terre vitrifiable.

XV. Tout ce que nous avons dit jusqu'ici, met donc en evidence, que les parties qui constituent proprement l'Osteocolle, sont la terre de chaux, & la terre sablonneuse. Je passe à présent aux rélations qu'on découvre dans l'Osteocolle même crüe, en l'exposant à un feu découvert dans des vaisseaux fermés. J'ai mis pour cet effet huit onces d'Osteocolle crüe dans une retorte de terre, & y ayant adapté le récipient, & luté exactement toutes les jointures, j'ai donné un degré violent de feu, poussé jusqu'à l'incandescence. Ensuite, aprés le réfroidissement, j'ai trouvé dans le récipient environ deux dragmes de liqueur, qui

1. exhaloit une odeur urineuse, & en même tems empyreumatique, pareille à celle d'un foible esprit de corne de cerf rectifié;

2. teignoit en verd le syrop de violettes, comme le fait l'alcali volatil;

3. entroit dans une effervefcence fenfible avec les acides ;

4. n'en recevoit abfolument aucune avec l'alcali fixe diffous, (quoique M. *Neumann* ait affirmé le contraire,) mais jettoit plutôt quelquefois une odeur urineufe plus forte ;

5. précipitoit les folutions des metaux faites dans les acides, par exemple, la folution d'argent, de Mercure & de cuivre, en donnant à cette derniere une belle couleur d'azur, comme le font ordinairement tous les efprits urineux purs.

Pour renfermer plufieurs chofes en peu de mots, cette liqueur poffede toutes les qualités & proprietés de l'efprit urineux. A' l'egard de cette huile empyreumatique, femblable à la Petrole, que M. *Neumann* affure y avoir obfervé, il ne s'en eft pas montré une feule goutée à mes yeux, quoique j'aye reïteré ce travail plus d'une fois. La terre auffi, que j'ai tirée de la retorte, aprés que la diftillation a été finie, a toutes les qualités & tous les caracteres de la chaux vive, quoique le même M. *Neumann* * foutienne le contraire. Au refte, il faut encore remarquer ici, que cet efprit urineux d'Ofteocolle dont nous avons parlé, tire fans doute fon origine des particules de vegetaux pourries, qui fe trouvent mêlées à l'Ofteocolle.

* V. *Neum. Prælect.* p. 1595.

XVI. L'Auteur que je viens de nommer, affirme auffi, qu'ayant verfé de l'huile de vitriol fur de l'Ofteocolle qu'il avoit mife dans une retorte à tuyau, il en avoit tiré, par la diftillation de l'efprit de fel. Pour verifier cette affertion, j'ai aussi mis quatre onces d'Ofteocolle cruë pulverifée dans une retorte à tuyau, & y ayant adapté le récipient, j'ai échauffé cette retorte, pofée fur une coupelle remplie de fable, en mettant du feu deffous ; enfuite j'y ai verfé à diverfes reprifes une once d'huile de vitriol, tenant le tuyau toujours foigneufement fermé, & à la fin j'ai donné un degré véhément de feu ; ce qui étant fait, j'ai bien trouvé une efpece de liquide dans le récipient, mais qui ne donnoit pas le moindre indice qu'il contint de l'acide.

Au contraire

1. il étoit infipide, ou tout au plus, il avoit une petite faveur de brûlé ;

2. il ne précipitoit les folutions d'aucuns metaux ;

3. il n'entroit en effervescence avec aucun sel alcali, &

4. n'apportoit point de changement à la couleur du Syrop de violettes.

Pour abréger, c'étoit un pur mixte aqueux. Mais, comme ce n'est pas M. *Neumann* lui-même, qui a donné au public cet examen de l'Osteocolle, il se peut que l'Editeur de ses *Leçons Chymico-pharmaceutiques*, M. *Zimmermann*, ait rencontré une Copie peu exacte, & qu'ainsi il ne faille pas rejetter cette erreur sur M. *Neumann*.

XVII. Toutes les Experiences Chymiques, qui viennent d'etre rapportées, & qui ont eu pour objet l'Osteocolle, & les produits qui en résultent, font voir clairement que c'est *un mixte terrestre composé*

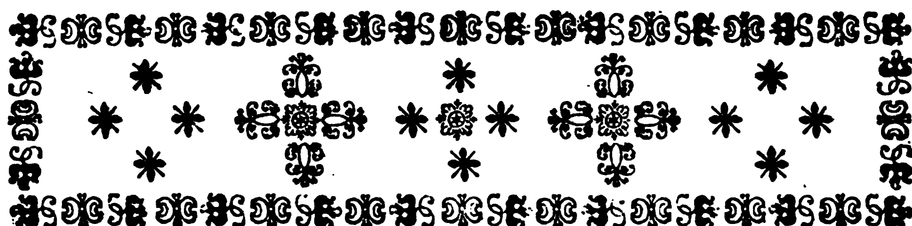
de pierre de chaux,
de sable fin, &
de particules des vegetaux pourries.

Les §§. VII-XII. établissent l'existence de la pierre de chaux.

Celle du sable fin est prouvée au §. XIV.

Et pour ce qui regarde la troisieme sorte de parties, ce sont ces particules des vegetaux, copieusement mêlées à l'Osteocolle, qui, tant à cause de leur putréfaction, que de diverses parties animales des insectes, qui s'y trouvent contenuës, & qui s'attachent ordinairement en quantité au bois pourri; ce sont, dis-je, ces parties, dont conformément au §. XV. on tire avec facilité l'esprit urineux par la voye de la distillation.

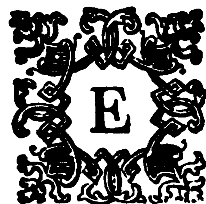




CONJECTURE SUR L'USAGE DES CORPS DIAPHANES DE *MICHELIUS* DANS LES CHAMPIGNONS À LAMES,

PAR M. GLEDITSCH.

Traduit du Latin.



EN examinant les especes d'Agaric, & la maniere dont elles fructifient, on trouve trois choses principales dans les petites lames des Champignons, qui sont tout à fait dignes d'un examen attentif. Ces petites lames, dont il est question, se trouvent rassemblées au revers du *pileole*, & il y en a de deux sortes. Les unes sont tout à fait entiéres, & s'etendent du centre, où le *petiole* est planté, jusqu'à la circonference; les autres, plus petites & plus étroites, sont comme entremêlées parmi les premieres, & commençant tantot à la circonference, tantot au centre, elles s'arrêtent vers le milieu.

Ces petites lames sont les vrais réservoirs de la génération: car de l'extremité de leur bord pendent les vraies étamines avec leurs *capsules*, & leurs poussieres; & les deux surfaces de chaque lame sont abon-

abondamment garnies de ſemences, & couvertes d'eminences papillaires diaphanes.

La premiere des choſes remarquables, dont je veux parler, ce ſont donc ces *organes mâles*, ces étamines mêmes, qui dans une ſeule & même plante ſont ſi eloignés des organes *femelles*. La ſeconde choſe remarquable, ce ſont ces ſemences diſperſées ſur la partie plane de chaque lame, qui ſont fort eloignées des étamines, & qu'on ne peut diſtinguer les unes des autres qu'à l'aide du Microſcope. Enfin, la troiſieme choſe qui excite l'attention, ce ſont certains corps que *Michelius* a nommé *diaphanes*, lesquels ſe trouvent auſſi en abondance, étant diſtincts des étamines, & placés alternativement entre les ſemences.

C'eſt une choſe ſurprenante que les organes mâles s'étant déjà montrés à l'oeil armé du Microſcope, les organes femelles, à cauſe de leur extreme petiteſſe, ayent echappé jusqu'ici à toute l'induſtrie des Phyſiciens, & s'y refuſent encore actuellement; puisqu'à l'exception des ſemences, on n'a pû encore y découvrir aucune autre partie. Neanmoins la chute de la pouſſiere qui tombe des capſules au dedans des corps diaphanes, met hors de tout doute que les organes femelles doivent être cachés dans la ſubſtance de chaque lame, & leurs petites embouchures ſervent apparemment à recevoir les molecules infiniment ſubtiles de la pouſſiere ſeminale, ou du moins elles admettent cette eſpece de vapeur génitale, qui y eſt contenuë ſous l'apparence d'un ſouffle trés leger.

Ce n'eſt donc point une conjecture à rejetter, que celle qui ſuppoſé *de petits pores des organes femelles, ouverts au dedans des corps diaphanes, qui ſont à la ſurface des lames :* puisque, non ſeulement la pouſſiere ſeminale parvient effectivement à ces petits eſpaces, qui entrecoupent les corps diaphanes, mais encore qu'on apperçoit peu aprés des ſemences parfaites dans ces endroits. La maniere dont les *Agarics* fructifient eſt donc fort curieuſe, & reſſemble beaucoup à celle qui a lieu dans les plantes plus parfaites, dans lesquelles les organes mâles & femelles exiſtent ſéparément, quoique dans la même plante (*Monoica.*)

On auroit tort de prendre les Corps mêmes diaphanes de *Michelius* pour les organes femelles, furtout puisqu'ils fe préfentent d'abord & dés le commencement fous la même figure, & de la meme groffeur, qu'ils confervent d'une maniere immuable presque jusqu'à l'entiere deftruction du Champignon ; ce qui, fuivant les loix de la génération, arrive & doit arriver tout autrement dans les organes femelles des végetaux.

Voici la defcription que le favant *Michelius* donne de fes Corps diaphanes. „ Il y a de plus, dit-il, * dans quelques efpeces de „ Champignons, & furtout dans ceux qui naiffent du fumier des „ chevaux, des boeufs, & de femblables animaux, une chofe qui „ nous a paru bien digne d'etre obfervée, c'eft que la furface de leurs „ lames eft non feulement, Tab. 23. fig. 1. garnie de femences, mais „ qu'on y découvre aussi certains *corps diaphanes*, dont dans quel„ ques efpeces la figure eft conique *k*, & dans d'autres pyramidale *l*. „ Ces corps, par un fage arrangement de la Nature, empêchent „ qu'une des lames ne touche l'autre, afin que les femences qui font „ entre ces lames, ne viennent point à fe gâter, ou à tomber, avant „ qu'il en foit tems; & ces corps eux-mêmes tombent, quand la „ femence eft mure, ou qu'elle s'eft détachée. "

* *Nov. Plant. gen.* p. 132.

Je vais ajouter à cette defcription certaines particularités, qui d'un coté mettront dans un plus grand jour l'ufage de ces Corps, & de l'autre rectifieront à quelques égards l'opinion de ce célébre Botanifte. En effet je me fuis affuré, tant par un examen reïteré des fleurs plus parfaites, que par la contemplation des Champignons mêmes; que ces *corps diaphanes* ont un ufage beaucoup plus important & plus decidé dans les Champignons à lames.

D'abord, pour ce qui regarde les efpeces de Champignons, l'Auteur n'en a point entendu d'autres que celles à lame, lesquelles dans ma *Methode des Champignons* j'ai toutes rapportées à l'Agaric, en me fondant fur leur caractere naturel. Mais je ne fuis pas du même avis que *Michelius* en ce qu'il ajoute, que ce Corps diaphanes n'exiftent que dans certains Champignons, & principalement, dans ceux qui naiffent du fumier des animaux. Car dans l'Eté & dans l'Au-

l'Automne, j'ai découvert avec le Microſcope ces mêmes corps dans d'autres eſpeces de Champignons, qui croiſſent à l'ombre, & ſe plaiſent dans des lieux humides, & non expoſés à l'air.

Mais pour les autres eſpeces d'Agarics, dont les lames ſont plus dures, plus ſéches, cartilagineuſes, & presque immarcescibles, je n'y ai point encore trouvé de *corps diaphanes papillaires*, quoique je ſois perſuadé qu'ils ſe trouvent, & peuvent naturellement ſe trouver de même dans la plupart, bien qu'ils ne s'y offrent pas aux ſens avec la même facilité que dans les précedens. Le raiſonnement, l'uſage, la necesſité même, dictent que cela doit être ainſi.

Ces *Corpuſcules*, que le Microſcope ſeul découvre, comme je l'ai déjà dit plus haut, ſont des *eminences papillaires* de diverſes grandeurs, dont les plus petites ſont mêlées en trés copieuſe quantité aux plus grandes ſur toute la ſurface de la lame.

Dans les diverſes eſpeces la figure de ces Corpuſcules differe, étant tantot obtuſe & conique, tantot pyramidale & anguleuſe ; & les petits eſpaces entremêlés parmi ces eminences ſont dans le tems de la fleur tout remplis de la pouſſiere ſeminale, ou peu aprés, des ſemences elles-mêmes, rangées quelquefois quatre à quatre, quelquefois ſans aucun ordre.

A' l'egard de la ſituation de ces Corpuſcules dans les petites lames des Agarics, elle eſt toujours horizontale à l'egard de chaque lame, & pour l'ordinaire, on les remarque plus aiſément d'un des cotés que de l'autre.

C'eſt avec beaucoup de raiſon que *Michelius* a nommé ces Corps *diaphanes*, car ils ſont en effet d'une texture trés mince, & tranſparens, comme certaine croute cryſtalline, qu'on appelle en Allemand, *eine Druſe*, ou comme ces croutes ſalines, qui dans les carrieres metalliques ſouteraines, occupent, ou même forment quelquefois de petites cavernes entieres.

Le même Botaniſte attribuë un double uſage à ces corpuſcules, & infere de leur ſituation, qu'ils ont été principalement donnés aux Champignons; premiérement, afin d'empêcher l'affaiſſement des lames,

mes, chargées de femences, ou la compresfion de ces femences; & enfuite, afin que les femences ne tombent pas avant leur maturité.

Je foufcrirois à ces idées, fi un examen reïteré des Champignons ne m'en avoit fourni d'autres. J'ai obfervé que ces Corpufcules diaphanes, entremêlés de toutes parts parmi les petites lames, naiffoient vers le tems de la fructification, & qu'ayant une petite roideur, ils aidoient par leur dévelopement fuccesfif, les petites lames, auparavant tout à fait fermées & bouchées, à fe dilater peu à peu, à s'eloigner les unes des autres, & à ouvrir leurs cavités pour laiffer entrer l'air, & recevoir la pousfiere feminale. Enfuite, quand le tems de la fleur eft paffé, tout le champignon fe dévelope, & les petites lames, couvertes auparavant de la pousfiere feminale, font alors tout enflées de la femence, qui prend des accroiffemens infenfibles, & elles s'eloignent l'une de l'autre, de maniere qu'elles n'ont plus befoin de ces corps. A' quoi il faut ajouter que ces Corps diaphanes de *Michelius*, alors extrêmement tendres & petits, ne touchent point les lames oppofées, & n'ont pas la force de les féparer l'une d'avec l'autre.

Il y a de plus quelques Champignons, auxquels la nature ne paroit point avoir donné les Corps diaphanes pour empêcher la chute prématurée des femences, puisque ces femences, lorsqu'elles font fécondes, & n'ont aucune maladie, font fi fortement emboëtées dans leur étui, qu'elles n'en tombent jamais, à moins que la morfure des infectes, ou quelque autre attaque exterieure, ne les en tirent.

Or les lames étant dans les Agarics les vrais réfervoirs de la fructification, fur la partie plane desquels tombe non feulement la femence mâle, mais où cette femence s'arrête dans des organes particuliers, aprés quoi s'enfuit la perfection de la femence fécondée; il eft manifefte que ces corps diaphanes de *Michelius*, environnés d'organes femelles, dont ils font par conféquent trés proches, & demeurant dams cette fituation, depuis que les parties qui fervent à la fructification, commencent a fe développer, jusqu'à la perfection de la femence, doivent être deftinés à un ufage beaucoup plus important. Et en effet les circonftances qu'on obferve, confirment que ces corps diaphanes ont été accordés

à quelques eſpeces de Champignons en faveur de la pousſiere ſeminale.

Ce ſont des organes ſecondaires, qui dans l'un & dans l'autre ſexe des plantes, aident beaucoup à faire fleurir; il y a pluſieurs fleurs plus parfaites, dans lesquelles ils ſe rencontrent, tant dans les piſtilles, ou organes feminins, que dans les capſules, ou organes maſculins. Ils s'y préſentent ſous toutes ſortes de figures; arrondis, anguleux, droits, d'une ſeule piece, avec des branches, roides, velûs, étendus, avec des feuïlles, ou des tuyaux, dans un état de contraction, réflêchis, crochus, inclinés d'un coté ou de l'autre, ou ſe portant de tous les cotés à la fois, &c.

Dans le piſtille ils occupent pour l'ordinaire cet organe particulier, ſur lequel ſe fait ſuivant les voyes de la nature la chute de la ſemence. Un exemple peut ſuffire pour tous, c'eſt celui de ce qui arrive à l'ouverture du ſtigmate, dans la fleur de melon, & de Lis blanc.

Dans le Lis blanc ce ſtigmate, qui eſt aſſez grand & triangulaire, ſe montre, pour ainſi dire, tout heriſſé de corps diaphanes aſſez conſiderables, qui ont leur direction en tout ſens, & qui environnent auſſi l'orifice ſuperieur de ſa cavité cylindrique. Ces corps reçoivent avec abondance dans leurs interſtices la pousſiere ſeminale qui eſt ſecouée par l'elaſticité des fibres, & il n'eſt pas rare qu'ils la retiennent jusqu'à la chute du piſtille entier.

Ajoutez que ce qui facilite merveilleuſement toute cette opération, c'eſt la figure même de la pousſiere ſeminale, qui eſt celle d'un globe oblong, ou ſphérique, & dont la ſurface eſt pour l'ordinaire toute heriſſée de pointes.

Il eſt vrai que les fruits de la plante avortent quelquefois, mais j'ai pourtant acquis dans le cours de cet Eté une pleine certitude de l'entrée de la ſemence mâle par le ſtigmate dans la cavité du *ſtyle*. Pour cet effet j'ai examiné tous les mois les piſtilles de pluſieurs Lis, & j'ai quelquefois vû la chute de la pousſiere ſur l'ouverture du piſtille blanc. Il en étoit presque tout couvert, & une partie de cette pousſiere, qui étoit adhérente à la ſuperficie des eminences papillaires diaphanes, ſe diſſipoit pour l'ordinaire au bout de trois ou quatre jours,

jours, excepté feulement la partie du ftigmate, où la pousfiere s'étoit infinuée plus profondément dans les interftices des corpufcules diaphanes.

Un feul de ces petits corpufcules, attrapant la cavité du *ftyle*, defcend plus bas que le milieu, vers le fein de l'ovaire. Sa figure s'y change tellement qu'il femble détruit, & l'ovaire de fon coté acquiert une autre forme en fe gonflant.

J'ai encore trouvé cette année une autre efpece de Corps diaphanes, qui eft plus épaiffe, & arrondie vers le bas, au lieu qu'elle eft pointuë vers le haut. C'eft dans la capfule du melon que je l'ai obfervée, au moment même où s'executoit l'acte de la profufion feminale.

La capfule eft formée par un corps cylindrique & droit, qui eft comme couvert par une ligne qui fait divers tours de haut embas, & de bas en haut, & qui eft chargée de farine. Les corpufcules diaphanes, tantot en plus grande, tantot en moindre quantité, s'elevent comme des coins hors des cavités de cette ligne farineufe, & en perçant les bords des lames de cette ligne, ils les irritent peu à peu, les piquent, & les difpofent à une rupture fubite. C'eft ce qui produit la difperfion rapide de la femence, parce que les bords des lames, picotés par les eminences papillaires, éclatent avec un certain degré d'elafticité.

Mes Obfervations fe bornent ici, & je n'ai garde de rien affirmer au delà de ce que j'ai vû. C'eft la reffemblance des corps diaphances de *Michelius*, dans les *Agarics* de *Linnæus*, avec les autres eminences papillaires, qui naiffent dans les capfules & dans les piftilles des fleurs plus parfaites; c'eft, dis-je, cette reffemblance qui m'a principalement conduit aux conjectures que je viens de propofer.

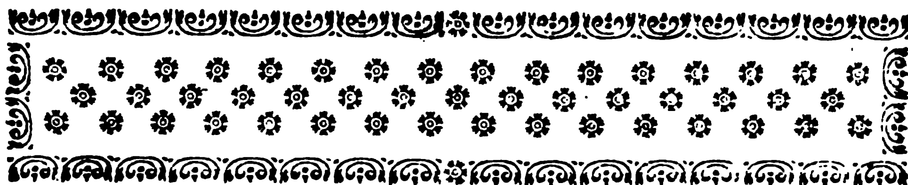


ME-

MEMOIRES
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES.

CLASSE DE MATHEMATIQUE.





SUR LA VIBRATION DES CORDES,

PAR M. EULER.

Traduit du Latin.

I.



Uoique tout ce que Mrs. *Taylor*, *Bernoulli*, & quelques autres, ont dit & découvert jusqu'à present au sujet du mouvement vibratoire des cordes, semble avoir épuisé la matiere, il y reste néanmoins une double limitation, qui la restreint tellement, qu'à peine y a-t-il aucun cas, où l'on puisse déterminer le veritable mouvement d'une corde en vibration. Car d'abord, ils ont supposé que les cordes tenduës faisoient seulement des vibrations quasi infiniment petites, en sorte que dans ce mouvement, la corde, soit qu'elle ait une situation droite, ou courbe, peut pourtant être censée conserver toujours la même longueur. L'autre limitation consiste, en ce qu'ils ont supposé toutes les vibrations régulieres, prétendant que dans chaque vibration la corde entiére, & tout à la fois, s'etend directement, & cherchant hors de cette situation sa figure courbe, qu'ils ont trouvé être une trochoïde prolongée à l'infini.

II. A' la verité la premiere limitation, par laquelle les vibrations de la corde sont regardées comme infiniment petites, quoique réellement elles conservent toujours une raison finie à la longueur de la

corde, cela ne dérange presque en rien les conclusions qu'on en tire, parce qu'en effet ces vibrations sont pour l'ordinaire si petites, qu'elles peuvent être prises pour infiniment petites, sans qu'il en résulte d'erreur sensible. D'ailleurs on n'a pas encore poussé assez loin, ni la Mechanique, ni l'Analyse, pour être en état de déterminer les mouvemens dans les vibrations finies. A l'egard de l'autre limitation, qui suppose toutes les vibrations régulieres, on tâche de la défendre en disant, que bien qu'elles s'ecartent de cette loi au commencement du mouvement, elles ne laissent pas de s'assujettir au bout d'un trés court espace de tems à l'uniformité, de sorte qu'à chaque vibration la corde s'étend tout à la fois, & ensemble en ligne droite, affectant hors de cette situation la figure d'une trochoïde prolongée.

III. Il est effectivement prouvé d'une maniere suffisante, que si une seule vibration est conforme à cette régle, toutes les suivantes doivent l'observer aussi, On voit en même tems par là, comment l'etat des vibrations suivantes dépend des précedentes, & peut être déterminé par elles; comme réciproquement, par l'etat des suivantes, on peut conclure la disposition de celles qui ont precedé. C'est pourquoi, si les vibrations suivantes sont régulieres, il ne sera en aucune maniere possible que les précedentes se soient écartées de la régle; d'où résulte aussi évidemment, que si la premiere vibration a été irréguliere, les suivantes ne peuvent jamais parvenir à une parfaite régularité. Or la premiere vibration dépend de notre bon plaisir, puisqu'on peut, avant que de lacher la corde, lui donner une figure quelconque; ce qui fait que le mouvement vibratoire de la même corde peut varier à l'infini, suivant qu'on donne à la corde telle ou telle figure au commencement du mouvement.

IV. De là naît donc la Question suivante, dans laquelle toute cette recherche est comprise.

Si une corde d'une longueur, & d'une masse donnée, est tenduë par une force, ou un poids donné; qu'au lieu de la situation droite, on lui donne une figure quelconque, qui ne differe cependant de la droite qu'infiniment peu, & qu'ensuite on la lache tout à coup; déterminer le mouvement vibratoire total, dont elle sera agitée,

M. d'A-

M, d'Alembert s'eſt attaché le premier, avec un ſuccés des plus heureux, à l'examen de ce Problême, ſi difficile tant dans la Mecanique que dans l'Analyſe, & il en a communiqué à notre Academie une trés belle ſolution. Mais, comme dans ces diſcuſſions ſublimes on tire ſouvent un fruit fort conſiderable de la comparaiſon de pluſieurs ſolutions differentes du même problême, je ne balance point à propoſer celle que j'ai trouvée ſur cette queſtion. Quoiqu'elle ne differe pas beaucoup de celle de M. d'Alembert; cependant la grande étenduë de ce ſujet fait que je me perſuade d'avoir ajouté quelques obſervations aſſez intereſſantes dans l'application des formules générales.

V. Je commencerai donc par propoſer le Problême d'une façon bien nette, afin qu'il paroiſſe quels ſecours on a beſoin de tirer, tant de l'Analyſe que de la Mecanique, pour arriver à la ſolution. Soit donc la corde propoſée A B, fixement attachée à ſes extremités A & B, & tenduë ſuivant la direction A F par une force quelconque, comme cela ſe fait ordinairement dans les Inſtrumens de Muſique. Que cette corde ſoit partout d'une égale épaiſſeur, & qu'on appelle

ſa longueur A B $= a$

ſa maſſe, ou ſon poids $= M$

& que la force tendante A F ſoit égale à un poids $= F$. Fig. 1.

Qu'alors on faſſe paſſer cette corde de ſon état naturel A B à un etat de courbure quelconque A L *l* B, qui pourtant ne differera qu'infiniment peu de l'etat naturel droit A B, de maniere que la longueur A L *l* B ne ſurpaſſe pas ſenſiblement la longueur A B; & que cette figure A L *l* B donnée d'abord à la corde, ſoit connuë. On demande, en ſuppoſant que la corde ſoit lachée ſubitement de cet état, quel mouvement elle aquerra, & quelles ſeront les vibrations qu'elle fera?

VI. Auſſi-tot donc que la corde ſera lachée de ſon etat A L *l* B, la force tendante la preſſera d'abord vers la ſituation naturelle A B, que tous ſes points atteindront, ou à la fois, ou en divers momens: par conſéquent, la corde changera continuellement de figure, & tous ſes points participeront au mouvement vibratoire, jusqu'à ce que la réſiſtan-

résistance ait calmé toute l'agitation. Or pour connoitre parfaitement en quoi consiste ce mouvement, il suffira d'avoir assigné pour chaque tems l'etat de la corde, c'est à dire, sa figure. Car, tandis que d'un coté on définit le changement de figure par la succession instantanée, on détermine en même tems de l'autre la vitesse de chaque point de la corde, & ainsi on parvient à la connoissance de tout le mouvement. Il ne sera donc pas besoin dans cette recherche de faire attention aux vîtesses de chacun des points de la corde; ce qui diminuë considerablement la difficulté de cette solution.

VII. Puisque nous avons supposé, que la longueur de la corde ne souffre aucun changement, tandis qu'elle revêt successivement toutes ces figures, en sorte que $ALlB = AB$, il en résulte qu'en menant les appliquées quelconques PL, pl, normales à l'axe AB, les arcs AL, Al seront égaux aux abscisses AP, Ap; & par conséquent les appliquées PL, pl, seront comme infiniment petites à l'egard des abscisses. Par conséquent, si l'on appelle l'abscisse $AP = x$, l'appliquée PL sera infiniment petite en comparaison de x, & l'arc même AL sera $= x$; d'où l' on aura $Pp = Ll = dx$. Cela fait comprendre, que lorsque la corde reçoit diverses figures successives, chacun de ses points L se meut perpetuellement selon la direction de l'appliquée LP, en sorte que chaque appliquée LP représente le chemin, par lequel le point L de la corde s'approche de l'etat naturel AB: mais alors, à cause du mouvement reçu, suivant la même direction normale à AB, il tendra du coté opposé.

VIII. Aprés avoir fait ces remarques, posons qu'au bout du tems t la corde soit arrivée à la situation $AMmB$, ayant quitté sa situation primitive $ALlB$, de sorte que le point L soit parvenu en M. En supposant donc l'abscisse quelconque $AP = x$, qui exprime en même tems la longueur de l'arc AM, soit l'appliquée dans cette courbe AMB répondante à $PM = y$; & parce que cette courbe AMB dépend du tems écoulé $= t$, y sera une fonction des deux variables x & t; en sorte qu'en posant $t = o$, la valeur de y fournisse l'appliquée de la courbe primitive ALB. Or il est clair que si l'on connoit la nature de cette fonction de x & t, qui exprime la quantïté de l'appliquée y, on

y, on peut par son moyen assigner la figure même de la corde pour un tems quelconque t; & de plus on conclura aisément de sa mutabilité le mouvement de toute la corde.

IX. Ainsi y etant une fonction de x & t, son differentiel aura une forme telle, $dy = pdx + qdt$, laquelle formule comprend non seulement la variabilité de y par la courbe AMB, mais encore eu égard au tems qui s'ecoule. En effet, si le tems t est etabli constant, ou $dt = o$, l'equation $dy = pdx$ exprimera la nature de la courbe AMB; mais si l'abscisse x est supposée constante, ou $dx = o$, l'equation $dy = qdt$ définira le mouvement du point L pour tout le tems que le mouvement de la corde dure, parce que par elle on peut assigner pour un tems quelconque t ecoulé depuis le commencement, le lieu M, auquel le point L sera parvenu. Or p & q seront de nouveau des fonctions de x & t, dont les differentiels, en posant x & t l'une & l'autre variable, soient,

$$dp = rdx + sdt \text{ \& } dq = sdx + udt.$$

Car il est constant par la nature des differentiels, que l'element dt en dp, & l'element dx en dq, doivent avoir un coëfficient commun.

X. Comme il s'agit présentement de déterminer le mouvement de la corde par les forces sollicitantes, soit la force acceleratrice, par laquelle le point M de la corde est acceléré vers l'axe AB $=$ P, & il est clair que toutes ces forces, par lesquelles chacun des élemens de la corde est pressé vers l'axe AB, prises ensemble doivent être équivalentes à la force, par laquelle la corde est actuellement tenduë, & que nous avons posée AF $=$ F; ou bien, si nous concevons des forces contraires & égales à P, appliquées suivant ML dans chacun des points M de la corde, alors elles devront se trouver en équilibre avec la force qui tend la corde AF $=$ F, & par cette proprieté on pourra déterminer la veritable force acceleratrice P, par laquelle chaque élément Mm de la corde est actuellement sollicité.

XI. La masse, ou le poids de toute la corde etant $=$ M, & se distribuant également par toute la longueur AB, le poids de la portion AP, ou AM, sera $= \frac{Mx}{a}$, & par conséquent le petit poids de

l'elé-

l'elément $Mm = dx$ fera $= \frac{M\,dx}{a}$; lequel etant follicité fuivant ML par la force accelératrice $= P$, la force motrice de cet élément fera $= \frac{M\,dx}{a} P$, & la fomme de toutes les forces motrices par l'arc AM fera $= \frac{M}{a} \int P\,dx$. Mais parce que le point A eft fuppofé fixe, il eft permis de concevoir une certaine force $AG = G$, qui lui foit appliquée dans la direction AG normale à AB, & affez grande, pour que le point A foit confervé en repos. Ces chofes etant pofées, la theorie de l'equilibre des forces appliquées à un fil parfaitement fléxible, fournira l'equation fuivante:

$$Fy - Gx + \frac{M}{a} \int dx \int P\,dx = o$$

ou Fy & Gx font les momens des forces F & G à l'egard du point M, & $\frac{M}{a} \int dx \int P\,dx$ eft la fomme de tous les momens des forces élémentaires à l'egard du même point M.

XII. Que l'on confidere à préfent la courbe AMB, que la corde forme dans ce moment, dont la nature fera exprimée par les formules données ci-deffus, fi le tems t eft pris conftant, ou $dt = o$, & par confequent on aura $dy = p\,dx$, & $dp = r\,dx$. Par là l'equation que l'etat d'équilibre a fait trouver, étant differentiée, & en pofant $p\,dx$, au lieu de dy, donnera divifée par dx

$$Fp - G + \frac{M}{a} \int P\,dx = o.$$

Qu'on differentie de nouveau cette équation, en pofant $r\,dx$ pour dp, & en divifant par dx, on obtiendra $Fr + \frac{M}{a} P = o$; d'où l'on tire la force accelératrice P du point M fuivant la direction

MP,

MP, savoir $P = -\frac{Far}{M}$. C'est pourquoi si la courbe AMB étoit connuë, on pourroit déterminer par sa nature la force accélératrice de chacun des élémens.

XIII. Considerons à présent le mouvement du seul point M, par lequel il s'approche de P, étant sollicité par la force accélératrice P, & l'abscisse $AP = x$ doit être censée invariable. Or comme à cause de $dx = o$, il y a l'increment momentané de l'appliquée PM, $dy = qdt$ & $dq = udt$, dans le petit tems dt le point M s'approche de P par le petit espace $= -qdt$, dont le differentiel en posant l'element du tems dt, constant, sera $= -dqdt = -udt^2 = -ddy$. Mais, de l'accélération qui naît de la force P par les principes mecaniques on déduit cette équation $P = -\frac{2ddy}{dt^2} = -2u$, si l'on expose, comme c'est la coutume l'elément du tems dt par l'élément de l'espace appliqué à la vitesse, & que la vitesse elle même soit répresentée par la racine quarrée de la hauteur duë à cette vitesse. Ainsi, puisque nous avons trouvé $P = -\frac{Far}{M}$ aussi bien que $P = -2u$, il en résultera $2u = \frac{Far}{M}$ ou $u = \frac{Far}{2M}$.

XIV. Ces deux conditions, que nous avons rappellées au calcul, renferment toute la Question proposée; & par conséquent, si un tems quelconque t étant ecoulé, on pose pour un point quelconque M de la corde l'abscisse $AP = x$, & l'appliquée $PM = y$, celle-ci s'exprimera par une fonction de x & t, telle qu'en posant $dy = pdx + qdt$, le caractere des fonctions p & q se tirera de ces formules

$$dp = rdx + sdt, \ \& \ dq = sdx + \frac{Fa}{2M} rdt.$$

La question mecanique proposée se réduit donc à ce probléme analytique, de chercher des fonctions r & s de x & t, telles que ces

ces formules differentielles $r\,dx + s\,dt$, & $s\,dx + \frac{2M}{Fa} r\,dt$, deviennent intégrables. Car de semblables fonctions étant trouvées pour r & s, on pourra assigner les valeurs $p = \int (r\,dx + s\,dt)$ & $q = \int (s\,dx + \frac{Fa}{2M} r\,dt)$, d'où l'on inferera ensuite la valeur de l'appliquée même $y = \int (p\,dx + q\,dt.)$

XV. Ce Problême analytique consideré en soi est extrêmement indéterminé; ainsi, pour l'accommoder à quelque cas qui se présenteroit, il faut faire les remarques suivantes. Premierement dans les intégrations, il faut régler les constantes de maniere qu'en posant $x = o$, quelle que soit la valeur qu'on attribuë à t, on ait toujours $y = o$. Ensuite, on doit en faire autant dans le cas de $x = a$. Troisiémement, ces précautions étant prises, d'entre les fonctions infinies r & s, qui satisfont aux conditions ci-dessus exprimées; on doit pour chaque cas proposé choisir celles, qui en posant $t = o$, font que la valeur de l'appliquée y qui en résulte, fournit cette courbure arbitraire, que l'on avoit donnée à la corde au commencement du mouvement. Cela étant executé, il ne restera plus dans la solution aucune constante indéterminée, & le vrai mouvement de la corde pourra être répresenté d'une maniere absoluë.

XVI. Afin donc que la figure initiale de la corde puisse être réglée arbitrairement, la solution doit avoir la plus grande étenduë. C'est pourquoi, la recherche devant commencer par ces formules $dp = r\,dx + s\,dt$, & $dq = s\,dx + \frac{Fa}{2M} r\,dt$, on doit découvrir en général toutes les valeurs possibles pour r & s, qui rendent ces formules intégrables ensemble. Multiplions pour cet effet ces formules à part par les constantes m & n, & ajoutons les produits, de maniere que soit

$$m\,dp + n\,dq = dx\,(mr + ns) + dt\,(ms + \frac{Fa}{2M} nr)$$

cette

cette formule doit être encore intégrable, quelles que soient les valeurs constantes attribuées aux lettres m & n. Qu'on fasse donc $m:n = \frac{Fa}{2M} n:m$, ou $mm = \frac{Fa}{2M} nn$, d'où vient $m = 1$ & $n = \pm \sqrt{\frac{2M}{Fa}}$, & l'on aura $dp \pm dq \sqrt{\frac{2M}{Fa}} = (dx \pm dt \sqrt{\frac{Fa}{2M}}) (r \pm s \sqrt{\frac{2M}{Fa}})$.

XVII. Pour abréger, soit $\frac{Fa}{2M} = b$, & l'on aura

$dp \pm dq \sqrt{\frac{1}{b}} = (dx \pm dt \sqrt{b}) (r \pm s \sqrt{\frac{1}{b}})$, ou
$dp \sqrt{b} \pm dq = (dx \pm dt \sqrt{b}) (r \sqrt{b} \pm s)$ ou aussi
$dq \pm dp \sqrt{b} = (dx \pm dt \sqrt{b}) (s \pm r \sqrt{b}.)$
Comme donc cette formule $(dx \pm dt \sqrt{b}) (s \pm r \sqrt{b})$ doit être intégrable, il est nécessaire que $s \pm r \sqrt{b}$ soit une fonction de $x \pm t \sqrt{b}$. Posons, pour tenir compte de l'un & de l'autre signe

$$x + t\sqrt{b} = v \qquad x = \frac{v+u}{2}$$
& il sera
$$x - t\sqrt{b} = u \qquad t\sqrt{b} = \frac{v-u}{2}$$

& nous aurons ces équations:
$dq + dp\sqrt{b} = dv\,(s + r\sqrt{b})$ & $dq - dp\sqrt{b} = du\,(s - r\sqrt{b})$
où il faut que $s + r\sqrt{b}$ soit une fonction de v, & $s - r\sqrt{b}$ une fonction de u; car autrement l'intégration ne reüssiroit pas.

XVIII. Cette double intégration étant donc faite, $q + p\sqrt{b}$ deviendra $=$ à une fonction de v, & $q - p\sqrt{b} =$ à une fonction de u. Soit donc, pour donner une pleine etenduë à la solution,

V fonction quelconque de $v = x + t\sqrt{b}$.
U fonction quelconque de $u = x - t\sqrt{b}$,
& l'on satisfera aux conditions rapportées, en posant

$$q + p\sqrt{b} = V \quad \text{d'où se fait} \quad q = \frac{V + U}{2}$$
$$q - p\sqrt{b} = U \qquad\qquad p = \frac{V - U}{2\sqrt{b}}.$$

Comme donc $dy = p\,dx + q\,dt$, on aura en substituant à p & q, de même qu'à dx & dt les valeurs trouvées

$$dy = \frac{(dv + du)(V - U)}{4\sqrt{b}} + \frac{(dv - du)(V + U)}{4\sqrt{b}},$$

qui aprés l'evolution fournit

$$dy = \frac{V\,dv - U\,du}{2\sqrt{b}} \;\&\; y = \frac{1}{2\sqrt{b}}(\textstyle\int V\,dv - \int U\,du).$$

XIX. Or $\int V.dv$ sera fonction de $v = x + t\sqrt{b}$, & $\int U\,du$ fonction de $u = x - t\sqrt{b}$, b etant $= \frac{Fa}{2M}$; d'où, si l'on employe les caracteres f & Φ pour indiquer des fonctions quelconques des quantités, devant lesquelles on les met, nous aurons l'expression générale suivante pour l'appliquée y, qui représente sa quantité pour un tems quelconque t, ecoulé depuis le commencement, & pour une abscisse quelconque x

$$y = f:(x + t\sqrt{b}) + \Phi:(x - t\sqrt{b}).$$

Car pour retourner sur nos pas, & faire un essai sur la formule $dy = p\,dx + q\,dt$ on aura les valeurs suivantes p & q:

$$p = f':(x + t\sqrt{b}) + \Phi':(x - t\sqrt{b})$$
$$q = \sqrt{b}\,(f':(x + t\sqrt{b}) - \Phi':(x - t\sqrt{b})).$$

& au lieu des formules $dp = r\,dx + s\,dt$ & $dq = s\,dx + b\,r\,dt$, on aura, comme la nature de la chose le demande,

$$r = f''.(x + t\sqrt{b}) + \Phi''.(x - t\sqrt{b})$$
$$s = \sqrt{b}.(f''.(x + t\sqrt{b}) - \Phi''.(x - t\sqrt{b}))$$

pourvu

pourvu que nous marquions le differentiel de la fonction $f: z$ par $dz f': z$, & le differentiel de la fonction $f': z$ par $dz f'': z$.

XX. Jusqu'à present les caracteres f & φ, dans l'equation

$$y = f: (x + t \sqrt{b}) + \varphi: (x - t \sqrt{b})$$

signifient des fonctions quelconques, qui different en raison de la composition, & leur relation se determine davantage par les autres conditions. Car comme en posant $x = o$, on doit toujours avoir $y = o$, il doit etre $f: (+ t \sqrt{b}) + \varphi (- t \sqrt{b}) = o$, & par consequent $\varphi (- t \sqrt{b}) = - f: (t \sqrt{b})$. Or alors, parce qu'en posant $x = a$, la valeur de y doit pareillement evanoüir, on aura aussi $f: (a + t \sqrt{b}) + \varphi: (a - t \sqrt{b}) = o$; & ainsi la nature des fonctions f & φ doit etre définie de maniere qu'elle satisfasse à ces conditions.

$$\varphi: - t \sqrt{b} = - f: t \sqrt{b}$$

$$\varphi: (a - t \sqrt{b}) = - f: (a + t \sqrt{b})$$

XXI. Comme $f: z$ peut être representé en général par l'appliquée d'une certaine courbe, dont l'abscisse est z, soit A M B la courbe dont les appliquées PM fournissent les fonctions des abscisses A P qui sont désignées par le caractere f: en sorte que P M soit $= f: t \sqrt{b}$; auquel $\varphi: - t \sqrt{b}$ devant être negativement égal, qu'on prenne A p $=$ A P, de sorte que A p $= t \sqrt{b}$; & en posant la courbe Amb au dessous de l'axe de la courbe semblable A M B, on aura pm $= - f: t \sqrt{b} = \varphi: - t \sqrt{b}$. Donc la courbe Amb semblable à la courbe AMB exposera la nature de l'autre fonction φ. Alors la courbe AMB existant d'une maniere semblable au delà de B, soit AB $= a$ continué au dessous de l'axe, afin que la portion BNa soit semblable & égale à la courbe BnA, & en prenant BQ $=$ Bq, on aura AQ $= a + t \sqrt{b}$, QN $= f: (a + t \sqrt{b})$, & pareillement à cause de Aq $= a - t \sqrt{b}$, il sera qn $= f: (a - t \sqrt{b})$ d'où il paroit qu'une courbe de cette forme AMB, qui est continuée de part & d'autre à l'infini par des parties semblables & égales à elle même Am b, BNa, & qui soient situées alternativement en haut & en bas, est propre à représenter la nature de l'une & l'autre fonction f & φ. Fig. 1.

XXII. Ayant

XXII. Ayant donc décrit une ſemblable courbe anguiforme, ſoit réguliere, contenüe dans une certaine équation, ſoit irreguliere, ou méchanique, ſon appliquée quelconque PM fournira les fonctions, dont nous avons beſoin pour la ſolution du Problême. En effet ſi l'on poſe une abſciſſe quelconque $AP = z$, on aura l'appliquée $PM = f: z$. De là donc, en attribuant à l'abſciſſe z, les valeurs $x + t\sqrt{b}$ & $x - t\sqrt{b}$, on aura $y = f: (x + t\sqrt{b}) + f: (x - t\sqrt{b})$; en conſéquence de quoi on pourra aſsigner pour un tems quelconque dans la corde vibrante l'appliquée y, qui convient pour une abſciſſe quelconque. Or poſons $t = o$, pour obtenir la courbe initiale de la corde, & l'on aura $AP = x$, & l'appliquée dans la corde vibrante $y = f: x = 2\,PM$; ou, parce qu'il eſt permis de prendre les moitiés des fonctions ſuperieures, en ſorte que

$$y = \tfrac{1}{2} f: (x + t\sqrt{b}) + \tfrac{1}{2} f: (x - t\sqrt{b})$$

la courbe même AMB répréſentera la figure donnée à la corde au commencement du mouvement.

XXIII. Réciproquement donc, s'il y a une courbe donnée, ou figure, que la corde ait reçüe au commencement, on pourra en tirer la détermination de la figure de la corde pour un tems quelconque écoulé depuis le commencement. Car, en décrivant au deſſus de l'axe $AB = a$, qui ſoit égal à la longueur de la corde, la figure initiale de la corde AMB, qu'on la repete de part & d'autre en ſituation inverſe, en ſorte que $Amb = AMB$ & $BNa = BnA$, & que l'on conçoive la répetition continuelle de cette courbe de part & d'autre à l'infini ſuivant la même loi. Alors, ſi cette courbe eſt employeé pour exprimer les fonctions trouvées, aprés un tems écoulé $= t$ l'appliqueé qui répondra à l'abſciſſe x, dans la corde en vibration ſera:

$$y = \tfrac{1}{2} f: (x + t\sqrt{b}) + \tfrac{1}{2} f: (x - t\sqrt{b})$$

d'où l'on pourra recueillir aiſément la conſtruction de la courbe, que la corde forme dans un tems quelconque.

XXIV. Mais afin que cette formule ne paroiſſe pas renfermer des quantités heterogenes, il faut remarquer que $t\sqrt{b}$ eſt répreſenté par une ligne droite, & eſt par conſéquent homogene à x. Car, ſoit z la hauteur

hauteur de laquelle un corps pesant tombe dans le tems t, en donnant l'expression du tems de la maniere indiquée ci-dessus, on aura $t = 2\sqrt{z}$; & ainsi au lieu de t, on pourra écrire $2\sqrt{z}$, & réciproquement par la hauteur z on connoitra le tems t écoulé depuis le commencement du mouvement. Donc $t\sqrt{b}$ sera $= 2\sqrt{bz} = 2\sqrt{\frac{Faz}{2M}} = \sqrt{\frac{2Faz}{M}}$, & par conséquent sera exprimé par une ligne droite. Or posons, pour abréger, $\sqrt{\frac{2Faz}{M}} = v$, en sorte que la valeur de v puisse être assigneé pour un tems quelconque, & aprés le tems écoulé, pendant lequel un corps pesant tombe par la hauteur $= z$, on aura

$$y = \tfrac{1}{2}f:(x+v) + \tfrac{1}{2}f:(x-v)$$

XXV. Si l'on a donc donné au commencement la figure AMB à la corde $AB = a$, & que sa répétition ait ensuite formé la ligne courbe anguiforme $n'bAMBaN$, la figure que la corde doit avoir au bout du tems t, pendant lequel un corps pesant tombe par la hauteur $= z$, sera ainsi définie. De cette hauteur z connüe qu'on cherche la valeur $v = \sqrt{\frac{2Faz}{M}}$, & qu'en proposant l'abscisse quelconque $AP = x$, on prenne de part & d'autre $PQ = Pq = v$, en menant aux points Q & q les appliquées QN & qn, on aura à cause de $QN = f:(x+v)$ & de $qn = f:(x-v)$, l'appliquée qui répond à l'abscisse $AP = x$ de la corde, $y = \tfrac{1}{2}QN + \tfrac{1}{2}qn$; ou bien, qu'on prenne $Pm = \frac{QN + qn}{2}$, m étant le lieu du point M, & si l'on employe cette construction pour tous les points de l'axe AB, les points m donneront la figure présente de la corde AmB. De cette maniere la figure, que la corde prend dans les vibrations, sera facilement décrite pour un tems quelconque.

 XXVI.

XXVI. Cherchons la figure de la corde, aprés qu'il sera écoulé un tems tel que v soit $= a$, ou $z = \frac{M a}{2 F}$, & cela donnera

$$y = \tfrac{1}{2} f: (x + a) + \tfrac{1}{2} f: (x - a)$$

Or par la nature de la courbe décrite $f: (x - a)$ sera $= -f: (a - x)$ & $f: (a + x) = -f: (a - x)$ d'où résultera

$$y = - f: (a - x)$$

ce qui fait voir que la corde sera plieé toute entiere au dessous de l'axe, & prendra la figure $AM'B$ égale à la figure donnée AMB, mais posée en situation inverse; de sorte qu'en prenant l'abscisse $BP' = AP$, l'appliquée sera $P'M' = PM$. Et de là réciproquement, s'il s'ecoule de nouveau un tems égal t, d'où résulte $v = a$, toute la corde retournera à la situation AMB, qui lui avoit été donnée au commencement; ce qui se déduit aussi de ce que s'etant écoulé depuis le commencement un tems, d'où se fait $v = 2a$, il en résulte,

$$y = \tfrac{1}{2} f: (x + 2a) + \tfrac{1}{2} f: (x - 2a)$$

Mais en prenant $PQ' = Pq' = 2a$, par la nature de la courbe $Q'N'$ sera $= PM = q'n'$, & par conséquent $y = PM$, comme au commencement du mouvement.

XXVII. Quelle que soit donc la figure donnée d'abord à la corde, elle la reprend à chacune des vibrations, autant que le permet la diminution causée par la résistance; ce qui fait voir bien clairement qu'il n'y a aucune vérité dans l'opinion rapportée ci-dessus, savoir que les vibrations de la corde, quelque irreguliéres qu'elles ayent été d'abord, rentrent aussi-tot aprés dans l'uniformité, de maniere que la figure dégénere en une trochöide prolongée. Cependant il n'est pas moins clair, que quelle que soit la figure de la corde en vibration, les vibrations ne laisseront pas d'etre assez régulieres; car comme, en posant $v = 2a$, la corde retourne à son premier etat, elle doit etre censée avoir fait pendant ce tems là deux vibrations; & par conséquent on définira de la valeur $v = a$ le tems d'une vibration, qui sera égal au tems pendant lequel un corps pesant tombe par

la

la hauteur $\frac{Ma}{2F}$; ou, si l'on exprime la longueur de la corde AB $= a$ en milliemes de pieds de Rhin, le tems d'une vibration exprimé en secondes sera $= \frac{1}{125} \sqrt{\frac{Ma}{2F}}$, où la corde fera autant de vibrations à chaque seconde, que cette expression $125 \sqrt{\frac{2F}{Ma}}$ contiendra d'unités, tout comme si la corde achevoit ses vibrations suivant la loi d'uniformité décrite par *Taylor*.

XXVIII. Comme la figure AMB donnée au commencement à la corde, fournit sa premiere & plus grande excursion, de même une vibration étant achevée, la corde se trouvera dans l'autre excursion la plus grande AM'B, que nous avons fait voir être égale à la premiere inverse. Voyons donc à present, si dans le milieu du tems qu'emportent ces deux vibrations, la corde se tend d'une maniere parfaitement droite, & reprend la situation naturelle, ou non? Puisque du tems d'une vibration naît $v = a$, posons pour le moment du milieu $v = \frac{1}{2} a$, & l'on aura de la formule génerale

$$y = \tfrac{1}{2} f : (x + \tfrac{1}{2} a) + \tfrac{1}{2} f : (x - \tfrac{1}{2} a)$$

dont la valeur evanouïra, si $f : (\frac{1}{2} a - x)$ est $= f : (\frac{1}{2} a + x)$ c'est à dire, si la figure ADB donnée au commencement à la corde est telle qu'aux abscisses $\frac{1}{2} a + x$ & $\frac{1}{2} a - x$ répondent des appliquées égales; ce qui arrive si l'appliquée CD dressée au point du milieu C de la longueur AB est un diametre de la courbe ADB, & que la partie DB soit semblable & égale à la partie DA. Toutes les fois donc que la courbe initiale a cette proprieté, tout autant de fois la corde s'etend en ligne droite au milieu de chaque vibration; & comme cela peut arriver en nombre innombrable de manieres, il est manifeste que cette condition elle-même ne requiert pas, que la corde prenne perpetuellement dans ses vibrations la figure d'une trochoïde prolongée. Fig. 1.

XXIX. Or, bien qu'à considerer la chose en général, les tems des vibrations ne dépendent pas de la figure que prend la corde vibrante,

L 2 mais

Fig. 3. mais qu'ils se déterminent par les seules quantités *a*, M & F, dont la premiere *a* dénote la longueur de la corde, M le poids de la corde, & F le poids égal à la force qui tend ; cependant il y a des cas singuliers, dans lesquels les tems des vibrations peuvent être réduits à la moitié, au tiers, au quart, ou même à une partie aliquote quelconque de toute la longueur. Car, si toute la longueur de la corde étoit A *a* = *a*, & qu'elle se courbât au commencement, de maniere qu'elle fit deux parties AMB & B *a*, qui fussent parfaitement semblables & égales entr'elles, elle fera alors ses vibrations, comme si elle n'avoit que la demie longueur AB, & par conséquent ces vibrations seront deux fois plus rapides. De même, si la figure initiale de la corde avoit trois parties semblables & égales *b* AB *a*, comme elles sont représentées dans la figure, la corde alors fera ses vibrations, comme si sa longueur étoit trois fois moindre, & chaque vibration deviendra trois fois plus courte ; par où l'on comprend assez, comment ces mêmes vibrations peuvent devenir quatre fois, cinq fois &c. plus courtes.

XXX. Ayant ainsi donné la solution générale, comprenons y encore quelques cas, auxquels la courbe anguiforme Fig. 3. est une courbe continuë, dont les parties soient liées en vertu de la loi de de continuité, de maniere que sa nature puisse être comprise par une équation. Et d'abord il est constant, que ces courbes, puisqu'elles sont coupées par l'axe en une infinité de points, seront transcendentes. En posant la longueur de la corde AB = *a*, & une abscisse quelconque AB = *u*, soit 1 : π, comme le diametre du cercle à la circonference, & il est manifeste que l'equation suivante, exprimée par les sinus, fournit une courbe requise ;

$$PM = \alpha \sin \frac{\pi u}{a} + \beta \sin \frac{2\pi u}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi u}{a} + \delta \sin \frac{4\pi u}{a} + \&c.$$

Car si, au lieu de *u*, on pose ou *a*, ou 2 *a*, ou 3 *a*, ou 4 *a* &c. l'appliquée PM evanoüit, & en posant *u* negatif, l'appliquée elle même se change en son négatif. Si donc la courbe AMB étoit la figure primitive de la corde, au bout du tems *t*, pendant lequel le corps pesant

sant descend par la hauteur $= z$, en posant $v = \sqrt{\frac{2 F a z}{M}}$, à l'abscisse x dans la figure de la corde répondra l'appliquée y, de sorte qu'on aura :

$$y = + \tfrac{1}{2} \alpha \sin \frac{\pi}{a}(x + v) + \tfrac{1}{2} \beta \sin \frac{2\pi}{a}(x + v) + \tfrac{1}{2} \gamma \sin \frac{3\pi}{a}(x + v) \text{ \&c.}$$

$$+ \tfrac{1}{2} \alpha \sin \frac{\pi}{a}(x - v) + \tfrac{1}{2} \beta \sin \frac{2\pi}{a}(x - v) + \tfrac{1}{2} \gamma \sin \frac{3\pi}{a}(x - v) \text{ \&c.}$$

XXXI. Or comme $\sin(a + b) + \sin(a - b)$ est $= 2 \sin a \cos b$, cette équation se transformera en cette forme :

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi v}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi v}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{3\pi v}{a} \text{ \&c.}$$

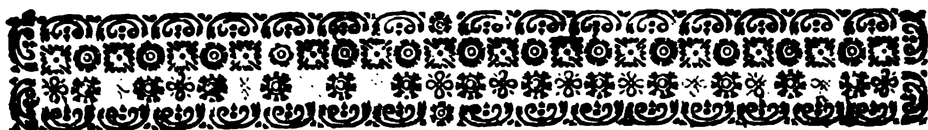
& la figure primitive de la corde sera exprimée par cette équation,

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \text{ \&c.}$$

laquelle revient la même, toutes les fois que v devient ou $2a$, ou $4a$, ou $6a$ &c. Mais si v est ou a, ou $3a$, ou $5a$ &c. la figure de la corde sera

$$y = - \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} - \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \text{ \&c.}$$

où il faut remarquer que si β est $= 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, &c. il en résulte le cas qu'on croit communément être le seul qui ait lieu dans la vibration des cordes, savoir $y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi v}{a}$, dans lequel la courbure de la corde est perpetuellement la ligne des sinus, ou une trochoïde prolongée à l'infini. Mais si le seul terme β, ou γ, ou δ, &c. s'y trouve, cela forme des cas où le tems de la vibration est moindre, ou du double, ou du triple, ou du quadruple &c.



SUR L'ACCORD
DES DEUX DERNIERES ECLIPSES DU SOLEIL ET DE LA LUNE AVEC MES TABLES POUR TROUVER LES VRAIS MOMENS DES PLENI-LUNES ET NOVI-LUNES,

PAR M. EULER.

I.



* Voy. les *Memoires de 1747. p. 250. & suiv.*

Mon calcul, que j'ai exposé dans un Mémoire * précedent, pour l'Eclipse du Soleil, que nous avons vuë ici le 25 Juillet de cette année 1748, est si bien d'accord avec les observations du commencement & de la fin de cette Eclipse, qu'à peine on s'en sauroit promettre un plus grand. Suivant mes tables j'avois établi le commencement de cette Eclipse à $10^h, 17', 45''$, & la fin à $1^h, 24', 0''$: or, quoique le commencement de cette Eclipse ne fut pas apperçû, on étoit pourtant assés sûr de le conclure à $10^h, 18'$ par la phase qui parût a' $10^h, 30'$, & la fin de cette Eclipse a été remarquée a' $1^h, 24', 30''$ Nous ne nous sommes pas trompés non plus dans l'attente de l'anneau, que j'avois annoncé: mais sa durée, que j'avois mise à $5', 10''$, étoit beaucoup plus courte, savoir de $1', 20''$; ce qui ne paroît pas trop favoriser mes tables, quoique les autres tables qui passent pour les meilleures, ne montrassent cette Eclipse, que partiale, & que leurs erreurs par rapport au commencement & à la fin montassent à quelques minutes entieres. Mais, pour ôter ce scrupule par rapport à la durée de l'anneau, je dois remar-

remarquer que dans mon calcul j'avois supposé l'elevation du Pole de Berlin de 52°, 36': Or les dernieres observations, que Mr. Kies vient de faire avec l'excellent Quart de cercle, que Mr. de Maupertuis a donné à l'Academie ne donnent cette elevation du Pole que de 52°, 31', 30", de sorte que j'avois placé Berlin trop vers le Nord de 4', 30". On n'a qu'à jetter les yeux sur la carte de cette Eclipse, qui a été publiée à Nurnberg, pour s'assurer, que si Berlin étoit situé de 4½' plus au nord, la durée de l'anneau auroit été beaucoup plus considerable & qu'elle auroit été assés d'accord avec mon calcul.

II. Pour l'Eclipse de Lune, qui parut entre le 8 & le 9 Dec. mois d'Août, si l'on regarde l'article, qui se trouve à la fin de l'Almanac Astronomique, on remarquera, que les momens de cette Eclipse qui sont allegués sous le titre de mes tables, ne sont pas trop d'accord avec l'observation. Car le commencement y etoit marqué à 11h, 0', 14" & la fin à 1h, 14', 4"; on a trouvé par l'observation le commencement a 11h, 5' & la fin a 1h, 18'. J'avoüe que cette difference anéantiroit tout à fait la bonne opinion de mes tables, que l'accord de l'Eclipse du Soleil auroit pu inspirer: & cela me paroit d'autant plus surprenant, que j'avois rectifié mes tables sur un grand nombre d'Eclipses lunaires. J'ai cru donc avant que de porter un jugement si peu favorable de mes tables, devoir refaire mes calculs, pour voir s'il ne s'y étoit pas glissé quelque faute, ayant fait alors ces calculs à la hâte. En voicy donc le détail de tous mes calculs.

III. Je commence donc par chercher le tems de l'opposition moyenne, qui arrive vers le 8 Août de l'Année 1748. dont le calcul sera suivant mes tables imprimées dans l'Almanac latin pour l'an 1749. comme il suit:

	☽ a ☉	L. moy: ☉	An. moy: ☉	An. moy: ☽	L. moy: ☊
A 1741, 1j, 20h, 44', 15"	6	9s, 12°, 1', 38"	6s, 3°, 25', 46"	9s, 27°, 15, 46"	3s, 4°, 9', 52"
Ano 7, 13, 3, 52, 28	0	0, 12, 17, 11	0, 12, 9, 51	2, 26, 3, 39	4, 16, 3, 2
Juill. 25, 17, 8, 21	0	6, 23, 44, 49	6, 23, 44, 14	6, 0, 43, 3	6, 10, 56, 47
Juill. 40, 17, 45, 4	6	4, 18, 3, 38	1, 9, 19, 51	6, 24, 2, 28	4, 26, 59, 49
ou Août 8, 17, 45, 4					10, 7, 10, 3

Car

Car le 40me Juillet convient avec le 9me Août; mais parceque cette année est bissextile, il en faut retrancher un jour, dont le mois de Fevrier a eté allongé. Donc, selon le mouvement moyen, l'opposition arrive à Paris A. 1748 Août $8^j, 17^h, 45', 4''$ tems moyen: & l'équation du tems étant $5', 0''$ à soutraire, le tems de cette opposition moyenne sera à Paris A. 1748 Août $8^j, 17^h, 40', 4''$, & pour Berlin il y faut ajouter la difference de longitude, qui est $44', 36''$, par conséquent cette opposition moyenne a du arriver à Berlin

A. 1748 Août $8^j, 18^h, 24', 40''$ tems vrai.

IV. Ayant pour ce tems les anomalies moyennes du Soleil & de la Lune, on en déterminera à l'aide des mêmes tables les anomalies excentriques, en y appliquant les équations qui conviennent, & on trouvera

L'anomalie excentrique du Soleil $1, 8^0, 43', 44''$

L'anomalie excentrique de la Lune $6, 23, 25, 27$

Et de là on formera aisement les argumens des tables d'équations & les equations mêmes.

Table	Argument	Eq: additives	Eq: soutractives
♈ I	$6^s, 25^0, 23', 27$	- - - - -	$3^h, 44'', 18''$
II	1, 8, 43, 44	- - - - -	2, 35, 59
III	8, 4, 7, 11	$0^h, 8', 15''$	
VI	5, 16, 39, 43	0, 2, 31	
V	2, 29, 30, 33	- - - -	0, 1, 1
VI	0, 12, 3, 10	31	
		+ 0, 11, 17	— 6 21, 18
			+ 0, 11, 17
		Equation totale à soutraire	6, 10, 1

Il faut donc soutraire $6^h, 10', 1''$ du tems de l'opposition moyenne pour avoir le tems de l'opposition vraie dans l'orbite.

Opposition moyenne à Berlin Ann. 1748	Août	8^j,	18^h,	$24'$,	$40''$
otez			6,	10,	1
Opposition dans l'orbite à Berlin Ann. 1748 selon le tems vrai.	Août	8,	12,	14,	39

V. Main-

V. Maintenant je cherche pour ce tems les vrais lieux du Soleil, de la Lune, leurs anomalies excentriques avec le lieu moyen du noeud ascendant.

Tems moyenne	Long. moy: ☉	An. moy: ☉	An. moy: ☽	Long. moy: ☊
ôtez	4, 18, 3, 38	1, 9, 19, 51	6, 24, 2, 28	10, 7, 10, 3
6h, 10', 1''	— 15, 12	— 15, 12	— 3, 21, 26	+ 49
Tems de l'orbite	4, 17, 48, 26	1, 9, 4, 39	6, 20, 41, 2	10, 7, 10, 52
Equat:	— 1, 11, 37	— 35, 56	— 1, 10, 18	
	4, 16, 36, 49	1, 8, 28, 43	6, 21, 51, 20	
	Long. vraie ☉	An. exc. ☉	An. exc. ☽	

Donc la longitude vraie du Soleil étant 4s, 16o, 36', 49
La longitude de la Lune dans son orbite est 10, 16, 36, 49
puisque nous savons que dans ce moment le lieu de la Lune dans son orbite differe de 6. signes de celui du Soleil.

VI. A présent il s'agit de determiner le vrai lieu du noeud ascendant ☊ avec l'inclinaison de l'orbite lunaire à l'ecliptique, ce qui se fera par le moyen des tables de la Lune, que j'ai publiées dans le recueil de mes pieces.

Tables pour le ☊ & l'Incl.	Argument	Long. moy: ☊	Inclin.
		10s, 7o, 10', 52''	
I	6, 21, 51, 20	Eq. + 38	
II	1, 8, 28, 43	Eq. + 4, 30	
☉	4, 16, 36, 49	10, 7, 16, 0	
☊	10, 7, 16, 0		
III	6, 9, 20, 49	Eq. + 0, 29, 49	5o, 16', 39''
		10, 7, 45, 49	
IV	6, 0, 0, 0	Eq. 0, 0, 0	Eq. — 42
V	0, 9, 20, 49	Eq. + 2, 14	Eq. + 36
		10. 7, 48, 3	5, 16, 33
		Long. vraye du ☊	Inclinaison vraie.

Donc la longitude vraie du noeud ☊ est 10s, 7o, 48', 3''
& l'inclinaison de l'orbite lunaire . 5, 16, 33.

VII. Pour

VII. Pour avoir tous les élémens, sur lesquels le calcul de l'Eclipse se fonde, il faut encore chercher les diametres apparens, les parallaxes horizontales & les mouvemens horaires du Soleil & de la Lune, ce qui se trouvera aisément par les tables, qu'on a jointes à l'Almanac Astronomique pour l'année 1749. On pourra aussi se servir des formules suivantes, où v marque l'anomalie excentrique de la Lune, & u celle du Soleil. De là on aura :

Le diametre apparent du Soleil $= 1933'' - 32'',4 \cos u$
la parallaxe horizontale du ☉ $= 12''$
le mouvement horaire du ☉ $= 147'',87 - 4'',95 \cos u$

Pour la Lune dans les oppositions:

Diam. app. horiz. de la Lune $= 1892'' - 122'' \cos v + 4'' \cos 2v$
Parallaxe horiz. de la Lune $= 3430 - 222 \cos v + 8 \cos 2v$
Mouv. horaire de la Lune $= 2023'',1 - 258,3 \cos v + 11,7 \cos 2v$
$- 1,8 \cos u + 1,4 \cos (v-u)$

Pour les conjonctions on n'a qu'à retrancher 2'' pour le diametre apparent, & 3'' pour la parallaxe & le mouvement horaire.

VIII. Par le moyen de ces formules, puisqu'il y a

$u = 1, 8, 28, 43$ & $v = 6, 21, 51, 20$

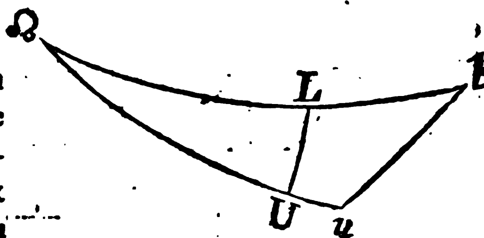
nous trouverons :

Le Diamatre apparent du Soleil	=	1908''	=	31',	48''
La parall. horizont. du Soleil	=	12''			
Le mouvement horaire du Soleil	=	144	=	2,	24
Le Diametre horiz. appar. de la ☽	=	2008	=	33,	28
La parallaxe horiz. de la Lune	=	3642	=	60,	42
Le mouvem. horaire de la Lune	=	2269	=	37,	49
Or le mouvement horaire du noeud est de		8''			
De plus la somme des parallaxes étant				60',	54''
si l'on en retranche le demi-diametre du Soleil				15',	54''
on aura le demi-diametre de l'ombre	=			45',	0''

Mais l'atmosphere de la terre augmentant l'ombre autant qu'on peut conclure par les observations, il semble qu'on y doit ajouter 40'', de sorte que le demi-diametre rectifié de l'ombre sera $= 45', 40''$.

XI. Soit

IX. Soit maintenant dans la figure cy-jointe ☊ U *u* l'Ecliptique, ☊ L *l* l'orbite de la Lune, & ☊ le noeud ascendant. De plus, au moment de l'opposition dans l'orbite, soit U le centre de l'ombre & L celui de la Lune, & pour rendre le probleme plus général, soit



☊ U = ☊ L = a

lequel arc se trouve si l'on ote la longitude du noeud ☊ du lieu de la Lune; & soit ω l'angle de l'inclinaison ☊ des deux orbites: & nous aurons par les régles de la trigonometrie sphærique:

$$\cos UL = \cos\omega \sin a^2 + \cos a^2 = \cos\omega \sin a^2 + 1 - \sin a^2$$

Or $1 - \cos\omega$ étant $= 2 \sin \tfrac{1}{2}\omega^2$, nous aurons

$$2 \sin a^2 \sin \tfrac{1}{2}\omega^2 = 2 \sin \tfrac{1}{2} UL^2$$

& partant $\sin \tfrac{1}{2} UL = \sin a \sin \tfrac{1}{2}\omega$.

X. Qu'on cherche à present la distance des centre u, & l, de l'ombre & de la Lune aprés x heures depuis le moment de l'opposition dans l'orbite. Soit pour cet effet m le mouvement horaire du Soleil ou de l'ombre depuis le noeud, & n le mouvement horaire de la Lune depuis le noeud qu'on aura si l'on ajoute 8'' au movement horaire tant du Soleil que de la Lune trouvé par les tables données cy-dessus: & nous aurons ☊ $u = a + mx$ & ☊ $l = a + nx$. Nommant donc la distance des centres $ul = z$, nous aurons:

$$\cos z = \cos\omega \sin(a+mx) \sin(a+nx) + \cos(a+mx)\cos(a+nx)$$

ou puisque $\sin b \sin c = \tfrac{1}{2}\cos(b-c) - \tfrac{1}{2}\cos(b+c)$, & $\cos b \cos c = \tfrac{1}{2}\cos(b-c) + \tfrac{1}{2}\cos(b+c)$, cette èquation se changera en cette-cy:

$$\cos z = \tfrac{1}{2}\cos\omega \cos(n-m)x - \tfrac{1}{2}\cos\omega \cos(2a+(n+m)x)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\cos(n-m)x + \tfrac{1}{2}\cos(2a+(n+m)x)$$

ou bien $\cos z = \cos\tfrac{1}{2}\omega^2 \cos(n-m)x + \sin\tfrac{1}{2}\omega^2 \cos(2a+(n+m)x$

ou $1 - 2\sin\tfrac{1}{2}z^2 = \cos(n-m)x - \sin\tfrac{1}{2}\omega^2 \cos(n-m)x + \sin\tfrac{1}{2}\omega^2 \cos(2a+(n+m)x$

Or $\cos(2a+(n+m)x) = \cos 2a \cos(n+m)x - \sin 2a \sin(n+m)x$
d'où nous obtiendrons :

$$1 - \sin\tfrac{1}{2}z^2 = \cos(n-m)x - \sin\tfrac{1}{2}\omega^2 \cos(n-m)x + \cos 2a \sin\tfrac{1}{2}\omega^2 \cos(n+m)x$$
$$- \sin 2a \sin\tfrac{1}{2}\omega^2 \sin(n+m)x$$

Mais les angles $(n-m)x$ & $(n+m)x$ étant trés petits il y aura $\cos(n-m)x = 1 - \tfrac{1}{2}(n-m)^2 xx$, $\cos(n+m)x = 1 - \tfrac{1}{2}(n+m)^2 xx$ & $\sin(n+m)x = (n+m)x$, ce qui donne

$$4\sin\tfrac{1}{2}z^2 = (n-m)^2 xx + 2\sin\tfrac{1}{2}\omega^2 - \sin\tfrac{1}{2}\omega^2 (n-m)^2 xx$$
$$-2\cos 2a \sin\tfrac{1}{2}\omega^2 + (n+m)^2 xx \cos 2a \sin\tfrac{1}{2}\omega^2$$
$$+ 4(n+m)x \sin a \cos a \sin\tfrac{1}{2}\omega^2$$

ou $4\sin\tfrac{1}{2}z^2 = 4\sin a^2 \sin\tfrac{1}{2}\omega^2 + (n-m)^2 xx \cos\tfrac{1}{2}\omega^2 + (n+m)^2 xx \cos 2a \sin\tfrac{1}{2}\omega^2 + 4(n+m)x \sin a \cos a \sin\tfrac{1}{2}\omega^2$

ou $4\sin\tfrac{1}{2}z^2 = (\sin a + (n+m)x\cos a)^2 \sin\tfrac{1}{2}\omega^2 + (n-m)^2 xx \cos\tfrac{1}{2}\omega^2$
$- (n+m)^2 xx \sin a^2 \sin\tfrac{1}{2}\omega^2$

XI. La distance des centres $ul = z$ sera la plus petite si l'on pose le differentiel de la valeur de $a \sin\tfrac{1}{2}z^2 = o$, ce qui donne $(n-m)^2 x \cos\tfrac{1}{2}\omega^2 + (n+m)^2 x \cos 2a \sin\tfrac{1}{2}\omega^2 + 2(n+m)\sin a \cos a \sin\tfrac{1}{2}\omega^2 = 0$, d'où l'on tire

$$x = \frac{-(n+m)\sin 2a \sin\tfrac{1}{2}\omega^2}{(n-m)^2 \cos\tfrac{1}{2}\omega^2 + (n+m)^2 \cos 2a \sin\tfrac{1}{2}\omega^2}$$

& cette valeur substituée donne :

$$\sin\tfrac{1}{2}z = \sin a \sin\tfrac{1}{2}\omega \sqrt{\frac{(n-m)^2 \cos\tfrac{1}{2}\omega^2 - (n+m)^2 \sin a^2 \sin\tfrac{1}{2}\omega^2}{(n-m)^2 \cos\tfrac{1}{2}\omega^2 + (n+m)^2 \cos 2a \sin\tfrac{1}{2}\omega^2}}$$

Puisque les termes qui sont multipliés par $\sin\tfrac{1}{2}\omega^2$ sont extremement petits par raport aux autres, les centres de l'ombre & de la Lune s'approcheront le plus qu'il est possible, x heures aprés l'opposition dans l'orbite, étant

$$x = \frac{-(n+m)\sin 2a \tang\tfrac{1}{2}\omega^2}{(n-m)^2}\left(1 - \frac{(n+m)^2 \cos 2a \tang\tfrac{1}{2}\omega^2}{(n-m)^2}\right)$$

& la distance même des centres $ul = z$ sera.

$$\sin\tfrac{1}{2}z = \sin a \sin\tfrac{1}{2}\omega\left(1 - \frac{(n+m)^2 \cos a^2 \tang\tfrac{1}{2}\omega^2}{2(n-m)^2}\right)$$

XII. Mais

XII. Mais renverſons maintenant le cas, & ſuppoſons que la diſtance des centres $s\,l = z$ ſoit donnée, & qu'on doive chercher le tems, où les centres ſe trouvent à cette diſtance. Qu'on cherche prémierement un angle ϕ, de ſorteque $\cos\phi = \frac{\sin a \sin \frac{1}{2}\omega}{\sin \frac{1}{2} z}$

& remettant dans l'équation la valeur $\sin \frac{1}{2} z = \frac{\sin a \sin \frac{1}{2}\omega}{\cos\Phi}$

on aura

$$4 \sin a^2 \sin \tfrac{1}{2}\omega^2 \operatorname{tang}\Phi^2 = (n-m)^2 xx \cos \tfrac{1}{2}\omega^2 + (n+m)^2 xx \cos 2a \sin \tfrac{1}{2}\omega^2 + 2(n+m) x \sin 2a \sin \tfrac{1}{2}\omega^2$$

où les deux derniers termes étant fort petits, on aura à peu prés $x = \frac{2 \sin a \operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega \operatorname{tang}\Phi}{n-m}$. ſuppoſons donc

$x = \frac{2 \sin a \operatorname{tang} \frac{1}{2}\omega \operatorname{tang}\Phi}{n-m} - y$, & nous aurons.

$$0 = -4(n-m) y \sin a \sin \tfrac{1}{2}\omega \cos \tfrac{1}{2}\omega \operatorname{tang}\Phi + \frac{4(n+m)^2}{(n-m)^2} \sin a^2 \cos 2a \sin \tfrac{1}{2}\omega^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\omega^2 \operatorname{tang}\Phi^2$$
$$+ \frac{4(n+m)}{n-m} \sin a \sin 2a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\omega \sin \tfrac{1}{2}\omega^2 \operatorname{tang}\Phi$$

d'où nous tirons

$$y = \frac{n+m}{(n-m)^2} \sin 2a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\omega^2 + \frac{(n+m)^2}{(n-m)^3} \sin a \cos 2a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\omega^3 \operatorname{tang}\Phi$$

Par conſéquent nous aurons enfin:

$$x = \frac{\sin a \operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega}{n-m}\left(2 \operatorname{tang}\Phi - \frac{2(n+m)}{n-m} \cos a \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega - \frac{(n+m)^2}{(n-m)^2} \cos 2a \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega^2 \operatorname{tang}\Phi\right)$$

XIII. Cette formule par laquelle nous venons d'exprimer la valeur de x, ſert à trouver tant le commencement & la fin d'une Eclipſe, que l'immerſion & l'emerſion ſi l'Eclipſe eſt totale. Car la tangente de l'angle ϕ ſe prend auſsi bien negativement qu'affirmativement, de ſorte que cette formule renferme toujours une double valeur. Or pour trouver les moments du commencement & de la fin

fin d'une Eclipse on n'a qu'à mettre z égale à la somme des demi-diametres de l'ombre & de la lune ; & si l'on met z égale à la difference de ces demi-diametres, on trouvera les momens de l'immersion & l'emersion. On verra d'abord si l'un ou l'autre de ces cas est possible ; ce qui arrive si $\sin \frac{1}{2} z >$ sin a sin $\frac{1}{2} \omega$. Car s'il étoit $\sin \frac{1}{2} z <$ sin a sin $\frac{1}{2} \omega$, ce seroit une marque de l'impossibilité, à moins que la difference ne fût si petite, qu'elle pourroit être détruite par les petits termes negligés dans le calcul.

XIV. Faisons maintenant l'application de ces formules à l'Eclipse de la Lune en question, dont le tems de l'opposition dans l'orbite a été trouvé à Berlin, tems vrai A. 1748 Août 8*j*, 12*h*, 14′ 39″ qui nous sert d'époque : & les valeurs des lettres qui entrent dans le calcul seront :

Lieu de la Lune dans son orbite	10*s*,	16*d*,	36′,	49″
Lieu du noeud ascendant ☊	10,	7,	48,	3.
L'arc ☊ L = ☊ U =	0,	8,	48,	46
Donc nous aurons a =	8*d*,	48′,	46″	
& l'inclinaison ou l'angle ☊ = ω =	5*d*,	16,	33	
& $\frac{1}{2}\omega$ =	2,	38,	$16\frac{1}{2}$	

De là nous aurons l sin a = 9, 1852764
$l \sin \frac{1}{2} \omega$ = 8, 6629848
& partant $l \sin \frac{1}{2}$ UL = 7, 8482612
Donc $\frac{1}{2}$ UL = 24′, $14\frac{1}{2}$″
& la distance des centres UL = 48′, 29
au moment de l'opposition dans l'orbite.

XV. Le mouvement horaire du Soleil étant = 144″ & le mouvement horaire de la lune 2269, nous aurons m = 152 & n = 2277, & partant $n - m = 2125$, & $n + m = 2429$. De là nous trouverons le moment de la plus grande proximité des centres de l'ombre & de la lune par la formule $x = -\frac{(n+m)\sin z \tan g \frac{1}{2}\omega^2}{(n-m)^2}$. négligeant l'autre terme comme extrémement petit. Le calcul sera

$l(n+m)$

$l\,(n+m) = 3,3854275$ $\qquad$ $2a = 17, 36, 32$

$l\,(n-m) = 3,3273589$ $\qquad$ l tang $\frac{1}{2}\,\omega = 8,6634454$

$l\,\frac{(n+m)}{n-m} = 0,0580686$

l fi $2a = 9,4807506$

l tang $\frac{1}{2}\,\omega^2 = 7,3268903$

$l - (n-m)\,x = 6,8657102$

foutr. $\quad 4,6855749$

red. en fecond. $\quad 2,1801353$

$l\,(n-m) = 3,3273589$

$l - x = 8,8527764$

$x = -0^h,07125 = -4^1,275 = -4^1,16''$

Donc le tems de la plus grande proximité des centres eft à Berlin, tems vrai A. 1748 Août $8j, 12h, 10', 23''$

XVI. Pour la plus petite diftance des centres, qui répondra à ce moment, fi elle eft nommée $= z$, nous en avons déjà la valeur fort proche $= 48', 29''$; mais il en faut encore retrancher $\frac{(n+m)^2}{(n-m)^2}$ fin a fin $\frac{1}{2}\,\omega$ cof a^2 tang $\frac{1}{2}\,\omega^2$

donc le calcul eft:

$l\left(\frac{n+m}{n-m}\right)^2 = 0,1161372$

l fi a fi $\frac{1}{2}\,\omega = 7,8482612$ $\qquad$ l cof $a = 9,9948423$

l cof $a^2 = 9,9896846$

l tang $\frac{1}{2}\,\omega^2 = 7,3268908$

$5,6809738$

foutr. $\quad 4,6855749$

$0,5953989$

à ce log. répond. $4''$ à peu prés

Donc la plus petite diftance des centres eft $48', 25''$ laquelle étant otée de la fomme des demi-diametres $45', 40'' + 16', 44'' = 62', 24''$ laiffera $13', 59''$ pour la grandeur de l'Eclipfe: qui fera reduite en doits,

doits, dont 6 égalent le demi-diametre de la Lune, on fera cette regle de trois :

$16', 44''$ (1004) : 6 = 839 : 5, 014

La grandeur de cette Eclipse a donc été de $5 \frac{14}{1000}$ doigts ce qui doit être arrivé à $12^h, 10', 23''$.

XVII. Pour trouver les momens du commencement & de la fin de cette Eclipse, il faut supposer z = à la somme des demi-diametres, ou $z = 62', 24''$ & de là chercher l'angle φ que cos $= \varphi \dfrac{\sin a \sin \frac{1}{2} \omega}{\sin \frac{1}{2} z}$

Or étant $\frac{1}{2} z = 31', 12''$ nous aurons.

$l \sin a \sin \frac{1}{2} \omega$	=	7, 8482612
$l \sin \frac{1}{2} z$	=	7, 9578747
$l \cos \varphi$	=	9, 8903865
Dom. φ	=	$39°, 1', 8''$
& l tang φ	=	9, 9084037

Comme la valeur de x est composée de trois membres, cherchons en chacun à part, par le calcul qui suit.

l si a	=	9, 1852764
l tang $\frac{1}{2} \omega$	=	8, 6634454
		7, 8487218
$l (n - m)$	=	3, 3273589
		4, 5213628
soutr.		4, 6855749
$l \dfrac{\text{si } a \text{ tang } \frac{1}{2} \omega}{n - m}$	=	9, 8357878
l tang φ	=	9, 9084037
l 2	=	0, 3010300
l Part. I.	=	0, 0452215

Part. I.

$$\text{Part. I.} = 1^b,\ 1097$$
$$l\,\frac{\text{si}\ a\ \text{tang}\ \frac{1}{2}\,\omega}{n-m} = 9,\ 8357474$$
$$l\,\frac{(n+m)}{n-m} = 0,\ 0580686$$
$$l\ 2 = 0,\ 3010300$$
$$0,\ 1948864$$
$$l\ \text{cos}\ a = 9,\ 9948423$$
$$l\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\,\omega = 8,\ 6634454$$
$$l\ \text{Part. II.} = 8,\ 8531741$$
$$\text{Part. II.} = 0,\ 0713$$
$$l\,\frac{\text{si}\ a\ \text{tang}\ \frac{1}{2}\,\omega}{n-m} = 9,\ 8357878$$
$$l\left(\frac{n+m}{n-m}\right)^2 = 0,\ 1161372$$
$$l\ \text{cos}\ 2\,a = 9,\ 9799536$$
$$l\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\,\omega^2 = 7,\ 3268908$$
$$l\ \text{tang}\ \phi = 9,\ 9084037$$
$$l\ \text{Part. III.} = 7,\ 1651731$$
$$\text{Part. III.} = 0,\ 0015$$

XVIII. Ajoutant ces parties ensemble selon les signes, & donnant à tang ϕ une valeur ambiguë, nous trouverons les deux valeurs suivantes pour x.

I. $x = 1,\ 1097 - 0,\ 0713 - 0,0015 = +1,\ 0369$

II. $x = -1,\ 1097 - 0,\ 0713 + 0,\ 0015 = -1,\ 1795$

Donc, pour avoir le commencement de l'Eclipse, il faut du tems de l'opposition dans l'orbite soutraire

$1,\ 1795^b = 1^b,\ 10',\ 770 = 1^b,\ 10',\ 46''$

& pour avoir la fin de l'Eclipse, il faut ajouter à cette même époque

 1, 0369b

1, 0369^{h} = 1^{h}, 2$'$, 214 = 1h, 2$'$, 13$''$

Tems de l'oppofition, Aout	8j, 12^{h}, 14$'$, 39$''$
	— 1, 10, 46
	+ 1, 2, 13
Commencement de l'Eclipfe à	11, 3, 53
Fin de l'Eclipfe à	13, 16, 52

XIX. Recueillons tout ce que nous venons de trouver enfemble, & nous verrons, que felon mes tables les moments de l'Eclipfe ont dû être à Berlin, tems vrai A. 1748. le 8me Août

Le commencement	à	11^{h}, 3$'$, 53$''$
La plus grande obfcuration	à	12, 10, 23
L'oppofition dans l'orbite	à	12, 14, 39
La fin de l'Eclipfe	à	13, 16, 52

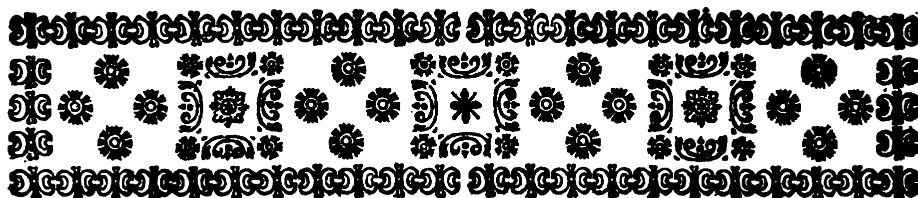
La grandeur de l'Eclipfe $5\frac{14}{1000}$ Doigts.

& la durée de 2h, 12$'$, 49$''$

A préfent on voit que l'accord de ce calcul avec l'obfervation eft fi grand, qu'à peine fauroit on s'attendre à une plus grande conformité; vû qu'on n'eft pas encore trop certain de l'augmentation de l'ombre, caufée par l'Atmosphere de la terre, & enfuite les obfervations de ces moments mêmes ne font pas fusceptibles d'une telle précifion, qu'on n'en pourroit encore douter d'une minute, puisqu'il eft extremement difficile de diftinguer l'obfervation de l'ombre même, de celle de la penombre.

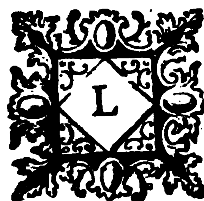


OBSER-



OBSERVATION
DE L'ECLIPSE ANNULAIRE DU SOLEIL
LE 25. JUILLET 1748. SELON LE NOUVEAU STILE A' BERLIN,

PAR MR. KIES.



LE jour de la fameuse Eclipse du Soleil approchant, je fis tous les préparatifs nécessaires pour la bien observer. Pour cette fin j'examinai soigneusement quelque tems avant le mouvement de ma pendule pour savoir au juste, si elle répondoit exactement au mouvement moyen du Soleil, & aprés m'en être bien assuré, je déterminai le midi du 24. Juillet par des hauteurs correspondantes du Soleil avant & aprés midi, ayant en même tems égard à la variation du tems qui provient du changement de la declinaison du Soleil, pendant le tems écoulé entre les observations. Le 25. Juillet jour de l'Eclipse, je pris de nouveau plusieurs hauteurs du bord superieur du Soleil avant midi, mais je ne fus pas en état l'aprésmidi de prendre ses correspondantes, m'ayant trop affoibli les yeux par cette observation, & par celle de l'Eclipse même; je m'en tins donc à la conclusion du midi au jour précedent.

Pour l'observation je me suis servi d'une lunette Newtonienne de trois pieds, & comme mon but n'étoit que de déterminer les

points les plus nécessaires, & les plus utiles pour l'Astronomie, je me suis borné aux momens suivans.

Le commencement de l'Eclipse n'a pas été observé à cause des nuages qui nous déroboient l'image du Soleil

L'anneau se ferme à 11h, 52', 51'' tems vrai avant midi

—— se rompt à 11, 54, 13

Durée de l'anneau 1, 22

La fin de l'Eclipse est arrivée aprés midi

à 1h, 25', 9'' tems vrai.

(*) Le diametre du Soleil mesuré avec le micrometre

étoit de 31', 42''

celui de la Lune de 29, 54 au milieu de l'Eclipse.

Je passe présentement à quelques Observations physiques. Premiérement, on a trés bien remarqué, en laissant tomber l'image du Soleil sur un papier blanc dans la chambre obscure, que le diametre du Soleil s'est enflé à peu prés de sa centieme partie au tems de la plus grande obscuration, & même quelques minutes avant & aprés ce tems; ce qui donne un argument évident pour l'existence de l'Atmosphere de la Lune, dans laquelle les rayons du Soleil sont rompus: & il est trés important que cette découverte se verifie par d'autres observations qu'on fera dans la suite, il s'agit présentement de trouver un moyen de déterminer la quantité de cette Atmosphere lunaire. Entre diverses methodes qui se présentent d'abord à l'esprit, la premiere qui s'offre est d'observer le lieu de la Lune, & de mesurer son diametre en même tems: comme on sait d'ailleurs, que la partie illuminée de la Lune est toujours proportionelle au sinus verse de son élongation du Soleil, qu'on mesure la partie éclairée de la Lune aux environs de ses quartiers, la différence entre le calcul & l'observation doit faire connoître la quantité de la réfraction des rayons du Soleil dans l'Atmosphere de la lune.

Ce

(*) Je dois avertir que la vis du micrometre dont je me suis servi pour mesurer les diametres du Soleil & de la Lune, n'étoit pas assez fine pour répondre de quelques secondes, d'autant moins que ce micrometre étoit appliqué à la lunette d'un quart de cercle, dont la lunette est trop petite.

Ce seroit le moyen le plus sur, si les phases illuminées de la Lune étoient bien terminées; c'est pourquoi je conseillerois plutôt de se servir de la maniere qui suit. Qu'on prenne un instrument pareil à celui de Mr. *Hadley*, par lequel on peut mesurer des arcs compris entre deux astres & par le moyen des miroirs, qui y sont appliqués, on joindra les Etoiles de sorte qu'elles paroissent se baiser ensemble, l'une de ces deux doit être celle qui va être eclipsée par la Lune, & l'instrument monté sur une machine *parallactique*. Qu'on mette un cercle de cuivre au foyer de la lunette, qui ait plusieurs fils paralleles, qui se coupent à angles droits, dont la distance entre eux soit connuë p. e. de dix en dix secondes; on observera donc, avant que l'Etoile entre sur le bord de la Lune, sous quel fil elle paroit, & à l'instant que le bord de la Lune paroit la toucher, on verra les deux Etoiles qui avant l'attouchement ne paroissoient qu'une seule, & la distance des fils qui couvrent les Etoiles, fera connoitre la quantité de la réfraction de l'Atmosphere de la la Lune. Comme on peut réïterer fort souvent cette observation, & qu'on peut choisir pour la seconde Etoile celle qu'on voudra, pourvû qu'elle soit à peu prés à la même hauteur que celle qui va être éclipsée, on parviendra enfin à s'assurer de la vraye quantité de l'Atmosphere lunaire. Aprés cette petite digression, je retourne à l'observation de l'Eclipse annulaire. Le disque de la Lune étant tout à fait entré sur celui du Soleil, l'anneau parut si lumineux qu'il eblouït la vuë, en le regardant sans verre coloré, ou enfumé. On a remarqué qu'un verre ardent a brulé ce qu'on lui présentoit, jusqu'à ce que la grandeur de l'Eclipse fut de 11 doigts; l'Eclipse ayant passé ce terme, les verres ardents ne firent plus d'effet sur les choses les plus combustibles. Quant à la constitution de l'air, le thermometre de *Fahrenheit* descendoit de six dégrez. Il faisoit un air frais dans le tems de la plus grande phase, & le vent étoit aussi plus fort qu'avant, ou aprés la plus grande obscuration. On croyoit être plongé tout d'un coup dans le crépuscule, à l'instant que l'anneau se forma; cependant il faisoit encore assez de jour pour lire & distinguer des caracteres assez menus. On voyoit trés bien la Planete de Venus, & celle de Mars, à la vuë simple. Les oiseaux donnoient

des marques qu'ils s'appercevoient de la nuit, & annonçoient le jour à mesure qu'il commençoit à faire plus clair. Je ne dois pas passer sous silence que le bord de la Lune vers le Soleil étoit d'un rouge d'ecarlate fort vif, & finissoit vers l'anneau en couleur d'orange & un jaune tirant sur le pâle. Le bord du Soleil au contraire étoit d'une couleur violette, finissant vers la Lune en couleur verte & celadon. Un phénomene fort remarquable, qui offrit un beau spectacle à la vuë, c'est que pendant le tems que l'Eclipse étoit annulaire, l'ombre des feüilles d'árbres, ou de quelque autre corps que ce fut, étoit bordée d'un bel anneau qui avoit toutes les couleurs d'un arc-en-ciel. Ce beau spectacle se perdit; dés que l'anneau du Soleil fut rompu.

J'ajouterai ici une observation de la même Eclipse annulaire du Soleil faite par Mr. *Polac*, Professeur de Mathematiques à Francfort sur l'Oder, où la latitude determinée par lui est de 52°, 26′ à Francfort sur l'Oder

le commencement de l'Eclipse arrivoit		à	10h,	24′,	50″	tems vrai
l'anneau	se ferme	à	11,	57,	12	
———	se rompt	à	12,	1,	0	
	durée de l'anneau			4,	12	



SUR

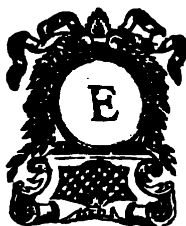
SUR L'ATMOSPHERE DE LA LUNE

PROUVÉE PAR LA DERNIERE ECLIPSE ANNULAIRE DU SOLEIL.

PAR M. EULER.

Traduit du Latin.

I.



EN obſervant les momens de l'Eclipſe du Soleil que nous eûmes ici le 25 Juillet 1748. & en rendant compte de mes obſervations*, je n'avois eu pour but que d'arriver à une détermination plus exacte du veritable mouvement de la Lune & de ſa parallaxe. Mais il n'a pas laiſſé de ſe préſenter dans le cours de l'Obſervation de cette Eclipſe quelques autres Phénomenes remarquables, qui ne dépendoient, ni du mouvement de la Lune, ni de ſa parallaxe, mais qui ſembloient donner à connoitre la réalité de la réfraction des rayons qui raſent les bords de la Lune, & décider cette queſtion agitée depuis long tems parmi les Aſtronomes; Si la Lune eſt environnée d'une Atmoſphere, ou non? C'eſt ce qui m'engage à examiner ici plus exactement les phénomenes de cette eſpece, que j'ai obſervés pendant cette Eclipſe, & à en rechercher les cauſes.

* Voy *Memoir.* de 1747. p. 250 & ſuiv.

II. Pour obſerver cette Eclipſe avec plus de ſuccès, & ſoumettre à la meſure tout ce qu'elle offriroit de remarquable, j'avois préparé dans ma maiſon une chambre obſcure, qui regardoit le Midi, & ayant

ayant dirigé vers le Soleil, par un trou pratiqué à la fenêtre, un tube Astronomique de 9 pieds, je reçus l'image de cet astre sur un papier blanc: J'affermis ce papier perpendiculairement à l'axe de la Lunette à une distance, telle que l'image du Soleil remplit exactement un cercle qui y etoit tracé, & je tirai ce tube jusqu' à ce que l'image fut représentée de la maniere la plus distincte sur le papier, & qu'on put discerner clairement toutes les taches du Soleil, dont plusieurs etoient visibles sur son disque. La Machine etoit construite de telle sorte, que tandis que le tube suivoit continuellement le mouvement du Soleil, le papier par un mouvement semblable, conservoit toujours la même distance à l'egard du tube, de sorte que l'image du Soleil demeuroit constamment dans le cercle tracé sur le papier.

III. La Machine étant ainsi montée, & l'image du Soleil s'y montrant tout de suite aux yeux, j'attendis l'arrivée de l'Eclipse, dont de petits nuages qui couvroient fréquemment le Soleil ne permirent pas d'observer le commencement. Il restoit même peu d'esperance d'observer les phases suivantes de l'Eclipse, le Ciel se couvrant de plus en plus de nuages. Cependant contre notre attente on put fort bien observer les principales phases, & sur tout l'anneau pendant toute sa durée. Comme les momens en ont été déterminés avec beaucoup de précision par M. Kies, * & qu'il en a fait son rapport à l'Academie, je ne les repeterai pas ici, me bornant uniquement aux choses qui se rapportent au but de ce Mémoire.

* Voy. le *Mémoire* précedant.

IV. La Lune etant déjà entrée dans le disque du Soleil au delà de la moitié, de sorte que la figure du Soleil paroissoit déjà semblable à la Lune vers ses quadratures, & que l'angle qui fermoit ses cornes, devenoit fort aigu, je remarquai premierement que le disque du Soleil ne demeuroit plus compris dans le cercle tracé sur notre papier, mais que les pointes des cornes en sortoient, quoique le bord du Soleil le plus eloigné de ces pointes demeurât cependant toujours dans les limites exactes du cercle. Ce Phénomene se présentoit tel qu'on le voit Fig. I. où AEDEA est le cercle tracé sur le papier, & GAGBG la figure du Soleil éclipsé, dont les pointes G, G, s'etendoient de part & d'autre au delà du cercle, en sorte que les petites

tes portions EFG débordoient, tandis que le reste du bord EAE étoit encore dans une exacte congruence.

V. Ces pointes G, G, continuoient à déborder de plus en plus hors du cercle, à mesure que les angles G & G des pointes devenoient plus aigus, jusqu'à ce qu'enfin ces pointes se reünirent, & le Soleil se montra sous la forme annulaire, où son disque forma sur le papier un cercle beaucoup plus grand, que celui dans lequel il avoit été d'abord exactement renfermé. Vers le milieu de la durée de cet anneau, on voyoit sa figure peinte sur le papier, telle qu'elle est représentée Fig. 2. où AZBN est le disque du Soleil, dont le point du sommet est en Z, & le point opposé en N, par lequel est menée la droite horizontale AB, dont l'extremité A regarde l'Orient, & l'autre extremité B l'Occident : *azbn* est le disque de la Lune & la droite EF qui passe par les centres C & *c* du Soleil & de la Lune, paroit etre distante de la verticale ZN d'un angle d'environ 40°, car je n'ai pas pris la mesure exacte de cet angle, étant plus attentif à d'autres phenomenes. La plus grande largeur de l'anneau etoit F*f*, & la moindre E*e*, qui etoit estimée égale à peu prés à la quatrieme partie de F*f*.

VI. Par le calcul Astronomique j'ai trouvé pour ce tems le demi-diametre apparent du Soleil = 952″ & le demi-diametre de la Lune = 898″, lesquelles mesures, (avant que le disque du Soleil eut souffert la dilatation qui lui arriva vers le tems, où l'anneau commença à se former,) s'accordent assez exactement avec l'observation, en sorte qu'ici la Theorie n'a aucun besoin d'étre corrigée. Je conclus outre cela de la durée de l'anneau, que la distance moindre des centres du Soleil & de la Lune devoit avoir été de 53″ environ ; d'où, si l'on suppose que le disque du Soleil n'ait souffert aucun accroissement dans la région F*f*, où etoit la plus grande largeur de l'anneau, puisque nous avons vu que cet accroissement est seulement arrivé dans les endroits, où les bords du Soleil & de la Lune se touchoient réciproquement de plus prés, CF etoit = 952″, *cf* = 898″ & C*c* = 53, & par conséquent C*f* = 845, & à cause de cela la plus grande largeur de l'anneau F*f* = 107″, ce qui s'accorde assez exactement avec la figure de l'anneau que nous avons tracée.

VII. Il paroit de là, si le disque du Soleil ne s'etoit pas elargi vers la moindre largeur de l'anneau en E*e*, quelle auroit dû etre cette largeur E*e*. Car si on pose CE = 952", à cause de *ce* = 898" & C*e* = 951", la moindre largeur de l'anneau seroit = 1"; & cependant elle m'a manifestement paru égale à environ la quatrieme partie de la plus grande largeur F*f*. La largeur E*e* étoit donc à peu prés = 26" quoiqu'elle n'eut cependant pas du avoir plus d'une seconde, si le disque de Soleil n'avoit souffert aucune dilatation. A Francfort sur l'Oder M. *Polack* a observé le même phénomene, & la distance des centres du Soleil & de la Lune y etoit encore moindre qu'ici. Car l'anneau y ayant duré 4', j'en conclus que la moindre distance des centres a été d'environ 35", la plus grande largeur de l'anneau ayant été 89", & la moindre 19". Mais la moindre largeur etoit estimée comme sousdouble de la plus grande, & par conséquent de 44", ensorte qu'à Francfort de même qu'ici, le disque du Soleil etoit dilaté de 25", vers les endroits où la largeur de l'anneau étoit la moindre.

VIII. De là nait donc cette Question: *Quelle a été la cause de la dilatation du disque du Soleil, dans les endroits où le bord de la Lune le touchoit presque interieurement?* Pour la quantité de cette dilatation, que j'ai estimée 25", je ne la crois pas si certaine, qu'il ne puisse s'y etre glissé une erreur de plusieurs secondes: car, premierement la largeur de l'anneau n'a pu etre si exactement mesurée; & ensuite les couleurs dont le bord du Soleil & celui de la Lune, étoient constamment revêtus, le premier de violet, & l'autre de rouge, empêchoient de discerner les extremités de ces bords. Malgré tout cela il ne sauroit demeurer aucun doute, que la moindre largeur de l'anneau n'ait surpassé ici 10", & il est à propos d'examiner quelle peut avoir été la cause de sa dilatation.

IX. La Question revient donc à ceci, c'est que nous expliquions, pourquoi l'extremité du bord du Soleil A, qui etant vu par le rayon, AT, qui frise la Lune au point M devroit paroitre contigue de la Lune, n'est pourtant pas vu en A, mais en *a*, le spectateur etant supposé en T; de sorte que le lieu apparent de ce point differe de son vrai lieu de l'angle AT*a*, que nous avons trouvé de 25", quoique nous l'estimions

mions un peu plus petit? C'est en rendant raison de cela, qu'on fera comprendre, comment il peut arriver, que lorsque l'anneau ne devroit plus avoir de largeur, ou presque plus, cette largeur reçoit cependant un accroissement d'autant de secondes, qu'en contient l'angle A T *a*. Car si le bord du Soleil s'eloigne de cette maniere de celui de la Lune, dont il est tout à fait prés, il est clair que c'est la même cause, en vertu de laquelle les cornes du Soleil s'etendent avant & aprés l'anneau, & qu'il faut que la largeur de l'anneau même souffre une dilatation, dans l'endroit où elle est la moindre.

X. Avant que d'entreprendre l'explication de ce phenomene, il convient d'ecarter d'abord une opinion, qui au premier coup d'oeil n'est pas dénuée de probabilité. Ceux qui ont appris par la description des autres Eclipses annulaires du Soleil, que les deux largeurs de l'anneau, la plus grande & la plus petite, font ensemble une somme, plus grande que la difference entre les diametres apparens du Soleil & de la Lune; ceux, dis-je, auxquels cette observation est connüe, ont soupçonné pour l'ordinaire que, dans l'Eclipse annulaire de Soleil, le diametre de la Lune paroit un peu moindre, qu'il ne feroit, si on le voyoit hors du Soleil. Mais de la maniere, dont nous avons procedé à l'observation, il étoit parfaitement clair que la Lune n'avoit point souffert de diminution, mais que c'etoit le Soleil qui avoit reçu quelque accroissement. Car ceux qui pendant l'Eclipse même ont mesuré le diametre de la Lune, l'ont trouvé parfaitement conforme au calcul.

XI. Pour revenir donc à cet aggrandissement du disque du Soleil, observé pendant l'Eclipse annulaire, on s'apperçoit d'abord, & par une legere attention à ce phenomene, que la cause doit en être cherchée dans la réfraction des rayons qui rasent le corps de la Lune. En effet, on comprend aisément, que si la Lune etoit environnée de quelque Atmosphere semblable à la notre, il devroit à cause de la réfraction des rayons qui la traversent obliquement, en résulter pleinement le même phénomene, qui consiste dans la défléxion des rayons. Non seulement donc il ne paroit rester aucun doute, qu'on doive attribuer à la Lune une certaine Atmosphere, mais on peut aussi déter-

miner la densité même de cette Atmosphere par la quantité de la réfraction.

Fig. 4. XII. Soit donc le corps de la Lune EMF ceint d'une Atmosphere déliée PQR, que nous supposerons être de la même densité dans toute sa hauteur, quoique sans doute elle devienne, comme celle de la Terre, toujours plus rare, à mesure qu'elle s'eloigne de la surface, jusqu' à ce qu'enfin elle se confond insensiblement avec l'ether, qui remplit tout l'espace celeste. Car comme nous savons par d'autres phenomenes, que l'Atmosphere de la Lune est trés subtile, en comparaison de celle dont la Terre est environnée, nous pourrons négliger sans erreur la diverse rareté qui peut y avoir lieu, suivant les diverses distances de la surface de la Lune. Cela posé, chaque rayon de lumiere qui entre dans l'Atmosphere de la Lune, souffrira une certaine réfraction, aprés laquelle il traversera l'Atmosphere en ligne droite, & lorsqu'il en sortira de nouveau pour rentrer dans l'ether, il éprouvera une nouvelle réfraction semblable à la premiere.

XIII. Considerons à présent le rayon de lumiere SP, partant du point S, soit que ce soit une Etoile, ou une particule appartenante au Soleil, lequel rayon tombe dans l'Atmosphere de la Lune en P, de maniere qu'aprés sa réfraction il rase la surface de la Lune en M. Le spectateur donc placé au point M de la Lune, n'apperçoit pas à cause de la réfraction le point S dans son vrai lieu, mais en σ, & ce point lui sera representé dans le Ciel par le rayon MP prolongé aprés sa réfraction. Or comme cette droite MP, parce qu'elle touche la surface de la Lune, représente l'horizon Lunaire, le spectateur placé en M appercevra un point lumineux dans l'horizon, lorsque ce point est encore effectivement caché sous l'horizon à l'angle SPσ; cet angle SPσ sera donc égal à la réfraction horizontale, que les habitans de la Lune doivent sentir. Appellons donc cet angle SPσ, ou la réfraction horizontale vüe dans la Lune $= \alpha$, jusqu' à ce que nous puissions définir sa valeur avec plus de précision.

XIV. De plus, que ce rayon PM traverse toute l'Atmosphere de la Lune, & qu'il souffre une nouvelle réfraction en Q, où il entre

dans l'ether, d'où suivant la ligne droite Q T il parvienne jusqu'à la Terre, & frappe l'oeil de l'observateur en T. Cet observateur jugera donc que le point lumineux, d'où ce rayon partoit, est dans la direction prolongée T Q, & par conséquent situé en *s*. Mais, si la Lune n'avoit pas été placée entre deux, l'observateur auroit apperçu ce même point dans son vraï lieu S. Que si la distance de ce point S est extrémement grande, eu égard à la distance de la Lune à la Terre, sans cet effet de la Lune, l'observateur T devroit l'appercevoir dans une direction parallele à la droite P S, laquelle à cause de l'angle P Q *s* egal à l'angle S P *σ* $= \alpha$, sera inclinée à la direction T Q de l'angle double $= 2\alpha$.

XV. Si donc la Lune n'avoit point d'Atmosphere, le point S seroit entierement invisible pour l'observateur placé en T, & demeureroit caché derriere la Lune à une distance de son bord $= \alpha$. C'est donc l'Atmosphere de la Lune qui rendra ce point S visible, & le montrera à l'observateur T, comme s'il etoit en *s*; & comme le bord de la Lune M, à cause du rayon M Q T, se rapporte au même point du Ciel *s*, l'observateur placé en T appercevra un point lumineux S, contigu au bord de la Lune M; en sorte que la réfraction de l'Atmosphere Lunaire transportera dans le Ciel le point S de son vrai lieu S par l'espace S *s* $= 2\alpha$. Donc la vûe d'une Etoile, ou d'un autre point lumineux quelconque dans le Ciel, ne nous est dérobée par la Lune, que quand ce point s'est déjà caché derriere elle au delà de l'espace $= 2\alpha$. Tant que cet espace est moindre, le point demeure visible hors du bord de la Lune.

XVI. Mais considerons aussi le cas, où le rayon S P pénétrant par l'Atmosphere de la Lune, ne rase plus son bord, mais passe à une distance donnée M N. Ce rayon souffrira donc une moindre réfraction, tant en P qu'en Q, puisqu'on doit concevoir l'Atmosphere plus rare, à mesure qu'elle s'eloigne de la Lune; néanmoins on pourra également dans cette région plus rare considerer comme une ligne droite la route que le rayon P Q suit en traversant l'Atmosphere. Car un spectateur étant placé à la hauteur M N au dessus de la surface de la Lune, appercevra sans doute une moindre réfraction horizon- Fig. 5.

 tale

tale des Etoiles, & c'est à cette refraction que sera égale l'angle SPσ, par lequel l'astre S paroitra elevé ; & parce que le rayon PQ, qui parvient jusqu'à la Terre T, souffre une pareille réfraction en Q, l'observateur placé sur la Terre en T verra le point lumineux S situé en s, en sorte que l'intervalle Ss sera égal dans le Ciel au double angle SPσ.

XVII. Soit la distance MN de la surface de la Lune telle, que l'observateur placé sur la Terre en T la voye sous l'angle x, & comme toute la hauteur MK de l'Atmosphere de la Lune est fort petite, & la réfraction même trés petite en Q, le lieu apparent s de l'Etoile S lui paroitra distant du même intervalle $= x$ du bord M de la Lune. Mais le vrai lieu de cette Etoile qu'il appercevroit, si la Lune n'avoit point d'Atmosphere, sera plus proche du centre de la Lune de l'intervalle sS, qui se mesure par le double angle SPσ. Si donc cet angle SPσ, où la réfraction horizontale, qui répond à la hauteur, $MN = x$ au dessus de la surface de la Lune, est posée $= \zeta$, & qu'on voye l'Etoile éloignée du bord de la Lune de l'intervalle $= x$, il faut, pour en inferer le vrai lieu de l'Etoile, approcher le lieu apparent vers le centre de la Lune par l'intervalle $sS = 2\zeta$. D'où, si pour chaque distance x du bord de la Lune on étoit assuré de la réfraction horizontale ζ qui y répond, il seroit aisé de déterminer le vrai lieu de chaque Etoile par son lieu apparent.

XVIII. La dilatation de l'anneau Solaire observée à Berlin, donne lieu de conclurre, que comme l'anneau, lorsqu'il étoit le plus étroit, ne devoit avoir qu'une seconde, cette largeur qui étoit prête à s'evanouïr a reçu un accroissement de 25″, environ. Par conséquent si le bord du Soleil, ou quelque Etoile, ont paru à 25″ de distance du bord de la Lune, la vraye distance doit etre estimée tout à fait nulle; à moins que peut être, à cause des raisons déjà indiquées, au lieu de 25″ il ne faille choisir un moindre nombre, comme 20 ou 15. Alors nous savons par les Observations trés abondantes, dont on se sert communément pour combattre l'Atmosphere de la Lune, que dés que la distance d'une Etoile au bord de la Lune surpasse seulement

une

une minute, le changement que la réfraction Lunaire apporte à son lieu, devient tout à fait imperceptible.

XIX. Comme il paroit extremement difficile de déterminer par la theorie de la réfraction, l'effet de cette réfraction pour chaque distance du bord de la Lune, parce que la diminution de la densité de l'Atmosphere nous est inconnüe, il ne paroit y avoir de meilleur moyen à employer que celui de l'estimation, en cherchant une formule, qui satisfasse le mieux aux phenomenes. Soit donc la distance apparente d'une Etoile quelconque à l'egard du bord de la Lune $= x''$, & l'effet de la réfraction qui répond à cette distance $= z''$, en sorte qu'on obtienne par ce moyen le vrai lieu de l'Etoile, en approchant davantage du centre de la Lune le lieu apparent de z''. Il faudra donc définir cette correction z par la distance x, de maniere qu'en posant $x = 20$, il en résulte aussi $z = 20$; mais qu'au cas que x soit $= 60$, alors la valeur de z devienne si petite qu'on ne puisse presque l'appercevoir, comme si elle etoit de $5''$.

XX. Pour cet effet je prendrai une formule plus étendüe, & j'etablirai $z = \frac{A}{1 + B x^n}$, parce que je vois qu'une telle formule est extrémement commode, lors que la distance x devient considerable, pour faire que la valeur z soit la plus petite possible, pourvu que l'exposant n ne soit que médiocrement grand. Que si l'on prend $n = 2$, & qu'on satisfasse aux deux conditions précedentes, on trouvera cette formule, $z = \frac{32}{1 + 0,0015\, xx}$, ou $z = \frac{32}{1 + \frac{1}{666} xx}$; mais si, au lieu de $5''$ que nous attribuons à la distance $x = 60''$, nous posons $4''$, cela donnera $z = \frac{40}{1 + \frac{1}{400} xx}$. Nous nous servirons donc un peu de cette formule, comme de la plus simple, jusqu'à ce que nous puissions en employer une plus certaine; car, quand même il y auroit de l'erreur, les conclusions qui en seront tirées, ne s'ecar-

s'écarteront pourtant pas de la verité, d'une maniere qui soit sensible.

XXI. C'est donc sur cette formule que j'ai construit la Table suivante, qui pour chaque distance apparente, où un Astre se trouve au bord de la Lune, fournit la correction suivant laquelle cette distance doit être diminuée, pour découvrir la veritable. La distance apparente du bord de la Lune est marquée par *x*, & la correction, ou l'effet de la refraction par *z*.

x	*z*	*x*	*z*	*x*	*z*	*x*	*z*	*x*	*z*	*x*	*z*
0″	40″	10″	32″	20″	20″	30″	12″	40″	8″	90″	2″
1	40	11	31	21	19	31	12	45	7	100	2
2	40	12	29	22	18	32	11	50	6	110	1
3	39	13	28	23	17	33	11	55	5	120	1
4	38	14	27	24	16	34	10	60	4	130	1
5	37	15	26	25	15	35	10	65	4	140	1
6	36	16	24	26	15	36	10	70	3	150	1
7	35	17	23	27	14	37	9	75	3	160	1
8	34	18	22	28	13	38	9	80	2	170	$\frac{1}{2}$
9	33	19	21	29	13	39	8	85	2	180	$\frac{1}{2}$
10	32	20	20	30	12	40	8	90	2		

XXII. En suivant donc cette Table, on satisfait non seulement au phénomene de la derniere Eclipse de Soleil, en sorte que le bord du Soleil est effectivement contigu au bord de la Lune, lorsqu'il paroit en être distant de 20″, mais encore on reconnoit par là que l'effet de la réfraction Lunaire a été imperceptible, avant que la proximité du bord de la Lune ait été au dessous d'une minute. En effet nous avons vu qu' à la distance de 180″, ou 3′, l'effet n'alloit pas même à une seconde ; & pouvoit par conséquent etre compté pour rien ; ce qui s'accorde parfaitement avec les Observations. Or comme cette Table indique, que si la distance apparente *x* evanouït tout à fait, l'effet de la refraction est 40″, c'est à dire, que le point lumineux

est

est effectivement caché à cet intervalle derriere le disque de la Lune: si ce nombre étoit exactement juste, il s'ensuivroit que la réfraction horizontale pour les habitans de la Lune est de 20″. On comprend donc en même tems, que quand même cette Table renfermeroit quelque erreur, cependant la réfraction horizontale ne s'ecarteroit pas beaucoup du vrai.

XXIII. Aussi-tot donc que le bord du Soleil est caché moins de 40″, derriere la Lune, il doit nous être visible; d'où il résulte, que si nous voulons définir une Eclipse annulaire du Soleil par le calcul, le commencement de l'anneau arrivera, avant que la distance des centres devienne égale à l'excés du demi-diametre du Soleil sur le demi-diametre de la Lune: & de la même maniere, l'anneau disparoitra un peu aprés que la distance des centres est devenue égale à la difference des demi-diametres. C'est à dire, que si l'on prend la parallaxe horizontale dans la Lune de 20″, l'anneau devroit paroitre aussi-tot que la distance des centres surpasseroit de 40″ la difference des demi-diametres; & par conséquent l'Eclipse seroit annulaire, quand même la distance des centres ne deviendroit jamais moindre, que la difference des demi-diametres, pourvu que cette distance ne surpasse pas cette difference de plus de 40″. L'Atmosphere de la Lune fait donc qu'une Eclipse, qui sans elle ne seroit pas annulaire, paroit cependant telle; & que l'anneau dure plus longtems, qu'il ne devroit durer suivant le calcul, en négligeant l'effet de l'Atmosphere de la Lune.

XXIV. L'anneau ne sauroit pourtant paroitre durer aussi longtems, que cette réfraction de 40″ le demanderoit; car, de même que l'eclat du Soleil empêche de voir les Etoiles dans le Ciel, il est fort vraisemblable que l'anneau ne sauroit être apperçu du coté où il est trop étroit. En effet, tant que la largeur de l'anneau est extrémement petite, & ne s'accroit pas au delà de quelques secondes, elle sera invisible, & l'anneau ne se montrera, qu' aprés avoir aquis une largeur considerable. J'ai aussi observé dans la derniere Eclipse que l'anneau avoit paru tout à coup avec une largeur remarquable, & qu'il ne s'etoit point formé peu à peu & par degrés; ce qui prouve manifestement, qu'à cause de la lumiere du reste du Soleil, cet an-

neau n'a pu devenir viſible, qu'aprés avoir aquis une largeur ſuffiſante pour faire impreſsion ſur notre vüe.

XXV. Il convient auſsi de remarquer ici, que ceux qui ont regardé directement le Soleil par un tube Aſtronomique, ont vu plus longtems l'anneau, que ceux qui ont conſideré l'Image du Soleil repreſentée ſur le papier. Les premiers l'ont apperçû pendant l'eſpace de 82″, au lieu qu'il s'eſt à peine montré aux autres pendant une minute entiere. La raiſon de cette difference vient ſans doute de ce que ceux qui regardoient le Soleil, recevoient une plus forte impreſsion de ſes rayons, & pouvoient par conſequent remarquer l'anneau, lorsque ſa largeur étoit encore fort petite, au lieu que l'image du Soleil ſe peignant beaucoup plus foiblement ſur le papier, il n'eſt pas étonnant que l'anneau ait commencé à y paroître plus tard, & ait fini plutot; puisqu'ayant encore une largeur aſſez conſiderable, l'impreſsion qu'en recevoit le papier étoit pourtant trop foible pour être apperçüe.

XXVI. C'eſt auſsi pour cela que tant avant qu'aprés l'anneau, lors que le Soleil paroiſſoit en croiſſant, les pointes de ſes cornes ne s'exprimoient pas parfaitement ſur le papier, mais elles paroiſſoient obtuſes, & comme coupées vers les extremités; phénomene, dont la cauſe eſt manifeſte par tout ce que nous avons dit. En effet les extremités des pointes G & G (Fig. I.) étoient trop étroites, pour que les rayons qui en partoient, produiſiſſent leur image ſur le papier, ou dans l'oeil. Car, dés là que la largeur de cette pointe ne ſurpaſſoit pas le diametre d'une Etoile, qui auroit été inviſible dans cet endroit, elle ne pouvoit arriver à l'oeil de l'obſervateur; & dans l'endroit où l'on voyoit le bout des cornes, il y avoit déjà une largeur aſſez conſiderable. Ce phénomene eſt donc ſemblable à celui que nous avons rapporté ci-deſſus, par rapport à la largeur que l'anneau doit avoir, avant que d'affecter le ſens de la vüe.

XXVII. Pour cette cauſe donc, il ne faut pas placer le commencement de l'anneau à l'inſtant, où la diſtance des centres du Soleil & de la Lune excede de 40″ la difference des demi-diametres, ſi tant eſt que nous eſtimions juſte la réfraction horizontale dans la Lune

en la

en la faisant de 20''; mais le commencement de l'anneau doit être placé où sa largeur devient assez grande, pour surpasser le diametre des Etoiles invisibles dans cette région. Quant à moi, la largeur de l'anneau, au moment qu'il a paru, ne m'a pas semblé moindre que de 20''; d'où l'on peut inferer que l'anneau ne devient visible, que quand sa largeur s'est accrüe au delà de 20'', & qu' alors il commence à se montrer tout à coup avec cette largeur. On ne sauroit pourtant définir ce terme avec certitude, puisqu' à proportion de la bonté du tube par lequel on regarde le Soleil, on apperçoit l'anneau se fermer plutot, ou plus tard; & lorsqu'on reçoit l'image du Soleil sur le papier, cette difference s'etend encore plus loin.

XXVIII. Pour définir par le calcul les Eclipses annulaires de Soleil, soit Fig. 1

le demi-diametre apparent du Soleil $= a$

le demi-diametre apparent de la Lune $= b$

& la difference des demi-diametres $a - b = d$.

Soit de plus la droite AB la route apparente du centre de la Lune à l'egard du centre du Soleil, qui soit consideré comme immobile en S. Alors la perpendiculaire SL tombant sur AB fournira la moindre distance des centres, qui soit $SL = c$, & cette distance SL sera fort petite, si l'Eclipse est annulaire. Que l'Eclipse commence, lorsque le centre de la Lune parviendra en A, & que la fin tombe en B; la droite SA aussi bien que SB sera donc égale à la somme des demi-diametres $a + b$; & parceque SL est si petite, la droite même AB, ou la route apparente, que le centre de la Lune décrit depuis le commencement jusqu'à la fin, pourra être censée égale à la somme $SA + SB$, en sorte que AB soit $= 2a + 2b$.

XXIX. Soit de plus t le tems de toute l'Eclipse, & le centre de la Lune peut être supposé parcourir l'espace $AB = 2a + 2b$ d'une maniere uniforme pendant le tems t. Ces choses etant posées, l'anneau commençera à paroître, lorsque le centre de la Lune sera parvenu en M, en sorte que SM soit égal à la difference des demi-diametres $a - b = d$, augmentée d'abord de 40'', & ensuite diminuée de la quantité que doit avoir la largeur de l'anneau, avant que de devenir visible. Si donc nous supposons que l'anneau ne puisse être apperçu,

 à moins

à moins que sa largeur ne surpasse 20″, le commencement de l'anneau tombera sur M, en sorte que $SM = d + 40'' - 20'' = d + 20''$; & de la même maniere, en prenant $SN = d + 20''$, la fin de l'anneau s'accordera avec le lieu du centre de la Lune N. Pourvû donc que $d + 20''$ soit plus grand que $SL = c$, l'Eclipse sera annulaire, c'est à dire, pourvû que la moindre distance des centres SL soit moindre que $d + 20''$.

XXX. On trouvera donc la durée de l'anneau, en cherchant la quatrieme proportionelle aux distances AB, MN & de tems t, Or ML sera $= \sqrt{((d+20'')^2 - u)}$, & par conséquent $MN = 2(\sqrt{(d+20'')^2 - cc})$, d'où si l'on nomme le tems, pendant lequel l'anneau est visible, $= \theta$, on aura

$$2a + 2b : 2\sqrt{((d+20'')^2 - cc)} = t : \theta$$

& par conf. $(d+20'')^2\, tt - cc\, tt = (a+b)^2\, \theta\theta$.

De là, si la durée de l'anneau θ est connüe, aussi bien que la durée de l'Eclipse entiere t, & les demi-diametres apparens du Soleil & de la Lune a & b, d'où l'on a $d = a - b$, on conclurra réciproquement de l'observation de l'Eclipse annulaire la moindre distance des centres du Soleil & de la Lune $SL = c$. Car on aura

$$c = \sqrt{\left((d+20'')^2 - (a+b)^2 \frac{\theta\,\theta}{t\,t}\right)}$$

XXXI. 'A présent, si nous voulons appliquer cette formule à la derniere Eclipse annulaire de Soleil, nous avions

le demi-diametre apparent du Soleil $a = 952''$
le demi-diametre apparent de la Lune $b = 898$

& par conf. $a - b = d = 54''$, & $d + 20'' = 74''$.

Ensuite le tems de l'Eclipse entiere, recueilli des observations, est 3^h, $6'$, & le tems de la durée de l'anneau $1'$, $22''$; d'où résultera $t = 11160''$ & $\theta = 82''$, & à cause de $a + b = 1850$, on trouvera la moindre distance des centres $SL = c = \sqrt{(74^2 - \frac{1850^2\ 82^2}{11160^2})} = \sqrt{5291} = 72''$, $44'''$. La moindre distance des centres auroit donc été $72\frac{3}{4}$ secondes, que par le calcul j'avois néanmoins trouvée seulement de $51''$.

XXXII.

XXXII. Or j'ai fait voir dans ma Dissertation precedente *, où j'ai ramené cette Eclipse au calcul, que la parallaxe de la Lune, telle qu'on la suppose ordinairement dans les Tables, doit être considerablement diminuée, afin que la moindre distance des centres aille à 51″, & il faudroit qu'elle le fut encore beaucoup davantage pour que cette augmentation de la moindre distance des centres parvint jusqu'à 72″. Or, comme les élémens de cette Eclipse ne paroissent pas differer si considerablement du vrai, il est plus vraisemblable que la difference des demi-diametres *d* ne doit pas être augmentée de 20″, mais d'un moindre nombre; ce qui arriveroit, si la réfraction horizontale dans la Lune n'etoit pas mise à 20″, mais seulement à 15″; car alors, au lieu de $d + 20$, il faudroit écrire $d + 10''$, ou 64″, d'où résulteroit $c = 62\frac{1}{2}''$, en sorte que la distance des centres trouvée par le calcul de 51″ devroit seulement être augmentée de $11\frac{1}{2}$; or il est assez probable que les élémens de cette Eclipse demandent cette petite correction.

* Voyez. *Mem.* de 1747. p. 250. & s.

XXXIII. Ces argumens établissent donc d'une maniere indubitable, que la Lune a aussi une Atmosphere, quoiqu'elle soit peut-être encore plus déliée, que ne l'estiment nos observations. Car le disque du Soleil ayant reçu un accroissement remarquable vers le milieu de l'Eclipse, quoiqu'on n'ait pas pu le mesurer avec exactitude, ce phénomene ne peut être attribué à aucune autre cause qu'à l'Atmosphere de la Lune. Je ne demande pourtant pas, qu'on fasse trop de fonds sur les déterminations que j'ai données pour la réfraction des rayons qui passent par l'Atmosphere de la Lune; & il est même fort vraisemblable par les observations comparées à la Theorie, que la réfraction horizontale de la Lune, que j'avois mise à 20″, va à peine au delà de 10″; d'où le diametre du Soleil peut recevoir un accroissement de 20″. Mais il est encore moins possible d'etablir quelque chose de certain sur la diminution de cette réfraction, d'une maniere qui convienne aux rayons qui passent plus loin de la Lune; quoique cette diminution paroisse si grande, que la réfraction devient tout à fait imperceptible, pour les rayons qui traversent l'Atmosphere de la Lune à quelques minutes de distance de son bord.

XXXIV. S'il nous arrivoit d'obſerver encore une fois une ſemblable Eclipſe annulaire de Soleil, il faudroit ſoumettre à une meſure exacte tous les phénomenes que nous fourniroit l'accroiſſement du disque du Soleil, afin de définir par là non ſeulement la réfraction des rayons qui raſent le bord de la Lune, mais encore la Loi que ſuit la refraction, à l'egard des rayons qui paſſent plus loin de la Lune. Mais comme il n'eſt presque pas permis de nous attendre encore à une pareille Eclipſe, il faudra recourir à d'autres phénomenes, qui s'offrent plus ſouvent à nos regards. De ce genre ceux qui nous paroiſſent les plus propres au but dont il s'agit, ce ſont les occultations des Etoiles fixes par la Lune; car, comme on peut appercevoir une Etoile fixe jusqu'à ce qu'elle devienne contiguë à la Lune, il faudra qu'on remarque dans ſon lieu quelque changement, qui proviendra de la réfraction Lunaire, pourvû que les inſtrumens ſe trouvent aſſez exacts pour indiquer ces petits détails.

XXXV. Qu'on faſſe donc choix d'une Etoile fixe, ſi voiſine de celle qui ſouffrira l'occultation de la Lune, qu'on puiſſe les voir toutes deux à la fois par le tube; & que peu de tems avant que l'occultation arrive, on meſure par le moyen d'un excellent Micrometre la diſtance de ces Etoiles, qui paroit pouvoir ſe trouver à une ſeconde prés, pourvu que la longueur du tube ne ſoit pas moindre de dix pieds, & que la diſtance des Etoiles n'excede pas 15'. De cette maniere, parce que les rayons qui partent de l'Etoile qui va entrer dans l'occultation, ne ſouffrent encore aucune réfraction, on trouvera la vraye diſtance de ces Etoiles aſſez exactement exprimée en ſecondes. Alors qu'on attende l'occultation, & qu'au moment même où elle arrive, on meſure de nouveau la diſtance de ces Etoiles, en remarquant la difference entre cette diſtance actuelle, & celle qui avoit été trouvée auparavant; & de la comparaiſon de ces diſtances on conclurra aiſément la réfraction horizontale de la Lune, pourvû que le diametre apparent de la Lune ait été connu, auſſi bien que ſa ſituation à l'egard des deux Etoiles au moment de l'occultation; & ſi l'on ne peut déterminer ces choſes en même tems par l'obſervation, il n'y a qu'à les tirer de la Theorie du mouvement de la Lune.

XXXVI.

XXXVI. En effet, soit la distance vraye des Etoiles $= m''$, que le Micrometre aura indiquée longtems avant l'occultation, & qu'au moment même de l'occultation, l'Etoile qui va la souffrir, paroisse au bord de la Lune au point S; que l'autre Etoile soit en A, & alors supposons que la distance A S de ces Etoiles soit trouvée moindre, en sorte que AS soit $= m'' - \mu''$. De plus, comme par la Theorie le demi-diametre apparent de la Lune est assez exactement donné, & qu'on peut connoître l'angle ASL, ou par la Theorie, ou par la durée de l'occultation, ou de quelque autre maniere; soit cet angle ASL $= \phi$, & parce qu'à cause de la réfraction le lieu de l'Etoile s'eloigne du centre de la Lune, que le vrai lieu de l'Etoile soit dans ce moment en s, on aura A$s = m''$, & si At = As on retranche ST $= \mu''$, d'où à cause de l'angle S$st = 180° - \phi$, on conclurra assez exactement l'effet de la réfraction S$s = \frac{\mu''}{\text{cos}(180° - \phi)}$ $= - \frac{\mu''}{\text{cos}\,\phi}$, à la moitié duquel la réfraction horizontale de la Lune doit etre censée égale. Fig. 2.

XXXVII. On fera bien de choisir, pour parvenir à cette fin, les occultations dans lesquelles l'Etoile fixe S entre sous le bord obscur de la Lune, ce qui arrive vers le premier quartier. Car si l'Etoile arrive au bord éclairé de la Lune, sa lumiere est déjà offusquée avant l'occultation par l'eclat de la Lune, de maniere qu'elle disparoit avant le moment de l'occultation, à moins qu'elle ne soit de la premiere grandeur. En effet, quoique dans ce cas le bord de la Lune ne paroisse pas, cependant le moment même de l'occultation indique cet instant, où l'Etoile étoit contiguë au bord de la Lune. Cependant il ne sera pas inutile d'examiner aussi quelquefois l'arrivée des Etoiles au bord éclairé de la Lune, pour connoître par là, s'il y a quelque difference entre la réfraction auprés du bord éclairé, & la réfraction auprés du bord obscur? Car l'Atmosphére de la Lune étant continuellement exposée aux rayons du Soleil du coté de la région éclairée, on a lieu de soupçonner qu'elle est tellement attenuée dans ce tems-la,

que

que la réfraction en devient beaucoup moindre. Et c'eſt peut-être là la cauſe, qui a empêché de remarquer jusqu'ici cet effet de la réfraction dans les occultations.

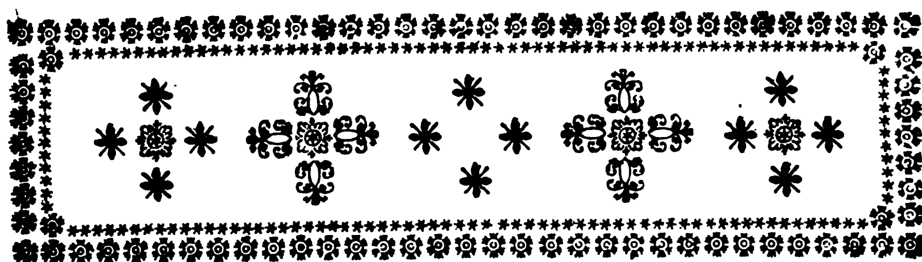
XXXVIII. Enſuite une des choſes auxquelles il faut apporter le plus de ſoin, c'eſt, avant que l'Etoile ſe cache, de rechercher perpetuellement, & à chaque moment, avec une extrême diligence, ſa diſtance de l'autre Etoile fixe, parce que nous avons prouvé que cette diſtance doit diminuer peu à peu, avant ſon arrivée au bord de la Lune. Car, par cette ſuite d'obſervations, & en appellant la Theorie au ſecours, on pourra conclurre pour chaque Obſervation la diſtance apparente de l'Etoile au bord de la Lune, & l'on pourra déterminer la réfraction qui lui convient, d'une maniere ſemblable à celle qui j'ai recommandée ci-devant pour le moment même de l'occultation. Et aprés que pluſieurs Obſervations de cette nature auront été faites avec exactitude, on pourra s'en ſervir pour corriger la Table donnée au §. XXI. ou plutot pour en dreſſer ſans peine une nouvelle, à l'aide de laquelle tous les phénomenes, qui naiſſent de l'Atmosphere de la Lune, pourront dans la ſuite être aſſignés avec beaucoup d'exactitude.

XXXIX. On n'a donc pas le moindre ſujet de s'etonner que cette célébre Queſtion, agitée déjà depuis longtems parmi les Aſtronomes; *Si la Lune a une Atmoſphere, ou non?* n'ait pas encore été decidée. Car, quoique les occultations des Etoiles fixes par la Lune arrivent trés fréquemment, cependant l'effet de la réfraction eſt ſi petit dans les Etoiles fixes elles-mêmes, qui ſouffrent l'occultation, qu'on ne peut l'appercevoir en aucune maniere, à moins que leurs diſtances n'ayent déjà été trés ſoigneuſement examinées par d'autres, & qu'on ne les meſure de nouveau avec toute l'exactitude poſſible, vers le tems même de l'occultation. Or il n'y a peut-être eu encore aucun Aſtronome, auquel il ſoit venu dans l'eſprit de ſuivre cette voye pour faire des recherches ſur l'Atmosphere de la Lune; ou s'il y en a eu qui ſoient par hazard tombés ſur cette methode, ils ont été forcés d'abandonner leur travail, faute d'inſtrumens aſſez exacts. Je ne ſai, ſi ceux qui voudroient préſentement prendre cette peine, ne feroient

feroient pas bien de préferer le Micrometre de feu Mr. *Kirch*, pourvû que les vis se terminent interieurement en pointe, à tous ceux qu'on fait à present avec tant de soin & à grands fraix. Car pourvû que les pointes des vis soyent une fois appliquées aux deux Etoiles, on s'appercevra facilement, si la distance des Etoiles diminuë, & la diminution même se définira avec tout aussi peu de peine par la révolution des vis.

XL. Les principes d'une saine Physique mettent eux mêmes l'Atmosphere de la Lune hors de doute; mais ce que les Observations nous ont découvert, n'en est pas moins admirable, c'est que cette Atmosphere de la Lune soit d'une si grande tenuïté, que son effet est presque imperceptible. Car la réfraction horizontale sur la Terre étant de plus d'un demi degré, si la Lune avoit une pareille Atmosphere, les Astres, en approchant du bord de la Lune, feroient transportés de leur place de plus d'un degré. Mais cet effet surpassant à peine 20″, il faut que l'air de la Lune soit presque 200 fois plus rare que le notre: d'où l'on peut conclurre, ou qu'il ne monte point du tout de vapeurs de la surface de la Lune, ou que la matiere de la Lune est si solide & si séche, qu'elle n'est presque sujette à aucune évaporation. Aussi par l'usage des longs tubes les Astronomes ont déjà appris, que ces taches obscures dans la Lune, qui sont prises vulgairement pour des eaux & des lacs, doivent plutot être des lieux arides, des cavernes, ou des forets, que des contrées humides.





SUR LE FROTTEMENT
DES CORPS SOLIDES,

PAR M. EULER.



I.

ON a remarqué, que dans la pluspart des machines le frottement est si considerable, qu'une bonne partie des forces, qui sont requises pour mettre la machine en mouvement, n'est employée qu'à surmonter cette résistance: de sorte que s'il étoit possible de délivrer les machines du frottement, une beaucoup plus petite quantité de forces seroit suffisante à produire le même effet. Tous les Mecaniciens conviennent aussi, qu'un des principaux articles, desquels dépend la derniere perfection des machines, consiste dans la diminution du frottement, & c'est dans cette vuë, qu'ils ont taché depuis longtems de rechercher la nature & la quantité du frottement, pour en découvrir les moyens de le diminuer, ou de le faire evanouïr tout à fait, s'il étoit possible.

II. Le frottement se manifeste toutes les fois, qu'un corps doit glisser sur la surface d'un autre corps; car quelque polies, que soient les surfaces des corps qui glissent les uns sur les autres, le mouvement y rencontre toujours quelque résistance, qui le détruit bientôt entierement, à moins qu'il ne soit renouvellé par l'action réiterée de nouvelles

velles forces. Cependant il n'y a aucun doute, que le frottement ne devienne d'autant plus petit, plus les surfaces des corps, qui glissent les uns sur les autres, seront polies & unies, afin qu'il ne se trouve plus de petites inégalités, qui puissent arreter le mouvement. C'est par cette raison, que les traineaux glissent assez aisément sur la glace; & que dans les machines on éprouve une diminution considerable du frottement, en enduisant de la graisse les surfaces, qui se frottent mutuellement; puisque la graisse sert à rendre ces surfaces plus égales & plus unies.

III. Cependant les matieres, dont on se sert dans la construction des Machines, comme les bois, & les metaux, ne sont pas susceptibles d'un tel degré de polissure, que le frottement ne soit pas encore trés considerable: & l'experience a fait voir, que la résistance, dont toutes ces matieres s'opposent au mouvement, est presque la même, & égale à une partie fort considerable de leur poids entier. Mr. *Amontons* soutint, que le frottement étoit toujours égal au tiers du poids d'un corps, qui se mouvoit sur une surface horizontale, ou généralement au tiers de la force, dont le corps étoit pressé contre la surface, sur laquelle il glissoit. D'autres ont trouvé la quantité du frottement un peu differente, & Mr. *Bilfinger* ne donne au frottement que la quatriéme partie de la pression. Comme cela dépend du degré de polissure, qu'ont les surfaces des corps, il n'est pas surprenant, que les experiences ne donnent pas toujours la même quantité de frottement.

IV. Mais une circonstance bien remarquable, dont tous ceux qui ont examiné le frottement par les experiences, sont d'accord; c'est que la quantité du frottement dépend uniquement du poids, ou de la force, dont un corps est pressé contre la surface, sur laquelle il est entrainé; & que ni la figure du corps, ni la grandeur de sa base, n'entrent en aucune maniere dans la détermination du frottement. Car si le frottement étoit causé par l'arrachement des petits filets, ou par l'enfoncement des petites prominences, qui se trouvent sur les surfaces, qui glissent l'une sur l'autre, on devroit penser, que plus les surfaces, qui se touchent seroient larges, le frottement en devroit devenir plus grand.

grand. Peut-être, même, que cette circonstance contribuë quelque chose, en des matieres fileuses, & d'autres d'une semblable nature; mais dans les bois & metaux, dont on a fait principalement les experiences, on doit convenir que la largeur de la base ne sert, ni à augmenter, ni à diminuer le frottement.

Fig. 1. V. Donc si un corps ABCD est pressé contre la surface MN par une force quelconque GP, qui soit $= P$, soit que ce soit le poids du corps ABCD, si la surface MN est horizontale, ou qu'il y ait encore une autre force, dont le corps soit poussé à la surface; dans ce cas il faut une certaine force EF, avant qu'on soit en état de remuer ce corps, & de le tirer suivant la direction BN. On sait, que s'il n'y avoit point de frottement, la moindre force EF seroit capable de mettre ce corps en mouvement. Mais si le frottement est égal à un tiers de la force P, ou que nous le posions $= \frac{m}{n} P$, pour ne nous pas borner à une hypothese, qui pourroit être trop particuliere; alors tant que la force EF sera plus petite que $\frac{m}{n} P$, le corps demeurera en repos, de même que s'il n'étoit sollicité d'aucune force. Or dès qu'on employera une force EF plus grande que $\frac{m}{n} P$, le corps sera actuellement entrainé selon la direction BN; mais le mouvement ne sera produit, que par l'excés de la force EF sur le frottement $\frac{m}{n} P$.

VI. Le frottement doit donc être regardé comme une force $= \frac{m}{n} P$, dont le corps est tiré en arriére selon la direction AM, qui est toujours contraire à celle du mouvement du corps, & passe par l'attouchement AB. Or elle est bien differente des autres forces réelles, qui peuvent agir sur le corps; car elle ne produit aucun effet, que lorsque le corps se trouve actuellement en mouvement, & ce n'est qu'alors, qu'elle fait le même effet, que si le corps ABCD étoit effectivement



ctivement sollicité en arriere selon la direction AM. Tant que le corps est en repos, & qu'il n'est tiré que par des forces moindres que le frottement, tout son effet ne consiste qu'en détruisant celui que ces forces devroient produire elles mêmes. Ainsi nommant la force EF = F, le corps n'en recevra aucun mouvement, à moins que F ne surpasse la valeur du frottement $\frac{m}{n}$ P; mais dés que F > $\frac{m}{n}$ P le corps recevra une acceleration, qui convient à l'excés F − $\frac{m}{n}$ P; & il ne s'ensuit pas, que si F < $\frac{m}{n}$ P, l'acceleration devienne negative.

VII. Cela paroitra d'abord fort étrange, & contraire à la loi de continuité, de sorte que la nature semble faire ici un saut, ce qui n'arrive jamais dans l'action des autres forces. Cependant on peut se representer l'action du frottement, d'une maniere, qui levera tous les doutes, & qui sera conforme à l'action des autres forces: car je ferai voir, qu'on pourra produire par la seule action de la gravité un effet tout à fait semblable à celui du frottement, par lequel on pourroit même découvrir la nature du frottement, quand même elle ne seroit pas encore connuë par l'experience. Cette consideration servira aussi à faire voir, en quoi consiste la veritable cause du frottement, & d'où vient cette résistance, qu'il oppose au mouvement. Car quoique peut-être la veritable cause du frottement ne convienne pas precisément avec celle que je vai réprésenter, la parfaite ressemblance qu'on y remarquera, ne laissera aucun doute sur la possibilité des effets, qui paroissent si étranges.

VIII. Sur la ligne horizontale MN soient *a*G, *b*G, deux plans également inclinés, qui forment en G l'angle *a*G*b*, dans lequel soit enfoncé le corps ABCD avec sa base pointuë AGB, dont l'angle AGB soit precisément égal à *a*G*b*. Dans cette situation le corps ABCD sera non seulement en équilibre, mais aussi une petite force EF, qui lui est appliquée horizontalement ne sera pas capable de le

mettre en mouvement, quoique les faces, dont ce corps touche les plans inclinés ſoient parfaitement polies, & qu'aucun frottement n'y ait lieu. Car pour que la force QF puiſſe mouvoir le corps ABCD, il faut qu'elle le faſſe monter ſur le plan incliné Gb, & partant elle doit être plus grande que la partie du poids du corps, laquelle le ſollicite dans la direction contraire GQ. Ainſi ce corps ABCD ſe trouve dans un état fort ſemblable à celui du frottement, puisque la force EF n'eſt pas capable de le mouvoir, tandis qu'elle eſt moindre que le degré requis pour vaincre la pente du plan incliné.

IX. La reſſemblance paroitra encore davantage, ſi nous déterminons la quantité de la force EF, qui eſt requiſe pour mettre le corps en mouvement. Soit pour cet effet l'angle MGa = NGb = α, le poids du corps ABCD = P, dont il eſt ſollicité en bas ſelon la direction verticale GP; & la force EF = F, qui tire le corps ſuivant la direction horizontale EF. Puisque le corps ne peut être mis en mouvement, que ſelon la direction Gb, je décompoſe la force EF = F ſuivant la direction EH parallele à Gb, & FH qui y eſt normale: l'angle FEH étant = NGb = α, la force EH ſera = F coſ α, & ce n'eſt que celle-cy qui eſt employée à mettre le corps en mouvement. Or dés que le mouvement va commencer, le poids du corps, ou la force GP = P s'y oppoſe par ſa partie GQ, qui réſulte de la réſolution ſuivant les directions GQ & PQ, dont celle-cy eſt perpendiculaire à GQ. Donc l'angle GPQ étant = α, la force GQ ſera = P ſin α: d'où l'on voit que le corps ne pourra être mis en mouvement, que la force F coſ α ne ſoit pas plus grande que P ſin α.

X. Donc tant qu'il ſera F coſ α < P ſin α, le corps ABCD reſtera en repos, & ne recevra aucun mouvement de l'action de la force EF = F. Or ſi F coſ α = P ſin α ou F = P tang α, le corps ſera, pour ainſi dire, en équilibre, ou tout prêt à ſe mouvoir, dés que la force F devient tant ſoit peu plus grande que P tang α: & quand cela arrive que F > P tang α, l'acceleration du corps ſuivant la direction G b ſera produite par l'excés de la force EH = F coſ α ſur P ſin α, c'eſt à dire par F coſ α — P ſin α. Par conſéquent la réſiſtance,

ce, qu'il faut vaincre dans ce cas, avant que le corps puisse être remué, sera $= P \sin \alpha$, laquelle étant égale à une partie du poids du corps, & ne dépendant nullement de la largeur de la base A G B, dont ce corps touche la surface *a* G *b*, il en paroit une assez parfaite ressemblance entre ce cas, & celui du frottement; & pour rendre ces cas égaux, on n'a qu'à faire $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, dans l'hypothese d'*Amontons* ou les angles M G *a*, & N G *b* $= 19^\circ, 29'$: or dans l'hypothese de Mr. *Bilfinger* ces angles seront $= 14^\circ, 28'$, à cause de $\sin \alpha = \frac{1}{4}$.

XI. Il en sera de même, si la base A B du corps A B C D est formée de plusieurs angles obtus A *cdcdcdc* B, tous semblables à celui A G B, que nous venons de considerer, & que la surface M N soit taillée d'une maniere semblable, en sorte que les inegalités de la base & de la surface soient parfaitement d'accord. Car dans ce cas, si chacun des angles, que constituënt les plans inclinés *cd* avec la ligne horizontale M N, est $= \alpha$, le corps A B C D, dont le poids est $= P$, ne sera remué par la force horizontale E F $= F$, qu'il n'y soit $F \cos \alpha > P \sin \alpha$, ou $F > P \tang \alpha$: & tant que la force F sera moindre que $P \tang \alpha$, le corps restera en repos. On voit bien, que la même chose arrivera, quelque grand que soit le nombre des prominences *d*, *d*, &c. & il n'est pas même nécessaire, que toutes les inclinaisons soient égales entr'elles, pourvu qu'il ne s'y trouve de plus grandes que l'angle α; car quand même il y auroit quelques angles moindres, ceux-cy ne faciliteroient point le mouvement. Fig. 3.

XII. Si c'etoit le cas du frottement, comme il paroit fort probable, on comprendroit aisément les phénomenes du frottement, que j'ai rapportés cy-dessus, & qui regardent la difficulté de mettre un corps en mouvement. Car cette difficulté ne consisteroit qu'en ce que, pour mouvoir le corps, il faudroit qu'il montât effectivement sur un plan incliné. De là on voit que dés que le corps a commencé de se mouvoir, comme ces plans inclinés *dc*, *dc* &c. sont extrémement petits, ce corps montera & descendra alternativement; & partant puisque les descentes se font d'elles mêmes, pendant que le corps se meut, la difficulté du frottement ne se fait sentir que par intervalles, c'est à dire, dans les moments où le corps est obligé de monter. D'où il

paroit

paroit, qu'on peut tirer cette conséquence; que pendant que le corps est actuellement en mouvement, l'effet du frottement ne sera que la moitié de celui qu'on éprouve, avant qu'on puisse mettre en mouvement le corps.

XIII. Donc afin que la force EF = F puisse imprimer au corps ABCD un mouvement, elle doit être plus grande que P tang α, mais dés que le corps se meut, la résistance du frottement sera diminuée à demi. Par consequent pour calculer l'acceleration du corps, on ne doit diminuer la force sollicitante, que de $\frac{1}{2}$ P sin α, de sorte que l'acceleration sera proportionelle à F cos $\alpha - \frac{1}{2}$ P sin α, ou peut-être à F $- \frac{1}{2}$ P tang α, puisque dans les descentes alternatives, l'acceleration est augmentée par la gravité. Ceux qui ont examiné le frottement par les experiences, se sont bornés uniquement à en découvrir la quantité avant que les corps fussent mis en mouvement. Il seroit donc fort à souhaiter, qu'on fit aussi des experiences, d'où l'on puisse conclure la quantité du frottement pendant que les corps sont en mouvement: & je ne doute presque pas, qu'on ne la trouveroit considerablement moindre: puisqu'on sait, que pour mettre en mouvement une machine, il faut que les premiers efforts soient plus grands, que ceux qu'on empoye dans la suite pour continuer le mouvement.

Fig. 4. XIV. On se sert ordinairement du plan incliné pour connoitre la quantité du frottement. Ayant mis le corps P sur le plan AB, on éleve succesivement ce plan depuis sa situation horizontale AC, jusqu'à ce que le corps P vient sur le point de descendre: alors on mesure l'angle B de l'inclinaison du plan AB, ou les cotés du triangle rectangle ABC, d'où l'on tirera la valeur de la partie de la pesanteur qui agit selon la direction AB, qui sera = P sin B $= \frac{AC}{AB}$ P, & ce sera à cette force que le frottement du corps P sur le plan AB est égal. Or comme le frottement est proportionnel à la presion, dont le corps P est apprimé au plan, cette presion étant = P cos B $= \frac{BC}{AC}$ P: on apprendra par cette experience que le frottement est à la presion, comme

sin

fin B à cof B, ou comme AC ò BC : cette raifon du frottement à la prefsion fera donc comme la tangente de l'angle B au finus total. Ce fera donc la force du frottement, qu'on doit vaincre, avant que le corps P puiffe être mis en mouvement.

XV. Mais pour connoitre fi le frottement, que le corps éprouve pendant qu'il fe meut actuellement, eft le même ou non : on pourra determiner la quantité du frottement pour le cas du mouvement, par le moyen du même plan incliné. On n'aura qu'à élever le plan AB un peu plus que dans le cas precedent, afinque le corps gliffe actuellement fur ce plan en bas. Soit l'angle de l'inclinaifon $B = \alpha$; & la prefsion du corps P fur le plan fera $= P \cos \alpha$, & la force dont il eft follicité fuivant la direction AB fera $= P \sin \alpha$. Suppofons que dans le mouvement le frottement foit à la prefsion comme μ à 1. & le frottement pour le cas que nous confiderons fera $= \mu P \cos \alpha$; qui étant retranché de la force acceleratrice $P \sin \alpha$, le corps fera encore tiré felon la direction de fon mouvement par la force $= P \sin \alpha - \mu P \cos \alpha = P(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$.

XVI. Que le corps P ait commencé fon mouvement depuis le repos en P, & qu'il foit parvenu aprés un tems $= t$ en M. Soit l'espace parcouru $AM = s$, & la viteffe en M égale à celle, qu'un corps acquiert par la chûte de la hauteur $= v$, & les principes de Mecanique nous fourniffent cette équation $P\,dv = P(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)\,ds$ ou en prenant l'integrale $v = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)s$, de là l'element du tems fera $dt = \frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{ds}{\sqrt{(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)s}}$, dont l'integrale eft $t = \frac{2\sqrt{s}}{\sqrt{(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}$. Cette exprefsion, fi l'on exprime l'espace parcouru s en milliemes parties du pieds de Rhin, donnera le tems t exprimé en minutes fecondes, lorsqu'on divife cette exprefsion par 250; de forte que fi le tems t eft exprimé en fecondes, & l'espace s en milliemes parties du pied de Rhin, on aura cette équation $t = \frac{\sqrt{s}}{125\sqrt{(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}$.

XVII. Suppoſons maintenant qu'on ait meſuré exactement le tems, que le corps P a mis à deſcendre ſur le plan incliné AB, dont l'angle de l'elevation ſur l'horizon, ou l'angle B ſoit $= \alpha$. Soit la longueur du plan AB $= m$ parties milliemes du pied de Rhin: & le tems de la deſcente par ce plan $= n$ minutes ſecondes: & nous aurons cette équation:

$$n = \frac{\sqrt{m}}{125\sqrt{(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}$$

ou $15625\, nn\, (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = m$, d'où nous tirerons la valeur de la lettre μ:

$$\mu = \text{tang}\,\alpha - \frac{m}{15625\, nn\, \cos\alpha}$$

Donc moyennant une ſeule experience on ſera en état de determiner la raiſon du frottement à la preſsion, qui a été ſuppoſée comme μ à 1 pour le cas du mouvement du corps P.

XVIII. De cette formule il eſt d'abord clair, que ſi l'angle α eſt égal à celui-cy, où le corps P demeure encore en repos, alors la valeur du frottement ſera préciſement la même, qu'on aura trouvée pour le repos. Car puisque le corps dans ce cas ne reçoit aucun mouvement, il pourra être regardé, comme s'il faloit un tems infini, pour achever ſa deſcente. Dans ce cas donc le tems n deviendra infini, & la formule donnera $\mu = \text{tang}\,\alpha$, ou bien le frottement ſera à la preſsion comme la tangente de l'angle B au ſinus total, tout comme nous avons trouvé. Mais dés qu'on elevera le plan BA un peu davantage, le corps deſcendra actuellement, & ſi l'on obſerve le tems, qu'il emploie pour parcourir l'eſpace AB, notre formule fera voir la valeur de μ, qui conviendra au mouvement, & qui ſera, à ce qu'il paroit vraiſemblable, plus petite que dans le cas précedent du repos. On s'aſſurera encore mieux ſur cette matiere, ſi on donne au plan AB ſucceſsivement pluſieurs diverſes inclinaiſons, pour voir ſi chacune donnera la même valeur pour μ: car en cas qu'on en obtiendroit des valeurs differentes, on en devroit conclure, que le frottement ne ſeroit

roit pas le même pour tous les degrés de viteſſe, ce qui ne paroit pas pourtant probable.

XIX. En cas que la force du frottement fut plus petite dans le mouvement, que dans le repos, il en réſulteroit un phenomene bien étrange, qui meriteroit toute l'attention poſsible. Pour l'expoſer diſtinctement, ſoit α l'angle B du plan incliné, où le poid P ſe ſoutient encore à peine en repos: deſórte que pour peu qu'on augmente cet angle, le poids descendroit actuellement ſur ce plan incliné. Donc pour l'etat du repos la valeur du frottement ſera $\mu = \frac{\text{ſin}\,\alpha}{\text{coſ}\,\alpha}$: or ſuppoſant, que dés que le corps ſe meut actuellement, le frottement devint plus petit, ſoit pour l'etat du mouvement la valeur du frottement $\mu = \nu\,\text{ſin}\,\alpha : \text{coſ}\,\alpha$, où ν marque une fraction plus petite que l'unité. A preſent qu'on augmente l'angle B, afin que ce cas du mouvement ait lieu, & ſoit maintenant l'angle B $= \varphi$: de ſorte qu'on n'a qu'à écrire dans la formule trouvée cy-deſſus φ pour α & $\frac{\nu\,\text{ſin}\,\alpha}{\text{coſ}\,\alpha}$ pour μ, pour trouver le tems n'', dans lequel le corps P deſcendra par le plan incliné AB, dont la longeur eſt de m milliemes parties du pied de Rhin, le tems ſera donc: $n = \frac{V\,m}{125\,V\,(\text{ſin}\,\varphi - \nu\,\text{ſin}\,\alpha\,\text{coſ}\,\varphi : \text{coſ}\,\alpha)}$. Suppoſons à cette heure que l'angle B $= \varphi$ ne ſurpaſſe qu' infiniment peu l'angle de repos α, & on devroit croire ſuivant la loi de continuité que le mouvement du corps ſeroit infiniment lent. Mais nous verrons avec ſurpriſe, que ce mouvement s'acheve ſubitement dans un tems fini, & même aſſez court. Car ſoit $\varphi = \alpha + \omega$, où ω marque une quantité infiniment petite, & il ſera ſin $\varphi =$ ſin $\alpha + \omega$ coſ α, & coſ $\varphi =$ coſ $\alpha - \omega$ ſin α. Ces valeurs etant ſubſtituées, on aura

$$n = \frac{V.m}{125\,V(\text{ſi}\,\alpha + \omega\,\text{coſ}\,\alpha - \nu\,\text{ſi}\,\alpha + \nu\omega\,\text{ſi}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha)} = \frac{1}{125}V\frac{m}{(1-\nu)\,\text{ſin}\,\alpha}.$$

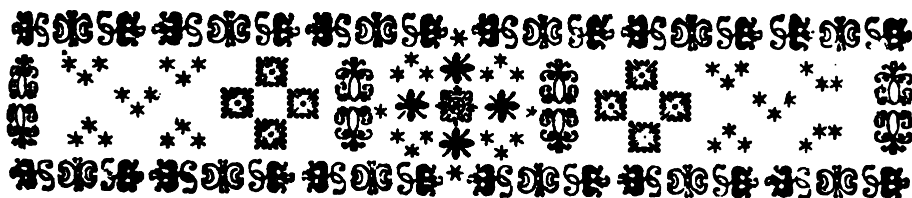
XX. Pour mieux faire ſentir le phenomene, que cette formule renferme, ſoit la longueur du plan incliné AB exactement $= 15625$ milliemes parties du pied de Rhin, ou ſoit AB égale à la hauteur, par

 laquelle

laquelle un corps tombe dans une ſeconde : & le tems de la deſcente du corps P par ce plan incliné AB ſera de $n = \frac{1}{\sqrt{(1-\nu)\sin\alpha}}$ ſecondes; ſoit deplus comme Mr. *Bilſinger* a trouvé par ſes experiemes $\sin\alpha = \frac{1}{4}$, & ce tems ſeroit $n = \frac{2}{\sqrt{(1-\nu)}}$: & ſi le frottement devenoit dans le mouvement deux fois moindre, où qu'il fût $\nu = \frac{1}{2}$; ce tems ſeroit $n = 2\sqrt{2}$ ou presque de 3″. Il ne ſeroit pas donc posſible de donner à ce plan AB une telle inclinaiſon, que le tems de la deſcente ſurpaſsât 3″. Car tandis que l'angle B eſt $= \alpha$, ou moindre, le corps P ne deſcend point du tout; & dés qu'on eleve tant ſoit peu le plan au delà, la deſcente devient ſubitement ſi rapide que le corps n'emploiera qu'à peu prés 3 ſecondes, à parcourir le plan incliné AB de plus de 15 pieds. Or il eſt clair, ſi l'on éleve le plan davantage, que le tems de la deſcente deviendra encore plus petit. L'experience ſemble plutot être favorable à ce paradoxe que contraire; car on remarquera aiſément, qu'il n'eſt pas poſsible de donner à un plan incliné une telle inclinaiſon, que la deſcente ſe fit auſsi lentement, qu'on voudra : car, ou le corps ne deſcendra point du tout, ou il deſcendra aſſez vitement. Mais pour mieux rëuſſir dans ces experiences, il faut bien prendre garde, que le plan dont on ſe ſert ſoit partout également poli, afin que le frottement ſoit partout le même, car il n'y a aucun doute, que ſi le frottement étoit plus grand dans un endroit du plan, que dans un autre, on ne ſauroit tirer de l'experience aucune conſéquence bien aſſeurée.

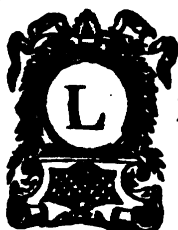


SUR



SUR LA DIMINUTION DE LA RESISTENCE DU FROTTEMENT,

PAR M. EULER.



I.

L'Experience nous ayant fait voir que la force du frottement eſt toujours égale à une certaine partie de la presſion, dont un corps eſt preſſé contre la ſurface, ſur laquelle il ſe meut, de ſorte que le frottement ne dépend ni de la gandeur de la baſe, dont le corps touche la ſurface, ni du degré de viteſſe, il n'eſt pas difficile de déterminer l'effet du frottement dans toutes ſortes de Machines par le moyen du calcul: vuque le frottement doit être regardé comme une force conſtante, qui eſt toujours directement contraire à la direction du mouvement, & qui agit dans une direction, qui paſſe par le plan de l'attouchement des corps qui ſe meuvent l'un ſur l'autre. Je me bornerai dans cette piece à rechercher l'effet du frottement dans les Machines, dont le mouvement eſt rotatoire, ou qui ſe fait autour d'un ou pluſieurs axes, & je ferai voir, combien la réſiſtance du frottement peut être diminuée par la diminution des axes, & leur mouvement ſur des roulettes: moyens, dont on s'eſt ſervi depuis quelque tems avec bien du ſuccés pour perfectionner les machines de cette eſpece. Il ſemblera d'abord étrange, que la réſiſtance du frottement, étant toujours égale à une partie determinée de la presſion, puiſſe être diminuée ſans diminuer la presſion, mais on en reconnoitra bientot la posſibilité, lorsqu'on aura égard à la nature du mouvement rotatoire,

toire, par lequel le *momentum* de la force du frottement, duquel dépend la résistence, peut-être diminué autant qu'on voudra.

Fig. 1. II. Je commencerai par considerer la rouë AIK, par laquelle passe le cylindre BLM, qui lui tient lieu d'axe, lequel est soutenu dans la cavité immobile EBF, de sorte que cette rouë ne sauroit tourner autour de son centre C, sans que l'axe BLM ne se frotte sur la surface EBF. La force de ce frottement sera donc égale à une certaine partie de la pression, dont la machine s'appuye sur la surface EBF, & cette pression sera égale au poids de la rouë avec son axe, parce que tout ce poids est soutenu par l'appuy EFGH, que la figure ne répresente que d'un coté; mais quoiqu'il se trouve de l'autre coté un semblable appuy, où le frottement est le même, il sera permis de considerer ensemble ces deux frottements comme joints dans le point B. Soit donc le poids de la rouë avec son axe $= P$, qui étant égal à la pression totale sur l'appuy en B, si nous supposons le frottement à la pression comme μ à 1, le frottement en B sera $= \mu P$, ou la machine ne pourra être mise en mouvement, sans qu'on surmonte une force appliquée en $B = \mu P$, & dont la direction sera suivant la tangente BQ contraire au mouvement du point P, qu'on veut produire. Soit AP la force, qui soit $= F$, appliquée à l'extremité de la rouë A suivant la tangente AP, que je suppose horizontale, afinque par l'action de cette force la pression de la rouë sur l'appuy EF ne soit, ni augmentée, ni diminuée; & il est clair pour que la machine puisse être mise en mouvement, que le *moment* de la force $F.AC$ doit surpasser le *moment* du frottement $\mu P.BC$ où il faut qu'il soit $F.AC > \mu P.BC$, ou $F > \mu P.\frac{BC}{AC}$.

III. De là il est clair, que tant que la force $AP = F$ sera plus petite que $\mu P.\frac{BC}{AC}$, elle ne sera pas capable de remuër la machine, & s'il y a $F = \mu P.\frac{BC}{AC}$, la force du frottement sera tout à fait contrebalancée par la force F, de sorte que pour peu qu'on l'augmente, la ma-

la machine ſoit miſe en mouvement. Donc, pour vaincre le frottement dans ce cas propoſé, il faut une force $F = \mu$ P. $\frac{BC}{AC}$, qui ſoit appliquée à la rouë AIK dans une direction horizontale AP, & en même tems perpendiculaire au rayon CA. Si la valeur du coëfficient μ eſt $= \frac{1}{4}$, comme on peut ſuppoſer probablement, on trouvera cette force requiſe pour vaincre le frottement par cette analogie; Comme le rayon AC de la rouë eſt au rayon de l'axe CB, ainſi ſera la quatriéme partie du poids de la rouë, à la force cherchée. Donc quoique le frottement ſoit toujour égal à une partie déterminée de la preſſion, il eſt pourtant poſſible, qu'il puiſſe être vaincu par une force auſſi petite qu'on voudra: car on voit que plus on diminuë l'epaiſſeur de l'axe, ou ſon rayon BC, plus petite deviendra auſſi la force requiſe pour vaincre le frottement. Par là on comprendra aiſément combien il eſt important dans toutes ſortes de machines de rendre les axes, autour deſquels ſe fait le mouvement, auſſi minces qu'il ſera poſſible. Car dés qu'on pourroit reduire l'epaiſſeur des axes à la moitié, on gagneroit déjà la moitié de force, dont on avoit beſoin auparavant pour vaincre le frottement. Il eſt bien vrai que cette diminution n'eſt pas dans notre pouvoir, & qu'il faut regler l'epaiſſeur des axes ſur la charge, qu'ils doivent porter; mais il ſemble pourtant qu'on pourroit encore conſiderablement gagner de ce coté-cy, dans la pluspart des machines, où le frottement ſe réduit dans le mouvement des axes.

IV. Mais il faut bien remarquer, que la force AP, quoique je l'aye ſuppoſée horizontale, altére néantmoins la quantité du frottement, en changeant la preſſion de l'axe ſur le ſoutien ou l'appuy EBF. Car par l'action de la force AP le point d'appuy ſera transporté de B vers E & la preſſion deviendra égale à la force qui réſulte de la compoſition du poids de la rouë & de la force AP, quoique ce changement ne ſoit pas pour la pluspart conſiderable. Cependant pour mieux développer la maniere, dont la force mouvante entre à changer le frottement, je conſiderai le cas où la force $MP = F$ agit ſous une obliqui- Fig. 2.

obliquité quelconque. Pour cet effet soit ACB la ligne verticale, qui passe par le centre C de la rouë & de son axe, qui est soutenu par l'appuy immobile EF qui reçoit parfaitement une portion de l'axe. Soit CM le rayon auquel est appliquée la force $MP = F$ à angle droit CMP; & que P exprime le poids de la rouë avec l'axe. Pour trouver la force, qui résulte de la composition de ces deux forces F & P ensemble, je les considere l'une & l'autre appliquées en C comme au centre du mouvement, & ayant tiré CK perpendiculaire à CM soit $CB : CK = P : F$: & la diagonale CL du parallelogramme CBLK exprimera la force, dont la rouë sera sollicitée & apprimée contre le soutien au point N. Qu'on nomme l'angle $ACM = \phi$, & on trouvera la force $CL = \sqrt{(PP + FF + 2PF \sin\phi)}$; & pour l'obliquité de cette force ou l'angle BCN, on fera: comme CL est au sinus de l'angle CBL ou au cosinus de ϕ, ainsi BL ou CK au sinus de l'angle BCN, d'où l'on tirera $\sin BCN = \frac{BL \cos\phi}{CL}$ $= \frac{F \cos\phi}{\sqrt{(PP + FF + 2PF \sin\phi)}}$, & ensuite la tangente de l'angle BCN sera $= \frac{F \cos\phi}{P + F \sin\phi}$.

V. Ces formules donneront lieu à plusieurs reflexions: je commencerai par la recherche, de quelle grandeur doit être la force $MP = F$, afin qu'elle puisse contrebalancer le frottement. Puisque le *moment* de cette force est $= F.\,CM = F.\,CA$ & celui du frottement $= \mu.\,CB.\,\sqrt{(PP + FF + 2PF \sin\phi)}$, parce que le frottement même au point N est à la pression qui vient d'être trouvée $= \sqrt{(PP + FF + 2PF \sin\phi)}$, comme μ à 1, la machine ne sauroit être mise en mouvement, à moins qu'il ne soit $F.\,CA > \mu\,CB\,\sqrt{(PP + FF + 2PF \sin\phi)}$. Donc le frottement sera contrebalancé, si ces deux *moments* seront egaux entr'eux. Soit $CA = a$, & $CB = b$, & prenant les quarrés nous aurons $aaFF = \mu\mu bbPP + \mu\mu bbFF + 2\mu\mu bbPF \sin\phi$, d'où nous tirerons:

F =

$$F = \frac{\mu b P\,(\mu b \sin\Phi \pm \sqrt{(aa - \mu\mu bb \cos\Phi^2)})}{aa - \mu\mu bb}.$$

Ici l'ambiguité du ſigne radical ne peut avoir lieu, qu'entant que la valeur de F devient affirmative: car, puiſque nous avons ſuppoſé que le mouvement ſe fait dans le ſens NB, & que la direction de la force du frottement eſt NQ, cette ſuppoſition ne peut avoir lieu, que lorſque la valeur de F eſt affirmative. Au reſte on voit bien, que cette ambiguité reſulte du ſigne radical dans l'équation primitive; $aF = \mu b \sqrt{(PP + FF + 2\,PF \sin\Phi)}$, qui malgré ſa nature ne reçoit dans notre cas, que le ſigne +. Car le mouvement de la machine, dès qu'elle en aura, ſera acceleré par le *moment* $aF - \mu b \sqrt{(PP + FF + PF \sin\Phi)}$, où l'on comprend aiſément, que le dernier membre ne peut jamais devenir affirmatif, puiſque le frottement ne ſauroit jamais augmenter l'effet de la force ſollicitante, mais il lui eſt plutôt toujours contraire. Par conſéquent, toutes les fois qu'on aura quelque doute ſur l'ambiguité de la valeur de F, on n'aura qu'à l'introduire dans la formule $aF - \mu b \sqrt{(PP + FF + 2\,PF \sin\Phi)}$ pour voir ſi elle devient égale à zero.

VI. Pour rendre cette formule plus ſimple ſoit $\frac{a}{\mu b} = \frac{AC}{\mu BC} = n$, de ſorte que dans l'hypotheſe $\mu = \frac{1}{4}$ on ait $n = \frac{4\,AC}{BC}$, & alors la force MP = F requiſe pour vaincre le frottement ſera $F = \frac{\sin\Phi \pm \sqrt{(nn - \cos\Phi^2)}}{nn - 1}\,P$, valeur qui réſulte de l'equation: $nF - \sqrt{(P^2 + F^2 + 2\,PF \sin\Phi)} = 0$, d'où nous aurons pour le point d'appuy N, $\sin BCN = \frac{\cos\Phi}{n}$. Le cas le plus ordinaire eſt quand le rayon de la roüe AC eſt plus grand que le rayon de l'axe PC, & dans ce cas la valeur de la lettre n, étant plus grande que 4. & à plus forte raiſon celle de nn plus grande que 16, il y aura à peu prés $\sqrt{(nn -}$

 cos

$\cos\varphi^2) = n - \frac{\cos\varphi^2}{2n}$, d'où l'on voit que dans ce cas ce n'est que le signe + qui puisse avoir lieu: donc nous aurons $F = \frac{n + \sin\varphi - \frac{1}{2n}\cos\varphi^2}{nn-1}P$. De là il suit 1mo si l'angle $ACM = \varphi$ devient 0° ou 180°, on aura la force requise pour vaincre la résistance du frottement $F = \frac{n - \frac{1}{2n}}{nn-1}P$ ou $F = (\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^3})P$, & pour le point d'appuy N, $\sin BCN = \pm\frac{1}{n}$ de sorte que cet angle sera trés petit. 2do Si l'angle $ACM = \varphi = 90°$, nous aurons la force $F = \frac{n+1}{nn-1}P = \frac{1}{n-1}P = (\frac{1}{n} + \frac{1}{nn} + \frac{1}{n^3})P$, & dans ce cas la force requise à vaincre le frottement sera la plus grande, puisque toute la force est emploiée à augmenter la présion, & dans ce cas le point d'appuy sera au point B. 3tio Si l'angle $ACM = \varphi = -90°$, ou que la force tire de l'autre coté en haut, on aura $F = \frac{n-1}{nn-1}P = \frac{1}{n+1}P = (\frac{1}{n} - \frac{1}{nn} + \frac{1}{n^3})P$, & dans ce cas la force requise à vaincre le frottement sera la plus petite. De là on voit qu'on gagnera toujours, si l'on applique les forces pour tourner les rouës, ensorte qu'elles soient dirigées en haut comme mp, & cet avantage sera d'autant plus grand, plus l'axe de la roüe sera epais.

VII. Le cas que nous venons de considérer aura lieu, quand même le rayon de l'axe BC deviendra égal à l'axe de la roüe AC, ou qu'il le surpasse, pourvûque la valeur de $n = \frac{4AC}{BC}$, ou plutot de son Fig. 3.

quarré

quarré, soit encore considérablement plus grande que l'unité. Mais si nous supposons que le rayon de l'axe BC surpasse tant l'axe de la roüe CA, que la valeur de $n = \frac{4 AC}{BC}$ n'excede l'unité que fort peu, les phenomenes qui en résultent, doivent être dévelopés séparément. Car quoique ce cas ne trouve presque jamais lieu dans les machines, il merite pourtant toute l'attention, à cause des proprietés assez étranges, qui serviront à mieux connoitre les effets du frottement. Soit donc le rayon de l'axe CB, qui doit tourner dans la cavité de l'appuy EF, presque 4 fois plus grand que le rayon de la roüe CM, auquel est appliquée la force $MP = F$, de sorte que la valeur de $nn - 1$ soit trés petite; ou supposant $n = 1 + \alpha$, que α soit une fraction trés petite, & nous aurons pour vaincre le frottement $F = \frac{\sin\Phi \pm \sqrt{(\sin\Phi^2 + 2\alpha + \alpha\alpha)}}{2\alpha + \alpha\alpha} P$, où il n'y a encore que le signe $+$ qui puisse avoir lieu, & pour le point d'appui N, nous aurons $\sin BCN = \frac{\cos\Phi}{1+\alpha}$.

1mo Soit l'angle $ACM = \Phi = 0$ ou $180°$, & nous aurons $F = \frac{P}{\sqrt{(2\alpha + \alpha\alpha)}}$, & partant la force requise pour vaincre la résistance du frottement, doit être extrémement grande, & l'angle BCN deviendra presque droit, de sorte que dans ce cas la cavité du soutien EF doit embrasser presque la moitié de l'axe.

2do Si l'angle $ACM = \Phi = 90°$, nous aurons $F = \frac{2+\alpha}{2\alpha + \alpha\alpha} P = \frac{P}{\alpha}$ & partant dans ce cas la force requise à vaincre le frottement, doit être encore plus grande.

3tio Si l'angle $ACM = \Phi = -90°$, il y aura $F = \frac{\alpha}{2\alpha + \alpha\alpha}$

 P =

$P = \frac{P}{2 + \alpha}$, & dans ce cas il ne faudra pour vaincre le frottement qu'une force qui vaudra environ la moitié du poids de la machine P, & dans ces deux derniers cas le point d'appuy sera au point B.

VIII. De là il est clair, que si $\alpha = 0$, ou que le rayon de la roüe C A soit exactement au rayon de l'axe CB, comme la force du frottement est à la presion, ou que dans l'hypothese $\mu = \frac{1}{4}$ il soit CB $= 4$ CA: la force requise pour vaincre la résistance du frottement deviendra infiniment grande, toutes les fois que la force MP est horizontale, ou dirigée en bas, comme la figure représente. Et partant dans ces cas il ne sera pas même possible de remuër la machine, quelque force qu'on y emploie. Mais si l'on applique la force *mp* de l'autre coté, de sorte qu'elle soit dirigée en haut, puisqu'elle diminuera la presfion de l'axe contre l'appuy, une force finie deviendra sùffisante à surmonter la résistance du frottement. Pour cet effet nommant l'angle negatif A C*m* $= \phi$, nous aurons la force *mp* $= F = \frac{\sqrt{(\sin\phi^2 + 2\alpha + \alpha\alpha)} - \sin\phi}{2\alpha + \alpha\alpha} P$, dont la valeur supposant $\alpha = 0$, sera $F = \frac{P}{2\sin\phi}$: ou la force requise *mp* $= F$ sera à la moitié du poids de la machine ($\frac{1}{2}$P), comme le sinus total est au sinus de l'angle A C*m*. Par conséquent la plus petite force capable de vaincre la résistence du frottement dans ce cas, sera égale à la moitié du poids de la machine, & cette force doit être tellement appliquée à la roüe, qu'elle tire directement en haut. En voicy donc un cas qui nous fait voir l'important avantage, qu'on peut tirer de l'application de la même force à la roüe, quoiqu'elle agisse toujours perpendiculairement au rayon de la roüe: circonstance qui ne feroit d'aucune conséquence, s'il n'y avoit point de frottement. Il est encore bien remarquable que dans ce cas il peut arriver, que même une force infinie n'est pas capable de vaincre la résistance du frottement.

IX. A plus forte raison on comprendra aisément, que si le rayon de l'axe CB sera encore plus grand par rapport au rayon de la roüe

CA,

CA, cette machine ne pourra être mise en mouvement par aucune force, dont la direction est, ou horizontale, ou qui tend en bas. Ce cas aura lieu si $n < 1$. soit donc $n = 1 - \alpha$, & α une fraction plus petite que 1; & que ϕ marque l'angle ACm pris de l'autre coté de la roüe, de sorte que la force $mp = F$ soit dirigée en haut. Alors pour vaincre la résistence du frottement il foudra une force

$$F = \frac{\sqrt{(\sin\phi^2 - 2\alpha + \alpha\alpha)} - \sin\phi}{-2\alpha + \alpha\alpha} P = \frac{\sin\phi \pm \sqrt{(\sin\phi^2 - 2\alpha + \alpha\alpha)}}{2\alpha - \alpha\alpha} P.$$

Donc afin que cette force ne devienne pas imaginaire, il faut qu'il soit $\sin\phi > \sqrt{(2\alpha - \alpha\alpha)}$, ou $\sin\phi > (1 - nn)$, car tant que $\sin\phi$ sera moindre que $\sqrt{(2\alpha - \alpha\alpha)}$, il ne sera pas possible de vaincre la résistence. Soit donc pour déveloper ce cas $\sin\phi = \sqrt{(2\alpha - \alpha\alpha)}$ &

$F = \frac{P}{\sqrt{(2\alpha - \alpha\alpha)}}$ & l'acceleration étant proportionelle à $(1 - \alpha)$

$F - \sqrt{(PP + FF - 2PF\sin\phi)}$ deviendra $= \frac{(1-\alpha)P - P\sqrt{(1 - 2\alpha + \alpha\alpha)}}{\sqrt{(2\alpha - \alpha\alpha)}}$

$= 0$; ce sera donc le premier cas qu'il sera possible de vaincre la résistence. Mais il faut bien remarquer, que dans ce cas le mouvement de la machine n'est pas encore possible, car quoiqu'on augmente la force F au delà de $\frac{P}{\sqrt{(2\alpha - \alpha\alpha)}}$, la valeur de la formule $nF - \sqrt{(PP + FF - 2PF\sin\phi)}$ redevient negative, La raison en est, que dans ce cas la valeur de cette formule devient un *maximum*, & ce *maximum* même est $= 0$, d'où l'on voit que dans tous les autres cas, où F est ou plus grande, ou plus petite que $\frac{P}{\sqrt{(2\alpha - \alpha\alpha)}} = \frac{P}{\sqrt{(1 - nn)}}$, sa valeur qui exprime l'acceleration, doit être moindre que 0, & partant negative. Cela arrive si $\sin\phi = \sqrt{(1 - nn)}$, & $\cos\phi = n$: or si l'angle ϕ est plus petit, la valeur de $nF - \sqrt{(PP + FF - 2PF\sin\phi)}$ demeure toujours négative, quelque grande que soit la force F.

X. Or si $\sin\phi > \sqrt{(1 - nn)}$, la plus grande valeur de la formule $nF - \sqrt{(PP + FF - 2PF\sin\phi)}$ sera affirmative, ce qui est une

une marque, que dans ces cas la machine peut être mise en mouvement, si la force F est prise d'une grandeur convenable: car si cette force est trop petite, ou trop grande, le mouvement deviendra également impossible. Il y aura donc des limites, entre lesquels la force F doit être comprise, afin qu'elle soit capable de mouvoir la machine, & ces limites sont representés par la double valeur de F, que nous venons de trouver, savoir remettant $1 - nn$ au lieu de $2\alpha - \alpha\alpha$

$$F = \frac{\sin\Phi \pm \sqrt{(\sin\Phi^2 - 1 + nn)}}{1 - nn} P.$$

& entre ces deux limites se trouve la valeu de la force F, qui produit la plus grande acceleration. Pour trouver cette valeur, supposons $\frac{F}{P} = z$, & l'acceleration sera répresentée par cette formule $nz - \sqrt{(1 + zz - 2z\sin\Phi)}$, & posant son differentiel $= 0$, nous aurons, $n = \frac{z - \sin\Phi}{\sqrt{(1 + zz - 2z\sin\Phi)}}$, & partant $\sqrt{(1 + zz - 2z\sin\phi)} = \frac{z - \sin\Phi}{n}$; donc l'acceleration la plus grande sera $= \frac{(nn - 1)z\sin\Phi}{n}$.

Or l'équation precedente nous fournira $z = \sin\varphi \pm \frac{n\cos\Phi}{\sqrt{(1 - nn)}}$ où par rapport à l'ambiguité du signe $\pm$ il faut remarquer, que puisque $\sqrt{(1 + zz - 2z\sin\varphi)} = \frac{z - \sin\Phi}{n}$, la valeur de $z - \sin\Phi$ doit toujours être affirmative, parce que le frottement qui est exprimé par la formule irrationelle $\sqrt{(1 + zz - 2z\sin\varphi)}$ ne sauroit jamais devenir négatif. Donc il est clair que dans l'expression $z = \sin\Phi \pm \frac{n\cos\Phi}{\sqrt{(1 - nn)}}$ le seul signe $+$ peut avoir lieu, & que le terme $\frac{n\cos\Phi}{\sqrt{(1 - nn)}}$ doit toujours être pris affirmatif, quoique même le $\cos\Phi$ devienne negatif: ou l'angle ACm plus grand qu'un droit.

XI. Ayant

XI. Ayant donc trouvé pour le cas de la plus grande acceleration

$$z = \sin\phi + \frac{n \cos\phi}{\sqrt{(1 - nn)}} = \frac{F}{P},$$ la plus grande acceleration même sera comme $n \sin\phi - \cos\phi . \sqrt{(1-nn)}$; d'où l'on voit que cette plus grande valeur est négative, tant que $\sin\phi < \sqrt{(1-nn)}$, & elle évanouït précisément, si $\sin\phi = \sqrt{(1-nn)}$: mais si $\sin\phi > \sqrt{(1-nn)}$, alors la plus grande valeur de l'acceleration sera affirmatife; & elle deviendra encore la plus grande, si l'angle $ACm = \phi$ sera droit; car alors le mouvement de la machine sera le plus vite, si l'on prend $F = P$, auquel cas la pression même, & partant le frottement, evanouït. Or dans ce cas où $\phi = 90°$, il y aura deux forces, qui contrebalanceront le frottement qui feront

$$F = \frac{1 + n}{1 - nn} P = \frac{P}{1 - n} \text{ \& } F = \frac{1 - n}{1 - nn} P = \frac{P}{1 + n}$$

d'où il est evident, que si la force F est, ou plus petite que $\frac{P}{1 + n}$, ou plus grande que $\frac{P}{1 - n}$, la machine ne recevra aucun mouvement; & il ne sera possible d'imprimer aucun mouvement à la machine, à moins que la force F ne soit comprise entre ces limites $\frac{P}{1 + n}$ & $\frac{P}{1 - n}$. On sera peut être d'abord surpris, comme il puisse arriver qu'une plus grande force ne soit pas capable de remuër la machine, pendant qu'une force plus petite, quoiqu'également appliquée, y est capable. Mais comme dans le cas $F = P$ la pression à l'apuy est tout à fait détruite, il est clair que lorsque $F > P$ la pression devenant negative, sera transportée en haut, & pour cet effet il faut que l'axe de la machine entre dans un anneau, auquel l'axe sera apprimé dans le sommet b, car sans cet anneau, qui sert à retenir la machine, elle seroit enlevée en haut par la force $F > P$.

XII. Ces cas, que je viens de déveloper, font voir tres évidemment, combien les forces, qui agissent sur la machine, contribuënt à augmenter, ou à diminuer la résistence du frottement; & partant

tant, pour déterminer le frottement de chaque machine, il ne suffit pas d'avoir égard à la machine même, mais il faut aussi bien considérer toutes les forces qui y sont appliquées. Jusqu'ici je n'ai consideré qu'une seule force dont la machine étoit sollicitée: mais s'il y en a plusieurs qui agissent ensemble, parmi lesquelles on doit comprendre la charge qui doit être levée, ou mise en mouvement, la détermination du frottement n'en devient pas plus difficile. Soient appliquées à la
Fig. 4. machine qui tourne autour du centre C, sur le soutien E F, des forces quelconques PR, QS sous quelque obliquité aux rayons CP & CQ que ce soit: & pour en déterminer l'effet sur le frottement, on n'a qu'à considérer ces forces, comme si elles etoient appliquées immédiatement au centre C, afin de connoitre la presssion sur le soutien EF au point d'appuy. Qu'on décompose donc chaque force en deux, dont l'une soit horizontale, l'autre verticale, & la force PR se resoudra en Pp, Pr & la force QS en Qq, Qs: aux verticales on joigne le poids de la machine, & que CK represente la somme de toutes les forces verticales, & CI celle des forces horizontales. Ensuite la diagonale CI du parallelogramme rectangle CLLK, représentera la force totale, dont la machine sera pressée contre le soutien EF; & on trouvera le point d'appuy N, où cette force est appliquée. Donc si l'on nomme la somme de toutes les forces verticales avec le poids de la machine $CK = P$, la somme des forces horizontales $CI = Q$, la pression contre le soutien au point N sera $= \sqrt{(PP + QQ)}$ & partant le frottement $= \mu \sqrt{(PP + QQ)}$. De plus, pour connoitre le point d'appuy N, la tangente de l'angle BCN sera $= \frac{Q}{P}$.

XIII. Aprés avoir déterminé en sorte le frottement, qui résulte, tant du poids de la machine, que des forces qui y agissent, on recherchera de la maniere suivante, si ces forces sont capables de mettre la machine en mouvement. On accelerera les momens de toutes les forces, qui agissent sur la machine, en multipliant chacune par sa distance à l'axe C, autour duquel le mouvement se fait, & ayant égard si toutes ces forces agissent dans le même sons ou non, on réduira

dans

tous ces momens dans une somme, en ajoutant ceux qui agissent dans le même sens, & en ôtant ceux qui sont contraires. Soit S ce moment total, qui tend à tourner la machine dans le sens BN, & puisque le frottement, que nous venons de trouver $= \mu \surd (PP + QQ)$ est toujours contraire à la force mouvante, comme il est appliqué au point d'appuy N, son moment sera $= \mu . CN . \surd (PP + QQ)$. Par conséquent on n'aura qu'à regarder le moment S, qui résulte des forces, & ce moment $\mu\, CN . \surd (PP + QQ)$ du frottement: car tandis que S sera plus petit que $\mu . CN . \surd (PP + QQ)$, ou même égal, la machine demeurera en repos; & le moment S ne sera capable de produire aucun mouvement, à moins qu'il ne soit S plus grand que $\mu . CN . \surd (PP + QQ)$. Dans ce cas l'acceleration de la machine sera produite par l'excés du moment S sur le moment du frottement $\mu . CN . \surd (PP + QQ)$, & cet excés $S - \mu . CN . \surd (PP + QQ)$ étant divisé par le moment de l'inertie de toute la machine, donnera l'acceleration du mouvement rotatoire. Cela s'entend, lorsque la machine commence à être mise en mouvement: car aussitot que la machine, & par conséquent aussi les forces, qui agissent sur elle, sont dejà en mouvement; puisque alors la pression sur le soutien en est changée, le frottement ne sera plus le même, & dans ce cas la recherche du mouvement actuel demandera des régles particulieres, qui feront le sujet d'une dissertation particuliere sur cette matiere.

XIV. Je me borne donc ici uniquement à rechercher la force, dont on aura besoin pour vaincre le frottement; puisque cette connoissance sera déjà suffisante pour juger de l'effet de la plupart des machines, dont on se sert ordinairement. Et pour faire voir combien la résistance du frottement peut être diminuée, si l'axe de la machine est soutenu de deux poulies, je m'en vais examiner le cas, où l'axe BC*b* d'une machine quelconque repose entre deux poulies BD, & *bd*, en sorte que l'axe de la machine ne sauroit tourner, sans que ces poulies ne tournassent également, & qu'il n'arrivât aucun frottement dans les endroits B & *b*, où les poulies sont touchées de l'axe. Or je suppose que chacune de ces poulies ait son pignon DEF & *def*, soutenu chacun par son appuy immobile GH & *gh*, sur lequel cha- Fig. 5.

que poulie tourne, & que tout le frottement ſoit transporté par ce moyen aux endroits, où les pignons des poulies s'appuyent ſur leurs ſoutiens. Pour déterminer ce frottement ſoit premierement, p le poids de chaque poulie & P le poids de la machine même, qui doit être tournée autour de ſon axe CBb : & que AI repreſente la force $=$ F appliquée perpendiculairement au rayon AC, qui ſoit capable de vaincre le frottement; laquelle devroit auſſi entrer dans la détermination du frottement. Or puisqu'il eſt facile de prévoir, que cette force ſera trés petite, à cauſe de la grande diminution du frottement, il ſera permis de négliger cette force dans la recherche de la quantité du frottement. Soit donc CP la ligne verticale, qui repréſente le poids de la machine P, & ſuppoſant que les lignes CD & Cd ſoient également inclinées ſur l'horizon, je nommerai les angles BCP $=$ bCP $= \phi$, & la force CP $=$ P etant décompoſée ſelon les directions CB & Cb, donnera pour chacune de ces forces ſelon CB & Cb la force $= \frac{P}{2 \cos \phi}$. Par conſéquent chaque poulie ſera preſſée de ce poids P de la machine contre ſon appuy dans la direction DE ou de par une force $= \frac{P}{2 \cos \phi}$, qui à ce qu'on voit ſera d'autant plus grande, plus grand ſera l'angle BCb.

XV. Or chaque poulie étant outre cela ſollicitée par ſon propre poids p, dans la direction DF & df; puisque les angles EDF & edf ſont $= \phi$, la force totale, dont chaque poulie eſt preſsée contre ſon appuy, ſera $= \surd(pp + \frac{PP}{4 \cos \phi^2} + Pp)$, & partant le frottement, qu'il faut vaincre pour mettre chaque poulie en mouvement, ſera $= \mu \surd(pp + Pp + \frac{PP}{4 \cos \phi^2})$, la lettre μ marquant la partie de la preſſion, à laquelle le frottement eſt égal, & dont la valeur eſt à peu prés $= \frac{1}{4}$. Maintenant il eſt clair que pour vaincre le frottement de la poulie DEF, il faut appliquer au point B une force $= \frac{\mu DF}{BD}$

$\surd(pp$

$\sqrt{}(pp + Pp + \frac{PP}{4\cos\Phi^2})$, & une pareille force fera requife au point b pour vaincre le frottement de l'autre poulie def, puisque je fuppofe ces deux poulies parfaitement égales entr'elles. Donc fi la force AI = F eft capable de vaincre ces frottemens, il faut que fon *moment* par rapport au centre de mouvement C foit égal aux *momens* de ces deux forces, que nous venons de trouver, & partant nous aurons

$$F. CA = \frac{2\mu DF. BC}{BD} \sqrt{}(pp + Pp + \frac{PP}{4\cos\Phi^2})$$

ou

$$F = \mu \frac{BC}{AC} \cdot \frac{DF}{BD} \sqrt{}(4pp + 4Pp + \frac{PP}{\cos\Phi^2}).$$

De là il eft donc clair que, pour vaincre la réfiftance du frottement d'une telle machine, la force requife F fera d'autant plus petite, premierement plus le rayon de l'axe de la machine CB fera petit ; & enfuite plus l'axe des poulies fera petit par raport à leur diametre ; & enfin plus l'angle BCb fera petit. Donc, puisqu'il eft dans notre pouvoir d'augmenter le rapport du rayon des poulies BD au rayon de leur axe DE trés confiderablement, on comprendra aifément, qu'on fera en état de rendre par ce moyen la réfiftance du frottement presque infenfible. Pour cet effet on gagnera aufsi confidérablement, fi l'on approche ces deux poulies enfemble autant qu'il fera posfible.

XVI. Si l'on pouvoit faire les axes qui foutiennent la machines, aufsi minces qu'on voudroit, la diminution du frottement n'auroit aucune difficulté : mais puisque la groffeur des axes doit être proportionnée à la charge qu'ils portent, les axes des poulies DF & df feront determinés par le poids de la machine. Car fi nous fuppofons que le principal axe de la machine CB eft déjà auffi mince, que la charge le permet, puisque les forces des axes de differente épaiffeur font à peu prés comme les quarrés de leurs rayons, cette régle nous fournira cette proportion

$$CB^2 : DF^2 = P : \sqrt{}(pp + Pp + \frac{PP}{4\cos\Phi^2}).$$

Or nous pourrons fans une erreur confiderable négliger le poids des poulies p par rapport au poids de la machine même P, puisqu'une

trés petite épaisseur peut suffire pour les poulies : & partant nous aurons CB : DF $= \sqrt{2\cos\phi} : 1$. & négligeant aussi dans la formule trouvée p à l'égard de P, pour vaincre la résistance du frottement, nous aurons : $F.CA = \frac{\mu P}{\cos\phi} \cdot \frac{DF.BC}{BD} = \frac{\mu P.BC^2}{BD.\cos\phi\sqrt{2\cos\phi}}$

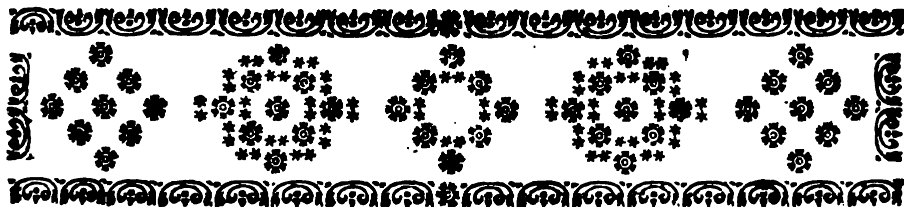
d'où il est clair que, plus on augmente la grandeur des poulies B D, plus aussi sera diminuée la résistence du frottement. Or les poulies ne peuvent être élargies que jusqu' à ce qu'elles viennent se toucher; ou bien le rayon B D ne peut être plus grand que CD sin ϕ : soit donc BD $=$ CD sin ϕ; ce qui donne $BD = \frac{BC \sin\phi}{1-\sin\phi}$: & nous aurons :

$$F.CA = \frac{\mu P.BC.(1-\sin\phi)}{\sin\phi\cos\phi\sqrt{2\cos\phi}} = \frac{\mu P.BC\sqrt{(1-\sin\phi)}}{\sin\phi\sqrt{2\cos\phi(1+\sin\phi)}}$$

or $\frac{\sqrt{(1-\sin\phi)}}{\sqrt{2\cos\phi}} = \frac{\sqrt{(1-\sin\phi)}}{\sqrt{2(1-\sin\phi^2)^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[4]{\frac{1-\sin\phi}{4(1+\sin\phi)}}$ par consequent $F.CA = \frac{\mu P.BC\sqrt[4]{(1-\sin\phi)}}{\sin\phi\sqrt[4]{4(1+\sin\phi)^3}}$, d'où l'on voit que plus on augmente l'angle BCb, & que les poulies touchent la ligne verticale CP, plus aussi la résistence du frottement sera diminuée, sans que les axes, tant de la machine que des poulies, deviennent trop foibles.

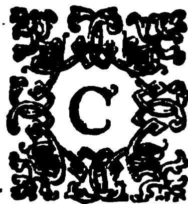


RE-



RECHERCHES SUR LES PLUS GRANDS ET PLUS PETITS QUI SE TROUVENT DANS LES ACTIONS DES FORCES,

PAR M. EULER.



I.

C'Est une verité dont on ne peut plus douter, que toutes les actions, qui sont produites par les forces de la nature, renferment constamment un *maximum*, ou un *minimum*. C'est à dire, les forces étant données, l'effet qu'elles produisent, sera toujours tel, qu'une certaine quantité y devient un *maximum*, ou un *minimum*, de sorte que cette prérogative n'auroit plus lieu, si l'effet avoit été tout autre. Cette considération nous conduit à reconnoitre un principe général de la nature, sur lequel toutes ses actions se réglent; & qui nous fait voir, que la nature se propose toujours un certain but, auquel elle tache de parvenir, en y employant les moindres dépenses. On sera tout à fait convaincu de la verité de ce principe général, par les excellentes réfléxions, que Monsieur de *Maupertuis*, notre illustre Président, a publiées sur ce sujet, tant dans les Mémoires de l'Academie Royale des Sciences de Paris, que dans nos Mémoires pour l'Année 1746, où il a demontré que dans le choc des Corps le mouvement se distribuë de maniere que la quantité d'action, que suppose un changement arrivé, est la

plus petite qu'il soit possible. De plus il a fait voir, que dans le repos les Corps, qui se tiennent en équilibre, doivent être tellement situés, que s'il leur arrivoit quelque petit mouvement, la quantité d'action seroit la moindre.

II. C'est donc ce principe de *la moindre quantité d'action*, auquel Mr. de *Maupertuis* réduit tous les *maxima*, ou *minima*, que la Nature observe dans toutes ses productions: & la quantité d'action pourra toujours être répréséntée par une certaine formule algebrique, qui étant appliquée à l'effet produit réellement par la Nature, y obtient une valeur plus petite, qu'elle obtiendroit, s'il étoit arrivé tout autre effet. Ce principe aura donc également lieu dans la Mecanique & dans la Statique, c. à d. dans le mouvement, aussi bien que dans tous les états d'équilibre, où les corps se peuvent trouver. Pour le mouvement, Mr. de *Maupertuis* vient de faire voir que ce principe de la *moindre quantité d'action* s'observe à la rigueur dans le choc des corps, tant élastiques que non élastiques: & moi, j'ai découvert une semblable loi dans le mouvement des corps, qui sont attirés vers un, ou plusieurs centres de forces, par des forces quelconques; ayant remarqué que le mouvement du corps, & la courbe qu'il décrit, renferme toujours cette proprieté, que nommant u sa vitesse dans un endroit quelconque, & ds l'elément de l'espace, cette formule $\int u\,ds$ sera toujours un *minimum*. Ce sera donc dans ce cas cette formule $\int u\,ds$, qui exprime ce que Mr. de *Maupertuis* nomme la quantité d'action. Ces deux cas du mouvement, dans lesquels nous voyons, que ce principe a lieu, sont d'une si grande etenduë, qu'on y peut presque réduire tous les mouvemens, qui arrivent au monde; & partant on n'aura plus la moindre raison de douter, que dans tous les mouvemens, par quelques forces qu'ils soient produits, il n'y ait toujours une certaine formule, dont la valeur soit la plus petite, & par laquelle sera representée la quantité d'action.

III. L'usage de ce principe est déjà depuis long tems reconnu dans la Statique, ou Dynamique, où il s'agit de l'équilibre des corps sollicités par des forces quelconques, & c'est par son moyen, qu'on a donné des solutions de plusieurs problemes de cette nature. Il a été aisé

aisé de prévoir, qu'une chaine suspenduë de ses deux bouts devoit prendre une telle figure, afin que son centre de gravité soit le plus bas: ou que la distance de ce centre au centre de la terre, ou bien à un plan horizontal, soit *un minimum*. Si l'on nomme un élément quelconque de la chaine $= ds$, & sa distance à un plan horizontal fixe pris à volonté $= x$, ce sera la valeur de cette formule $\int x\,ds$, qui sera un *minimum* pour la courbe de la chaine: & partant ce sera la même formule $\int x\,ds$, qui réprésente la quantité d'action, qui doit être la plus petite. De même un ligue rempli d'un fluide prendra la figure, dont la capacité est la plus grande, afin que le fluide puisse descendre le plus bas qu'il est possible: & Mr. de *Maupertuis* a fait voir l'usage de ce grand principe en plusieurs autres figures, que ces corps sollicités par des forces quelconques sont obligés de recevoir; où il a determiné la formule, qui répresente en chaque cas la quantité d'action, qui y doit être un *minimum*. Mr. *Daniel Bernoulli* a aussi remarqué, que la courbe d'une lame elastique renferme un tel *minimum*; car nommant un élément quelconque de cette courbe $= ds$, & le rayon de sa développée dans cet endroit $= r$, il a observé que la valeur de cette formule $\int \frac{ds}{rr}$ devient un *minimum* dans la courbe élastique; & c'est de ce principe que j'ai déterminé la nature de cette courbe, dans mon traité sur la methode *de Maximis & Minimis*, pour faire voir, que ce principe fournit la même courbe, qu'on a trouvée par la methode directe, dont on se sert ordinairement.

IV. Par là on voit qu'il doit y avoir une double methode de resoudre les problemes de Mecanique; l'une est la methode directe, qui est fondée sur les loix de l'équilibre, ou du mouvement; mais l'autre est celle dont je viens de parler, où sachant la formule, qui doit être un *maximum*, ou un *minimum*, la solution se fait par le moyen de la methode *de Maximis & minimis*. La premiere fournit la solution en déterminant l'effet par les causes efficientes; or l'autre a en vuë les causes finales, & en déduit l'effet: l'une & l'autre doit conduire à la même solution, & c'est cette harmonie, qui nous convainc

de

de la verité de la solution, quoique chaque methode doive être fondée sur des principes indubitables. Mais il est souvent trés difficile de découvrir la formule, qui doit être un *maximum*, ou *minimum*, & par laquelle la quantité d'action est représentée. C'est une recherche qui n'appartient pas tant à la Mathematique, qu'à la Métaphysique puisqu'il s'agit de connoitre le but, que la nature se propose dans ses opérations: & ce seroit porter cette science à son plus haut degré de perfection, si l'on étoit en état d'assigner pour chaque effet que la nature produit, cette quantité d'action, qui y est la plus petite, & qu'on pût la deduire des premiers principes de notre connoissance. Mais je crois que nous sommes encore bien éloignés de ce degré de perfection, & qu'il sera presque impossible d'y arriver, à moins que nous ne découvrions pour un grand nombre de cas differens les formules, qui y deviennent, ou des *maxima*, ou *minima*. Or sachant les solutions, que la methode directe nous fournit, il ne sera pas difficile de deviner des formules, qui étant supposées des *maxima*, ou *minima*, conduisent aux mêmes solutions. Par ce moyen nous connoitrons *a posteriori* ces formules qui expriment la quantité d'action, & alors il ne sera plus si difficile d'en demontrer la verité par les principes connus de la Métaphysique.

V. C'est dans cette vuë, que je me propose de développer quelques problêmes de Statique, qui roulent sur la courbe, qu'un fil parfaitement flexible doit former, étant sollicité par des forces quelconques. Je chercherai prémierement la solution de ces problêmes par la methode directe, c. à. d. par les loix connuës de l'équilibre; ensuite je tacherai de découvrir les formules, qui dans ces courbes trouvées obtiennent, ou la plus grande, ou la plus petite valeur, & lesquelles par conséquent pourront être regardées comme les expressions de la quantité d'action, dont la valeur sera plus petite pour l courbe, qu'on aura trouvée par l'autre methode, qu'elle seroit, si le fil avoit pris tout autre courbure. J'ai choisi cette espece de problêmes, puisqu'on sait déjà, que dans le cas où le fil n'est sollicité que par la gravité, c'est la distance du centre de gravité du fil au centre de la terre, qui est un *minimum*. Or je rendrai ce problême plus général,

général, en ſuppoſant que toutes les particules du fil ſoient ſollicitées par des forces quelconques, qui ſoient dirigées, ou vers un point fixe, ou vers pluſieurs, étant proportionelles à des fonctions quelconques de ces diſtances: de plus on pourra ſuppoſer que, tant la direction que la quantité de ces forces, dépende de la courbure même, comme cela arrive dans la courbe des *voiles*, & d'autres ſemblables, où la direction des forces eſt toujours perpendiculaire à la courbe même: & dans ces cas j'ai remarqué qu'il eſt beaucoup plus difficile de deviner la formule qui y eſt un *maximum*, ou *minimum*; & partant cette conſidération contribuëra d'autant plus à la connoiſſance des choſes, que la nature dans ſes opérations tache de ménager le plus qu'il eſt poſſible.

Probleme Général.

VI. *Le fil perfaitement flexible* AYM *étant ſollicité dans chacun de ſes élémens par des forces quelconques, trouver la courbe* AYM, *à laquelle ce fil ſera réduit.* Fig. 1.

Solution.

Rapportons la courbe AYM, qu'il faut chercher à l'axe CP, & nommons une abſciſſe quelconque $CP = x$, l'appliquée $PM = y$, & la longitude du fil, qui y répond $AYM = s$, de ſorte que $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, puiſque l'appliquée PM eſt ſuppoſée perpendiculaire à l'abſciſſe CP. Maintenant de quelque force que l'élément $Mm = ds$ ſoit ſollicité, elle pourra être réduite à deux forces, dont l'une tirera ſelon la direction MQ parallele à l'abſciſſe CP, l'autre ſelon la direction de l'appliquée MP. Soit donc la force $MQ = Qds$, & la force $MP = Pds$, puiſque chacune n'agiſſant, que ſur l'élément du fil $Mm = ds$ ſera infiniment petite. Afin que le fil demeure en équilibre, puiſqu'il eſt parfaitement fléxible, il faut que les momens de toutes les forces, dont la partie anterieure du fil AYM eſt ſollicitée, par rapport au point M, ſe détruiſent mutuellement. Pour cet effet conſiderons une portion quelconque du fil AY, que nous regarderons comme variable, pendant que le point M demeure fixe, & partant

partant les quantités x & y constantes; supposition qui ne durera, que jusqu'à ce que nous aurons trouvé la somme de tous les momens des forces par rapport au point M. Soit donc notre nouvelle abscisse variable CX $= \phi$, l'appliquée XY $= \psi$, & la courbe AY $= \omega$, desorte que $d\omega = \sqrt{(d\phi^2 + d\psi^2)}$; & soit des forces, dont l'élément Yy $= d\omega$ est sollicité, celle qui agit selon YZ parallele à CX $= q\,d\omega$, & l'autre qui agit selon YX $= p\,d\omega$. Or le moment de celle-là YZ par rapport au point M sera $= q\,d\omega$ (PM — YX) $= (y - \psi)\, q\,d\omega$, qui tendra à tourner le fil autour du point M, en sorte que l'angle AMQ soit diminué: & le moment de l'autre force YX $= p\,d\omega$ sera $= p\,d\omega$ (CP — CX) $= (x - \phi)\, p\,d\omega$, dont l'effet sera contraire au précedent, & tendra à augmenter l'angle AMQ. Par conséquent le moment de ces deux forces prises ensemble sera $= (y - \psi)\, q\,d\omega - (x - \phi)\, p\,d\omega$, qui sera employé à tourner le fil autour de M dans le sens AQ. Donc le moment de toutes les forces qui agissent sur la portion du fil AY, sera l'integrale de cette expression, & puisque x & y sont considerés comme constantes, ce moment qui resulte de la portion AY sera $= y\int q\,d\omega - \int \psi q\,d\omega - x\int p\,d\omega + \int \phi p\,d\omega$. Approchons maintenant le point Y jusqu'au point M pour avoir le moment, qui résulte de toutes les forces dont le fil AYM est sollicité, & alors les quantités ϕ, ψ, q, p & $d\omega$ deviendront égales à x, y, Q, P & ds de sorte que la somme de tous les momens des forces qui agissent sur le fil AYM, pour le tourner autour de M dans le sens AQ sera $= y\int Q\,ds - \int y\,Q\,ds - x\int P\,ds + \int x P\,ds$. Or afin que le fil étant parfaitement flexible, ne soit pas remué, il faut que la somme de ces momens évanouïsse, d'où nous obtiendrons cette équation, qui exprimera la nature de la courbe cherchée AYM

$$y\int Q\,ds - \int y\,Q\,ds - x\int P\,ds + \int x P\,ds = 0.$$

Cette équation deviendra plus simple, en prenant sa differentielle qui sera:

$$dy\int Q\,ds - dx\int P\,ds = 0.$$

où $\int Q\,ds$ exprime la somme de toutes les forces, dont le fil AM est sollicité suivant la direction de l'abscisse PC, & $\int P\,ds$ la somme de

toutes

toutes les forces, dont le fil AM est sollicité suivant la direction des appliquées PM. C. Q. F. T.

VII. Si le fil est arrêté au point A, ou tenu fixe par une force quelconque, on résoudra aussi celle-cy suivant les directions AB & AC. Soit la force AB $=$ B, & la force AC $=$ C; & celle-là doit être comprise dans $\int Q\,ds$, & celle-cy dans $\int P\,ds$. Donc, si ces expressions $\int Q\,ds$ & $\int P\,ds$, ne comprennent que les forces, qui agissent sur les élémens du fil, on y doit ajouter ces forces finies B & C, & au lieu de $\int Q\,ds$ nous aurons $B + \int Q\,ds$, & $C + \int P\,ds$ au lieu de $\int P\,ds$; ce qui donnera pour la courbe cette équation differentielle:

$$dy\,(B + \int Q\,ds) - dx\,(C + \int P\,ds) = o.$$

dont l'integrale sera exprimée par:

$$\int dy\,(B + \int Q\,ds) - \int dx.\,(C + \int P\,ds) = \text{Const.}$$

Or puisque $\int dy\,(B + \int Q\,ds)$ exprime la somme des momens, qui résultent des forces selon la direction des abscisses, & $\int dx\,(C + \int P\,ds)$ la somme des momens, qui résultent des forces selon la direction des appliquées, comme ces momens se doivent détruire mutuellement, il est évident que la constante doit être $= o$, pourvuque les integrales s'étendent par tout le fil.

VIII. Cependant, puisque les integrales $\int Q\,ds$ & $\int P\,ds$ peuvent déjà renfermer les constantes B & C, on les pourra omettre sans faute, de sorte que la nature de la courbe du fil sera exprimée, ou par cette équation integrale $\int dy \int Q\,ds - \int dx \int P\,ds = \text{Const.}$ ou par cette équation differentielle $dy \int Q\,ds - dx \int P\,ds = o$. Laquelle nous fournit cette analogie:

$$dy : dx = \int P\,ds : \int Q\,ds.$$

D'où nous tirons cette régle générale pour trouver la courbure d'un fil parfaitement fléxible, étant sollicité par des forces quelconques. C'est qu'ayant tiré l'appliquée infiniment proche pm, & Mn parallele à l'abscisse, il y aura toujours: *le differentiel de l'appliquée mn au differentiel de l'abscisse* $Mn = Pp$, *comme la somme de toutes les forces, qui agissent dans la direction des appliquées, est à la somme de toutes les forces, qui agissent dans la direction des abscisses.*

 IX. Si

IX. Si le fil A Y M n'eſt pas parfaitement fléxible, mais qu'il ſoit élaſtique, ou qu'il ait quelque roideur qui réſiſte à l'infléxion, il ne ſera pas difficile auſſi dans ce cas de déterminer la courbe, que ce fil prendra, quoiqu'il ſoit outre cela ſollicité par des forces quelconques, comme je viens de ſuppoſer. Car la force, ou plutot le moment, qui eſt requis pour courber le fil au point M, ſera proportionnel à la courbure dans ce point, ou réciproquement comme le rayon de la développée au point M. Suppoſant donc ce rayon $= r$, de ſorte que $r = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$, en ſuppoſant dx conſtant, ou $r = \frac{ds\,dx}{ddy}$ en ſuppoſant ds conſtant, la force de roideur ſera comme $\frac{1}{r}$, ſi la roideur eſt partout égale. Or ſi l'épaiſſeur du fil eſt ſuppoſée variable, la force de roideur pourra être exprimée par $\frac{S}{r}$, ou S eſt une fonction proportionnelle à l'épaiſſeur du fil au point M. Cette force de roideur tendant à remettre le fil dans ſa ſituation droite, que je ſuppoſe lui être naturelle, elle doit être contrebalancée par la ſomme des momens de toutes les forces dont le fil eſt ſollicité. Or la ſomme de ces momens a été trouvée $= y\int Q ds - \int y Q ds - x\int P ds + \int x P ds$ ou bien $= \int dy \int Q ds - \int dx \int P ds$, dont la direction étant contraire à la force de roideur $\frac{S}{r}$, il faut que ces deux expreſſions ſoyent égales entr'elles. De là nous obtiendrons pour la courbe de ce fil roide, ou élaſtique, cette équation :

$$\frac{S}{r} = \int dy \int Q ds - \int dx \int P ds$$

qui ſe réduit à celle, que nous avons trouvée dans la ſolution du probleme, ſi la roideur S évanouït.

X. En voicy donc la ſolution du problême le plus général, par laquelle on eſt en état de déterminer la courbe, que forme un fil, ou parfaitement fléxible, ou élaſtique, dont tous les points ſont ſollicités

cités par des forces quelconques. Mais je remarque d'abord, que cette solution générale ne se peut déduire par la methode *de maximis & minimis*: car quoique cette methode soit propre à fournir des solutions générales, il faut pourtant qu'on sache, desquelles des variables soyent composées les fonctions, qui entrent dans la formule qui doit être, ou un *maximum*, ou un *minimum*. Donc, à moins qu'on ne détermine la nature des fonctions P & Q, qui expriment les forces, dont chaque élément M*m* du fil est sollicité, il est impossible de découvrir une formule, qui étant supposée un *maximum*, ou un *minimum*, produise la même courbe. Je m'en vais donc appliquer cette solution générale à des cas particuliers, en déterminant les fonctions P & Q, ou par les abscisses x, ou par les appliquées y, ou par une expression, qui contienne toutes les deux d'une maniere, dont la composition soit connuë. Pour cet effet je ferai l'application de la solution générale trouvée aux problemes suivants: & je tacherai de joindre à la solution de chacun la formule, qui étant supposée un *maximum*, ou un *minimum*, conduise à la même courbe: afin qu'on en puisse connoitre pour chaque cas l'expression, qui réprésente la quantité d'action.

PROBLEME I.

XI. *Le fil parfaitement flexible* AYM *étant dans chaque point* M *sollicité selon la direction des appliquées* MP *par des forces, qui soient exprimées par une fonction quelconque de ces appliquées: trouver la courbe* AYM *que ce fil formera.*

SOLUTION.

Ayant nommé comme auparavant l'abscisse $CP = x$, l'appliquée $PM = y$, & l'arc $AYM = s$, soit Y la fonction de l'appliquée y, à laquelle la force dont le fil au point M est tiré suivant la direction MP, est supposée proportionnelle, de sorte que la force qui agit sur l'elément $Mm = ds$ soit $= Y ds$, laquelle ayant été supposée dans la solution générale $= P ds$, nous aurons $P = Y$ & $Q = o$. Et partant puisque le fil est supposé parfaitement fléxible, la nature de la courbe

courbe sera exprimée par cette équation, $B\,dy - dx \int Y\,ds = o$. Car quoique $Q = o$, l'integral $\int Q\,ds$ n'evanouïra pas, mais il sera égale à une constante B, qui exprime la force A B appliquée au bout du fil A: or l'autre force $AC = C$ sera renfermée dans l'expréssion integrale $\int Y\,ds$. Pour reduire cette équation, & pour la ramener à la forme, qui se trouve dans la methode de *maximis* & *minimis*, je suppose $dy = p\,dx$, pour avoir $ds = dx\,\sqrt{(1+pp)}$, & l'equation trouvée se changera en cette forme $Bp = \int Y\,dx\,\sqrt{(1+pp)}$, dont le differentiel est $B\,dp = Y\,dx\,\sqrt{(1+pp)}$, ou $B\,p\,dp = Y\,dy\,\sqrt{(1+pp)}$ à cause de $dx = \frac{dy}{p}$, d'où nous tirons $\frac{B\,p\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = Y\,dy$, & prenant les integrales $\int Y\,dy = B\,\sqrt{(1+pp)}$, la constante qu'on pourroit ajouter, étant comprise dans l'integrale $\int Y\,dy$: & cette équation $\int Y\,dy = B\,\sqrt{(1+pp)}$ ayant ses deux variables p & y separées, peut suffire pour la construction de la courbe, que nous cherchons.

XII. Pour trouver cette même courbe par la methode de *Maximis* & *Minimis*, il faut se rappeller cette solution générale, que j'ai donnée dans mon traité sur cette matiere. Ayant posé l'abscisse $= x$, l'appliquée $= y$, & pour les differentiels $dy = p\,dx$; $dp = q\,dx$; $dq = r\,dx$ &c. Soit $\int Z\,dx$ la formule, dont la valeur doit être un *maximum*, ou *minimum*, où Z marque une fonction quelconque des quantités x, y, p, q, r, &c. de sorte que son differentiel ait une telle forme:

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr \text{ \&c.}$$

alors j'ai démontré, que la courbe, où $\int Z\,dx$ est un *maximum*, ou *minimum*, sera exprimée par cette équation, supposant l'element dx constant.

$$o = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{\&c.}$$

XIII. Comme cette équation est encore trop generale pour nôtre cas, soit Z seulement une fonction de y & p, de sorte que $dZ = N\,dy + P\,dp$, & la formule $\int Z\,dx$ sera un *maximum*, ou *minimum*, dans la courbe exprimée par cette équation: $o = N - \frac{dP}{dx}$ ou $N\,dx =$

dP,

dP, qui etant multipliée par p, à cause de $pdx = dy$, donne $Ndy = pdP$. Or nous avons $dZ = Ndy + Pdp$, & partant il y aura $dZ = pdP + Pdp$, dont l'integrale est : $Z = Pp + \text{Const.}$ Nous voilà donc réduits à trouver une telle fonction Z de y & de p, que supposant $dZ = Ndy + Pdp$, l'équation $Z = Pp + \text{Const.}$ devienne la même, que nous avons trouvée, savoir $\int Y dy = B \surd(1+pp)$, ou comme B sera égale à la constante de la premiere équation, que $Z - Pp$ devienne $= \frac{\int Y dy}{\surd(1+pp)}$, ou $\int Y dy = (Z-Pp)\surd(1+pp.)$

XIV. Pour resoudre cette équation, ou pour en tirer la valeur de Z, puisque $P = \frac{Z}{p} - \frac{\int Y dy}{p\surd(1+pp)}$, je remets cette valeur dans l'équation $dZ = Ndy + Pdp$, & j'aurai $dZ = Ndy + \frac{Zdp}{p} - \frac{dp\int Y dy}{p\surd(1+pp)}$, ou bien $\frac{pdZ - Zdp}{pp} = \frac{Ndy}{p} - \frac{dp\int Y dy}{pp\surd(1+pp)}$, où le premier membre étant integrable, ayant pour integrale $\frac{Z}{p}$, il faut que le second membre soit aussi integrable. Or son integrale tirée de la partie $\frac{-dp\int Y dy}{pp\surd(1+pp)}$ en supposant y constant est $= \frac{\int Y dy}{p}\surd(1+pp) + \text{funct.} y$ & partant nous aurons $\frac{Z}{p} = \frac{\int Y dy}{p}\surd(1+pp) + \text{funct.} y$: ou $Z = \int Y dy . \surd(1+pp) + p \text{ funct.} y$. Par consequent la courbe du fil se trouvera, si l'on cherche parmi toutes les courbe celle, dans laquelle $\int Z dx$ c. à. d $\int dx \surd(1+pp). \int Y dy + \int pdx. \text{ funct.} y$, sera un *maximum*, ou un *minimum* ; & l'expréssion, qui représente la quantité d'action sera $\int ds \int Y dy + \int dy \text{ funct.} y$. Ou puisque $\int dy$ funct. y est une fonction

ction de y, qui demeure la même pour toutes les courbes, qui passent par les mêmes points A & M, la courbure du fil AYM aura cette proprieté, que parmi toutes les courbes qui passent par les points A & M, il y aura cette expression $\int ds \int Y dy$ un minimum: d'où je tire le Theoreme suivant.

Theoreme I.

XV. *Le fil* AYM, *comme nous avons supposé dans le probleme précedent, étant dans chaque point* M *sollicité selon la direction des appliquées* MP *par des forces, qui sont exprimées par une fonction quelconque* Y *des appliquées* PM $= y$, *prendra une telle figure* AYM, *que parmi toutes les autres courbes possibles, il y aura cette expression* $\int ds \int Y dy$ *un minimum.*

On trouvera donc cette courbe, si on cherche parmi toutes les courbes, qui sont comprises entre les mêmes termes, celle où la valeur de cette expression $\int ds \int Y dy$ devient un *minimum*. Il n'est pas nécessaire, comme la nature de la question semble de demander, que cette proprieté ne regarde que les courbes de la même longueur; car il revient au même, soit qu'on suppose la formule $\int ds \int Y dy$ parmi toutes les courbes possibles, ou seulement parmi les isoperimetres: Car pour ce dernier cas, on devroit, comme j'ai demontré dans mon traité sur cette matiere, rendre cette formule $\int ds \int Y dy + \alpha \int ds$ un *minimum*. Or cette constante α pouvant être comprise dans l'integral $\int Y dy$, on pourra negliger ce terme $\alpha \int ds$, & alors il ne reste à rendre un *minimum*, que la formule trouvée $\int ds \int Y dy$.

Probleme II.

XVI. *Le fil parfaitement flexible* AYM *étant sollicité dans chaque point* M *suivant les directions* MP, MQ *par des forces, dont celle-là, qui agit selon* MP, *soit exprimée par une fonction de l'appliquée* MP $= y$, *& celle-cy, qui agit selon* MQ *par une fonction de l'abscisse* CP $= x$: *trouver la figure du fil* AYM.

Solu-

SOLUTION.

Retenant toujours les mêmes denominations $CP = x$, $PM = y$, l'arc $AYM = s$, soit Y la fonction de y, qui exprime la force, qui agit selon MP, & X la fonction de x, qui exprime la force MQ. Nous n'avons donc que mettre dans la solution générale, que X & Y au lieu de Q & P, pour avoir l'equation suivante, qui exprimera la nature de la courbe cherchée AYM

$$dy(B + \int X ds) - dx(C + \int Y ds) = o$$

ou, puisque les constantes B & C peuvent etre comprises dans les formules integrales, nous aurons:

$$dy \int X ds = dx \int Y ds.$$

Supposons $dy = p \cdot dx$, pour avoir $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$, & l'équation trouvée sera $p\int X dx\sqrt{(1+pp)} = \int Y dx\sqrt{(1+pp)}$ qui etant differentiée donne

$$dp\int X dx\sqrt{(1+pp)} + Xp dx\sqrt{(1+pp)} = Y dx\sqrt{(1+pp)}$$

Soit de plus $dp = q\,dx$, & apres avoir differentié cette équation:

$$\int X dx\sqrt{(1+pp)} + \frac{Xp\sqrt{(1+pp)}}{q} = \frac{Y\sqrt{(1+pp)}}{q}$$

nous obtiendrons mettant partout $q\,dx$ au lieu de dp

$$X dx\sqrt{(1+pp)} + X dx\sqrt{(1+pp)} + \frac{Xppdx}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{pdX\sqrt{(1+pp)}}{q} - \frac{Xpdq\sqrt{(1+pp)}}{qq}$$

$$= \frac{Ypdx}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{dY\sqrt{(1+pp)}}{q} - \frac{Ydq\sqrt{(1+pp)}}{qq}$$ qui se réduit à

$$2Xdx + \frac{Xppdx}{1+pp} + \frac{pdX}{q} - \frac{Xpdq}{qq} = \frac{Ypdx}{1+pp} + \frac{dY}{q} - \frac{Ydq}{qq}.$$

Multiplions cette equation par $1+pp$ pour avoir

$$\frac{(dY - pdX)}{q}(1+pp) - \frac{dq}{qq}(Y - pX)(1+pp) + Ypdx - 2Xdx(1+pp) - Xppdx =$$

& pour en trouver l'integrale, s'il y en a, je suppose;

$$\frac{(Y - pX)(1+pp)}{q} = Z$$ ce qui étant differentié donne

$$\frac{(dY - pdX)(1+pp)}{q} - \frac{dq}{qq}(Y - pX)(1+pp) + 2pdx(Y - pX) - Xdx(1+pp) =$$

ayant mis partout $dp = q\,dx$, Retranchons de cette équation la precedente, & il nous restera :

$$dZ = Yp\,dx - 2\,Xpp\,dx + X\,dx\,(1+pp) + Xpp\,dx$$

ou bien $dZ = Yp\,dx + X\,dx$. Or puisque $dy = p\,dx$, nous aurons $dZ = X\,dx + Y\,dy$, laquelle expression, parceque X est fonction de x & Y fonction de y, sera integrable & donnera

$$Z = \int X\,dx + \int Y\,dy$$

de sorte que notre equation integrale cherchée sera

$$\frac{(Y - pX)\,(1+pp)}{q} = \int X\,dx + \int Y\,dy$$

ou à cause de $q = \frac{dp}{dx}$ & $dy = p\,dx$:

$$\frac{dp}{1+pp} = \frac{Y\,dx - X\,dy}{\int X\,dx + \int Y\,dy}$$

Il ne paroit pas que cette équation se puisse encore integrer ; aussi n'est ce-pas mon dessein de construire ces courbes, ou d'en rechercher la nature : mon but n'etant ici, que de trouver les formules, qui etant supposées devenir un *maximum*, ou un *minimum*, fournissent les mêmes courbes que nous trouvons par les principes de mechanique.

XVII. Soit $\int Z\,dx$ cette formule, qui étant supposée un *maximum*, ou *minimum*, produise la courbe, que nous venons de trouver, ou l'equation :

$$\frac{dp}{1+pp} = \frac{Y\,dx - X\,dy}{\int X\,dx + \int Y\,dy}$$

& soit $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$, voiant, que Z doit etre une fonction des quantités x, y, & p. Et alors la courbe cherchée sera exprimée par cette équation : $o = N - \frac{dP}{dx}$, ou $o = N\,dx - dP$, équation qui doit être la même, que $\frac{dp}{1+pp} = \frac{Y\,dx - X\,dy}{\int X\,dx + \int Y\,dy}$.

Ici je remarque, que dans l'analyse il nous manque encore une methode, par laquelle on puisse decouvrir la formule $\int Z\,dx$, sachant l'équation, à laquelle elle doit conduire : mais aprés quelques essais on trouve-

ra,

ni, que l'on n'a qu'à mettre $Z = (\int X dx + \int Y dy) \sqrt{(1+pp)}$. Car alors on aura $M = X \sqrt{(1+pp)}$; $N = Y \sqrt{(1+pp)}$

& $P = \frac{p(\int X dx + \int Y dy)}{\sqrt{(1+pp)}}$, d'où l'on tire

$$dP = \frac{dp(\int X dx + \int Y dy)}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}} + \frac{X p dx + Y p dy}{\sqrt{(1+pp)}}$$

& partant l'équation $N dx = dP$ donnera

$$Y dx \sqrt{(1+pp)} = \frac{dp(\int X dx + \int Y dy)}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}} + \frac{X p dx + Y p dy}{\sqrt{(1+pp)}}$$

qui etant multipliée par $\sqrt{(1+pp)}$ produira :

$$Y dx + Y pp dx - X p dx - Y p dy = \frac{dp(\int X dx + \int Y dy)}{1+pp}$$

Or puisque $p dx = dy$, il sera $Y pp dx - Y p dy = o$; & par conséquent on aura :

$$Y dx - X dy = \frac{dp(\int X dx + \int Y dy)}{1+pp} \text{ ou } \frac{dp}{1+pp} = \frac{Y dx - X dy}{\int X dx + \int Y dy}$$

qui est la même équation, que nous avons trouvée pour la courbure du fil AYM.

THEOREME II.

XVIII. *Le fil* AYM *étant sollicité, comme on a supposé dans le probleme II. dans chaque point* M *par deux forces, l'une selon la direction des abscisses* MQ *qui soit égale à une fonction* X *de l'abscisse* CP = x; *& l'autre selon la direction des appliquées* MP, *qui soit égale à une fonction* Y *de l'appliquée* PM = y; *alors ce fil prendra une telle figure* AYM, *dans laquelle cette expression* $\int ds (\int X dx + \int Y dy)$ *sera un* minimum.

Le Theoreme precedent nous a dejà fait voir, que si le fil n'etoit sollicité que par les forces Y, alors cette formule $\int dx \int Y dy$ seroit un *minimum*: & par la même raison, si le fil étoit sollicité par les seules forces X, alors cette formule $\int ds \int X dx$ deviendroit un *minimum*. A' présent nous voyons, que si ces deux differentes forces agissent ensemble, alors aussi la somme de ces deux formules $\int ds (\int X dx + \int Y dy)$ y deviendra un *minimum*, ce qui sera à présent d'autant plus aise de démontrer *a priori*. Nous avons supposé les forces X & Y con-

V contraires aux accroissemens des coordonnées x & y; car dès que le point M obeïroit à ces forces, tant l'abscisse x que l'appliquée y en deviendroit plus petite. D'où il est clair, que si ces forces avoient des directions opposées, alors la formule $-\int ds\,(\int X dx + \int V dy)$ deviendroit un *minimum*, & partant celle-cy $+\int ds\,(\int X dx + \int V dy)$ un *maximum:* ce qui sert à faire voir l'étroite liaison entre les *maxima* & *minima*, de sorte qu'on n'a qu'à changer le signe, pour changer le *minimum* dans un *maximum*, & réciproquement.

PROBLEME III.

XIX. *Si l'epaisseur du fil* A *V* M *n'est pas la même partout, mais qu'elle varie selon une loi quelconque, & que ce fil soit sollicité en chaque point* M *suivant la direction* M Q *par une force exprimée par une fonction quelconque de l'abscisse* C P $= x$, *trouver la figure que ce fil prendra.*

SOLUTION.

Soit X la fonction, à laquelle la force, qui tire l'élement M m suivant M Q, est proportionelle; & cette force X doit etre regardée comme une force acceleratrice, qui etant multipliée par la masse de l'élément M m, donnera la veritable force motrice. Or le fil étant supposé d'une épaisseur inegale, la masse de l'élément M m, n'e sera plus exprimée par ds, ni par conséquent la force par X ds. Soit donc $\int S\,ds$ la masse du fil entier A *V* M dont la longueur $= s$, & la masse de l'élément M m sera $= S\,ds$, où S marque une fonction quelconque de s, d'où depend l'epaisseur du fil. Donc la force qui tire cet élément M m, suivant la direction des abscisses M Q, sera $= X\,S\,ds$, qui étant mise pour Q ds donnera pour la figure du fil cette équation:

$$C\,dx = dy \int X\,S\,ds.$$

Posant $dy = p\,dx$ & $ds = dx\,\sqrt{(1+pp)}$ cette équation se changera en $\frac{C}{p} = \int X\,S\,dx\,\sqrt{(1+pp)}$, & par la differentiation en

$$-\frac{C\,dp}{pp\sqrt{(1+pp)}} = X\,S\,dx, \text{ ou } \frac{C\sqrt{(1+pp)}}{p} = \int X\,S\,dx.$$

Il s'en faut encore beaucop, qu'on puisse connoitre de cette équation

la

la courbe que nous cherchons, mais cette équation suffit pour notre dessein qui est de découvrir une formule, qui étant supposée un *minimum* produise la même équation $\frac{C\sqrt{(1+pp)}}{p} = \int X\,S\,dx$.

XX. Il paroit d'abord fort probable, que pour avoir cette formule, nous n'avons qu'à écrire $S\,ds$, au lieu de ds, dans les formules, qui satisfont aux questions précedentes. Ainsi pour ce cas que nous venons de developper nous aurons cette formule $\int S\,ds \int X\,dx$, qui etant supposée un *minimum*, devroit produire l'equation pour la courbure du fil. Cette formule comparée à la générale $= \int Z\,dx$, à cause de $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$ donnera $Z = S\sqrt{(1+pp)}.\int X\,dx$: qui etant une fonction renfermant non seulement les x, y, avec leurs differentiels, mais aussi l'arc s, il faut emploïer pour ce cas la régle qui suit.

Si Z est une fonction non seulement des variables x, y, & des quantités qui résultent de leurs differentiels, savoir $p = \frac{dy}{dx}$; $q = \frac{dp}{dx}$; $r = \frac{dq}{dx}$ *&c. mais aussi d'une formule intégrale* $\int \mathfrak{Z}\,dx = \Pi$, *de sorte que*

$$dZ = L\,d\Pi + M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + R\,dr \text{ \&c.}$$

$$\text{\&}\ d\mathfrak{Z} = \mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{N}\,dy + \mathfrak{P}\,dp + \mathfrak{Q}\,dq + \mathfrak{R}\,dr \text{ \&c.}$$

Alors entre toutes les courbes, qui ont $\int \mathfrak{Z}\,dx$ *de la même grandeur, celle où il y aura* $\int Z\,dx$ *un minimum sera exprimée par cette équation.*

$$o = N - \mathfrak{N}\int L\,dx - \frac{1}{dx}\,d.(P - \mathfrak{P}\int L\,dx) + \frac{1}{dx^2}\,dd.(Q - \mathfrak{Q}\int L\,dx).$$

XXI. Dans le cas present S étant une fonction de $s = \int dx\sqrt{(1+pp)}$, je ferai $\Pi = s$ & $\mathfrak{Z} = \sqrt{(1+pp)}$: & il sera $\mathfrak{M} = o$, $\mathfrak{N} = o$, & $\mathfrak{P} = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}$; Ensuite supposant $dS = K\,ds$, nous aurons

$$dZ = K ds \sqrt{(1+pp)} . \int X dx + X S dx \sqrt{(1+pp)} + \frac{S p dp}{\sqrt{(1+pp)}} \int X dx$$

& partant $L = K \sqrt{(1+pp)} \int X dx$; $M = XS \sqrt{(1+pp)}$; $N = 0$ & $P = \frac{S p \int X dx}{\sqrt{(1+pp)}}$. De là l'equation cherchée sera :

$$0 = -\frac{1}{dx} d. \left(\frac{S p \int X dx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} \int K dx \sqrt{(1+pp)} . \int X dx \right)$$

Or puisque $K dx \sqrt{(1+pp)} = K ds$, nous aurons $K dx \sqrt{(1+pp)} = dS$ & notre équation sera $0 = -\frac{1}{dx} d. \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} (S \int X dx - \int dS \int X dx)$ & prenant intégrale :

$$C = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} (S \int X dx - \int dS \int X dx).$$

Mais le differentiel de $S \int X dx - \int dS \int X dx$ étant $= X S dx$, nous aurons $C = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}} \int X S dx$, ou bien $\frac{C \sqrt{(1+pp)}}{p} = \int X S dx$, qui est la même équation, que la solution du probleme nous a fournie, & par consequent cette solution se trouve, si l'on cherche entre toutes les courbes isoperimetres, ou entre toutes les courbes, que le fil proposé pourroit former, celle, où il y aura cette formule $\int S ds \int X dx$ *un minimum :* & de là nous tirerons ce theoreme encore plus général.

THEOREME III.

XXII. *Le fil parfaitement flexible* AYM, *dont la longueur* $= s$, *& la masse* $= \int S ds$, *étant sollicité en chaque point* M *par deux forces acceleratrices, suivant les directions* MQ, MP, *dont celle - là soit égale à une fonction* X *de l'abscisse* CP $= x$, *à laquelle la direction* MQ *est parallele ; or celle-ci, qui agit dans la direction de l'appliquée* MP $= y$, *soit égale à une fonction* Y *de* y, *de sorte que l'element du fil* Mm $= ds$, *dont la masse* $= S ds$, *soit sollicité par la force motrice* XSds *selon* MQ *& par la force motrice* YSds *selon* MP : *la courbe*, AYM, *que le fil formera, aura cette proprieté, que parmi toutes les autres*

autres courbes de la même longueur, il y aura cette formule $\int S\, ds\, (\int X\, dx + \int Y\, dy)$ *UN MINIMUM.*

Il n'eſt pas neceſſaire de démontrer ce theoreme dans toute ſon étendue, car l'ayant démontré pour le cas, où l'elément M*m* n'eſt ſollicité que par une force $XS\,ds$ dans la direction MQ, la même démonſtration ſervira auſſi pour l'autre force $YS\,ds$, ſi elle agiſſoit toute ſeule, deſorte que pour le premier cas on aura la formule $\int S\, ds \int X\, dx$, & pour l'autre celle-cy $\int S\, ds \int Y\, dy$, qui doit être un *minimum*. Or la ſolution du probleme ſecond nous convaincra, que ſi les deux forces agiſſent enſemble, on n'aura qu'à ajouter enſemble les deux formules, qui appartiennent ſeparément à ces deux cas: cependant on pourra s'aſſeurer tout à fait de cette verité, ſi l'on veut faire le calcul ſuivant les régles, dont nous nous ſommes ſervi dans la ſolution du probleme II.

XXIII. Pour approfondir la nature de ces formules, il faut avoir egard à trois choſes: I*mo.* à la quantité des forces acceleratrices, dont chaque élément du fil eſt ſollicité, II*do.* à la direction de ces forces & III*tio.* à l'epaiſſeur, ou à la maſſe du fil. La quantité de la force acceleratrice ſe trouve, ſi l'on diviſe la force motrice dont chaque élément du fil eſt ſollicité, par la maſſe de ce même élément: la force acceleratrice ſera donc une quantité finie exprimée par une fonction. Jusqu'ici nous avons ſuppoſé des fonctions, ou de l'abſciſſe x, ou de l'appliquée y, pour exprimer ces forces acceleratrices. Pour la direction de ces forces, nous l'avons ſuppoſée parallele à celle des coordonnées x ou y, dont la force même étoit une fonction: Ainſi la force exprimée par X, fonction de l'abſciſſe $CP = x$, agiſſoit dans la direction MQ parallele aux abſciſſes, & la force Y, fonction de l'appliquée $PM = y$, agiſſoit dans cette même direction MP. Dans ces cas pour trouver les formules, qui contiennent un *minimum*, ou ce qui revient au même, pour repréſenter la quantité d'action, il faut multiplier chaque force X & Y par l'elément de ſa direction dx & dy, pour avoir $X\,dx$ & $Y\,dy$, & d'en prendre les intégrales $\int X\, dx$ & $\int Y\, dy$. A ces formules on donnera le ſigne + ſi les forces X & Y ſont contraires aux directions des quantités x & y, ou que leur action tend à diminuer ces quantités, comme la figure répréſente: or ſi une de

ces

ces forces avoit une direction contraire; on donnera le signe — à la formule intégrale $\int X\,dx$ ou $\int Y\,dy$. Suivant cette régle par rapport aux signes, on ajoutera ensemble ces intégrales, s'il y en a plusieurs, & on multipliera la somme par la masse de l'elément du fil $S\,ds$. Alors l'intégrale de ce produit $\int S\,ds\,(\pm\int X\,dx \pm \int Y\,dy)$; sera la formule cherchée, dont la valeur est *un minimum* pour la courbe du fil.

XXIV. Cette régle, que nous venons de découvrir, demande, que la variable, dont la force est une fonction, & la force, ayent la même direction; & on se tromperoit, si l'on vouloit appliquer cette régle à des cas, ou cette identité de directions n'a pas lieu. Pour la preuve de cela, supposons que le fil A Y M soit sollicité au point M suivant la direction de l'appliquée MP par une force, qui soit égale à une fonction de l'abscisse $CP = x$. Soit cette force $= X$, & supposant le fil par tout également epais, nous aurons pour sa courbure cette équation $B\,dy = dx\int X\,ds$, qui posant $dy = p\,dx$ se change en $Bp = \int X\,dx\,\sqrt{(1+pp)}$, ou $\frac{B\,dp}{\sqrt{(1+pp)}} = X\,dx$, d'où l'on tire $\int X\,dx = B\int\frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}}$.

Or on verra bientot, que cette courbe ne se trouve pas en faisant la formule $\int ds\int X\,dy$ un *minimum*, où la force acceleratrice X est multipliée par dy, le differentiel de la ligne MP, qui représente la direction de cette force, & l'integral $\int X\,d$ est y multiplié par l'élément du fil ds. Mais la courbe qu'on tire de cette formule $\int ds\int X\,dy$ suivant la methode de *maximis* & *minimis* sera bien differente de celle, que nous venons de trouver savoir

$$\int X\,dx = B\int\frac{dp}{\sqrt{(1+pp)}} = B\,l\,(p+\sqrt{(1+pp)})$$

XXV. Voyons donc quelle sera pour ce cas la formule, qui étant supposée un *maximum*, ou *minimum*, conduise à cette même équation. Soit $\int Z\,dx$ cette formule, & $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp$; d'où on obtient en général cette équation $o = N - \frac{dP}{dx}$

Or

Or puisque notre équation $\int X\,dx = B\int\frac{dp}{V(1+pp)}$ ne contient pas y, on voit que $N = o$, & que l'équation pour la courbe sera $dP = o$, ou $P = B$. Soit pour abréger $\Pi = \int\frac{dp}{V(1+pp)}$, de sorte que Π est une fonction connue de p, & notre équation $\int X\,dx = B\,\Pi$, comparée à $P = B$, donnera $P = \frac{\int X\,dx}{\Pi}$, & partant $dZ = M\,dx + \frac{dp\int X\,dx}{\Pi}$; soit l'integral $\int\frac{dp}{\Pi} = \Phi$, & nous aurons $Z = \Phi \int X\,dx$, & la formule dont la valeur est un *maximum*, ou *minimum*, dans la courbe du fil sera $\int \Phi\,dx \int X\,dx$, où Φ marque une fonction de p, qui renferme une double intégration savoir $\Phi =$

$$\int\frac{dp}{\int\frac{dp}{V(1+pp)}} = \int\frac{dp}{l(V(1+pp) \pm p)};$$

formule si embarassée qu'il semble presque impossible, qu'aucune theorie y sauroit jamais conduire à *priori*.

XXVI. Nous voyons donc, qu'il n'est pas permis de donner à la régle, que nous avons tirée des trois theoremes precedens, une plus grande étendue, que pour les cas où, tant la quantité, que la direction des forces acceleratrices sont déterminées par la même quantité variable, & quoique jusqu'ici nous ayons supposé ces variables paralleles entr'elles, pourtant la régle mentionnée aura aussi lieu, si les variables, dont les forces sont des fonctions, sortent d'un point fixe, pourvû que les forces agissent dans la direction de ces mêmes variables. La même régle ne souffrira non plus aucune exception, quand même le fil seroit sollicité en même tems vers plusieurs points fixes, par des forces acceleratrices, qui fussent proportionelles à des fonctions quelconques des distances à ces points. Comme cette circonstance contribuëra considérablement à la perfection de la theorie, que nous avons en vuë, je joindrai les problemes suivans, où je considérerai des forces dirigées vers un, ou plusieurs points fixes, pour en tirer les theo-

theoremes, qui contiennent les formules, dont la quantité d'action peut être représentée.

PROBLEME IV.

Fig. 2. XXVII. *Le fil* A M *étant dans tous ses points* M *sollicité vers le point fixe* C *par une force, qui soit exprimée par une fonction quelconque de la distance* M C: *trouver la courbe* C M, *à laquelle le fil sera réduit.*

SOLUTION.

Que l'axe C P auquel nous rapporterons la courbe, passe par le point C, & y ayant tiré la perpendiculaire M P, soit C P $= x$, P M $= y$, & il sera C M $= \sqrt{(xx + yy)}$. Or soit C M $= \sqrt{(xx+yy)} = v$ & V la fonction de v, qui exprime la force acceleratrice, dont l'élément M m est tiré vers C. Décomposons cette force selon les directions M P, M Q paralleles aux coordonnées, & nous aurons la force selon M Q $= \frac{V x}{v}$ & la force selon M P $= \frac{V y}{v}$. Donc dans la solution du problême général nous n'avons qu'à mettre $\frac{V x}{v}$ au lieu de Q & $\frac{V y}{v}$ au lieu de P, & l'equation pour la courbe cherchée A M sera

$$dy \int \frac{V x ds}{v} - dx \int \frac{V y ds}{v} = 0$$

où ds marque la masse de l'élément du fil M m, que je supposerai ici de la même épaisseur par tout, desorte que $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Mettons comme auparavant $dy = p\,dx$, pour avoir $p \int \frac{V x dx \sqrt{(1+pp)}}{v} = \int \frac{V y dx \sqrt{(1+pp)}}{v}$ dont le differentiel est:

$$dp \int \frac{V x dx \sqrt{(1+pp)}}{v} + \frac{V x p dx \sqrt{(1+pp)}}{v} = \frac{V y dx \sqrt{(1+pp)}}{v}$$

Soit

Soit de plus $dp = q\,dx$, & pour $\frac{V}{v}$ écrivons U, pour avoir:

$$\int U x\,dx\,\surd(1+pp) = \frac{U(y-px)\surd(1+pp)}{q}$$

dont le differentiel eſt:

$$U x dx \surd(1+pp) = \frac{dU(y-px)\surd(1+pp)}{q} - Uxdx\surd(1+pp) + \frac{U(y-px)pdx}{\surd(1+pp)}$$
$$- \frac{U(y-px)dq\surd(1+pp)}{qq}$$

qui ſe change en celle-cy

$$\frac{2xqdx}{y-px} = \frac{dU}{U} + \frac{pqdx}{1+pp} - \frac{dq}{q}$$

ou bien à cauſe de $q\,dx = dp$ en celle-cy

$$\frac{2xdp}{y-px} = \frac{dU}{U} + \frac{pdp}{1+pp} - \frac{dq}{q}$$

dont chaque membre eſt un differentiel logarithmique; car $d(y-px) = -x\,dp$, & partant $\frac{2xdp}{y-px} = \frac{-2d(y-px)}{y-px}$

Par conſéquent l'integrale de notre équation ſera $lC - 2l(y-px) = lU + l\surd(1+pp) - lq$, & remontant aux nombres:

$$\frac{C}{(y-px)^2} = \frac{U\surd(1+pp)}{q} = \frac{Udx\surd(1+pp)}{dp}$$

Donc $\frac{Cdp}{(y-px)^2\surd(1+pp)} = U\,dx$. Or puiſque U eſt fonction de $v = \surd(xx+yy)$, & partant $vdv = xdx + ydy = dx(x+py)$ multiplions notre équation par $x+py$, pour avoir

$$\frac{Cdp(x+py)}{(y-px)^2\surd(1+pp)} = Udx(x+py) = Uvdv = Vdv$$

à cauſe de $V = Uv$; où le membre $V\,dv$ eſt integrable: or je remarque que l'autre membre $\frac{Cdp(x+py)}{(y-px)^2\surd(1+pp)}$ eſt également

 inte-

integrable, ayant pour integrale $\frac{C\sqrt{(1+pp)}}{y-px}$. Car puisque $d(y-px) = -x\,dp$ à cause de $dy = p\,dx$, il sera

$$\frac{C\sqrt{(1+pp)}}{y-px} = \frac{C\,p\,dp}{(y-px)\sqrt{(1+pp)}} + \frac{Cx\,dp\sqrt{(1+pp)}}{(y-px)^2} = \frac{C\,dp\,(x+py)}{(y-px)^2\sqrt{(1+pp)}}$$

Par conséquent nous aurons pour l'equation de la courbe cherchée:

$$\frac{C\sqrt{(1+pp)}}{y-px} = \int V\,dv.$$

XXVIII. Il y a encore un autre chemin de trouver l'integrale de l'equation differentielle, à laquelle nous sommes parvenus:

$$= \frac{dU(y-px)\sqrt{(1+pp)}}{q} - 2Ux\,dx\sqrt{(1+pp)} + \frac{U(y-px)p\,dx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{U(y-px)dq\sqrt{(1+pp)}}{qq}$$

Nous n'avons qu'à la multiplier par $\sqrt{(1+pp)}$, pour avoir

$$= \frac{dU(y-px)(1+pp)}{q} - 2Ux\,dx(1+pp) + U(y-px)p\,dx - \frac{U(y-px)dq(1+pp)}{qq}$$

de laquelle supposons que l'integrale soit:

$$C = Z + \frac{U(y-px)(1+pp)}{q},$$ qui etant differentiée donne

$$= dZ + \frac{dU(y-px)(1+pp)}{q} - Ux\,dx(1+pp) + 2U(y-px)p\,dx - \frac{U(y-px)dq(1+pp)}{qq}$$

qui étant comparée à notre équation donnera:

$dZ = -Ux\,dx\,(1+pp) - U(y-px)p\,dx = -U\,dx(x+py)$

Il y aura donc $dZ = -U(x\,dx + y\,dy) = -U\,v\,dv$

& parceque $U\,v = V$, qui est fonction de v nous aurons $dZ = -V\,dv$ & $Z = -\int V\,dv$. Par conséquent notre équation integrée pour la premiere fois sera

$$C = -\int V\,dv + \frac{U(y-px)(1+pp)}{q}$$

ou bien $\frac{U}{\int V\,dv} = \frac{q}{(y-px)(1+pp)}$.

Multiplions de part & d'autre par $v\,dv = dx\,(x+py)$ & nous aurons

$U\,v\,dv$

$$\frac{Uvdv}{\int V dv} = \frac{qdx(x+py)}{(y-px)(1+pp)}$$

Or puisque $Uv = V$ & $qdx = dp$,

$$\frac{Vdv}{\int V dv} = \frac{dp(x+py)}{(y-px)(1+pp)} = \frac{xdp}{y-px} + \frac{pdp}{1+pp}$$

dont chaque membre eſt un differentiel logarithmique à cauſe de $xdp = -d(y-px)$, & delà nous tirerons cette équation intégrale

$$l\int V dv = -l(y-px) + l\sqrt{(1+pp)} + lC$$

d'où remontant aux nombres nous obtiendrons

$$\int V dv = \frac{C\sqrt{(1+pp)}}{y-px}$$

qui eſt la même équation, que nous avons trouvée par la premiere methode, aprés avoir fait deux integrations. Mais qu'on remarque en particulier l'équation qui s'eſt trouvée ici par la premiere integration

$$\int V dv = \frac{U(y-px)(1+pp)}{q} \text{ ou } \frac{q\int V dv}{1+pp} = \frac{V(y-px)}{v}$$

à laquelle conduira la methode de *maximis* & *minimis*.

THEOREME IV.

XXIX. *Le fil* A M *étant dans tous ſes points* M *ſollicité vers le point fixe* C *par une force acceleratrice* V, *qui ſoit une fonction quelconque de la diſtance* C M $= v$, *la courbure du fil ſe trouvera, ſi l'on cherche entre toutes les courbes poſſibles, celle où la valeur de cette expreſſion* $\int ds \int V dv$ *eſt un* minimum, (*ds marquant la maſſe de l'élément du fil* M *m*.) Fig. 2.

DEMONSTRATION.

Ayant fait $dy = pdx$, $dp = qdx$, la formule propoſée $\int ds \int V dv$ ſe change en $\int dx\sqrt{(1+pp)}\int V dv$, ſuppoſant le fil par tout de la même groſſeur, où $\int V dv$ ſera une fonction de v, & partant ſon differentiel $= V dv = \frac{Vxdx + Vydy}{v}$ à cauſe de $vdv = xdx + ydy$.

Ou mettant $dp = q\,dx$, & pour ds sa valeur $dx\sqrt{(1+pp)}$

$$\int dx\,(Ux + U'x' + U''x'')\sqrt{(1+pp)} = \frac{U(y-px)\sqrt{(1+pp)}}{q} + \frac{U'(y'-px')\sqrt{(1+pp)}}{q} + \frac{U''(y''-px'')\sqrt{(1+pp)}}{q}$$

laquelle étant differentiée, comme dans la solution du probleme précedent, donnera :

$$0 = \frac{dU(y-px)\sqrt{(1+pp)}}{q} - 2Ux\,dx\sqrt{(1+pp)} + \frac{U(y-px)\,p\,dx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{U(y-px)\,dq\sqrt{(1+pp)}}{qq}$$
$$+ \frac{dU'(y-px')\sqrt{(1+pp)}}{q} - 2U'x'dx\,(1+pp) + \frac{U'(y'-px')\,p\,dx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{U'(y'-px')\,dq\sqrt{(1+pp)}}{qq}$$
$$+ \frac{dU''(y''-px'')\sqrt{(1+pp)}}{q} - 2U''x''dx\sqrt{(1+pp)} + \frac{U''(y''-px'')\,p\,dx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{U''(y''-px'')\,dq\sqrt{(1+pp)}}{qq}$$

qui étant multipliée par $\sqrt{(1+pp)}$, & integrée comme dans le §. XXVIII. donnera :

$$C = -\int V\,dv + U\,(y-px)\,(1+pp) : q$$
$$-\int V'\,dv' + U'(y'-px')(1+pp) : q$$
$$-\int V''dv'' + U''(y''-px'')\,(1+pp) : q$$

Ou si nous tirons des centres de forces C, C', C'' des perpendiculaires sur la tangente de la courbe, & que nous nommions ces perpendiculaires u, u', u'' &c, nous aurons,

$$C = +\frac{V\,u\,dv}{du} - \int V\,dv$$
$$+\frac{V'u'\,dv'}{du'} - \int V'\,dv'$$
$$+\frac{V''u''dv''}{du''} - \int V''\,dv''$$

Si nous multiplions par $\frac{q}{1+pp}$ nous obtiendrons cette équation :

$$\frac{q}{1+pp}\left(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''\right) = \left\{\begin{array}{l} + U(y-px) \\ + U'(y'-px') \\ + U''(y''-px'') \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} + V(y-px) : v \\ + V'(y'-px') : v' \\ + V''(y''-px'') : v'' \end{array}\right.$$

qui exprime la nature de la courbure du fil.

Theoreme V.

XXXI. *Le fil parfaitement flexible* AM *étant dans tous ses points* M *sollicité vers plusieurs points fixes* C, C', C'' *&c. par des forces accelératrices* V, V', V'' *&c. qui soient des fonctions quelconques des distances* $MC = v$, $MC' = v'$, $MC'' = v''$ *&c. (c. à d. chaqune de la distance qui lui répond), la courbe, que le fil formera aura cette proprieté, que la valeur de cette formule* $\int ds\,(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'')$ *y sera un* minimum, *où* ds *marque la masse de l'élément du fil* Mm.

Demonstration.

Soit le fil partout de la même grosseur, desorte que ds, qui devroit marquer la masse de l'elément du fil Mm, signifie simplement sa longueur $dx\sqrt{(1+pp)}$, supposant $dy = p\,dx$. Car on reconnoitra aisément, que la demonstration sera la même, si au lieu de ds on mettoit dans la formule $S\,ds$, où S marqueroit une fonction quelconque de s. Cela remarqué, si nous y appliquons les formules générales $\int Z dx$ & $dZ = M dx + N dy + P dp$, nous aurons:

$$Z = \left(\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv''\right)\sqrt{(1+pp)}$$

& puisque:

$$dv = \frac{x\,dx + y\,dy}{v};\quad dv' = \frac{x'\,dx + y'\,dy}{v'};\quad dv'' = \frac{x''\,dx + y''\,dy}{v''}$$

nous aurons les valeurs suivantes:

$$M = \left(\frac{Vx}{v} + \frac{V'x'}{v'} + \frac{V''x''}{v''}\right)\sqrt{(1+pp)}$$

$$N = \left(\frac{Vy}{v} + \frac{V'y'}{v'} + \frac{V''y''}{v''}\right) \sqrt{(1+pp)}$$

$$P = \frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'')$$

Or ces valeurs etant trouvées, nous savons que la courbe, où $\int Z\,dx$ est un *minimum*, sera exprimée par cette équation : $N\,dx = dP$: qui sera :

$$\left(\frac{Vy}{v} + \frac{V'v'}{v'} + \frac{V''y''}{v''}\right) dx \sqrt{(1+pp)} =$$

$$\frac{p}{\sqrt{(1+pp)}}(V dv + V' dv' + V'' dv'') + \frac{dp}{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'')$$

& multipliant par $\sqrt{(1+pp)}$, nous obtiendrons en faisant $dp = q\,dx$; & en remettant pour dv, dv', dv'' leurs valeurs ; cette équation :

$$\frac{V(y-px)}{v} + \frac{V'(y'-px')}{v'} + \frac{V''(y''-px'')}{v''} =$$

$$\frac{1+pp}{q}(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'')$$

laquelle étant la même, que la solution du probléme précedent nous a fournie, la verité du theoreme est manifeste. Si l'on vouloit entreprendre le calcul, on s'assureroit par une opération semblable, de la verité du theoreme pour les cas où l'épaisseur du fil seroit supposée variable. Car alors on n'aura qu'à mettre $S\,ds$ pour ds, & pour S prendre une fonction quelconque de s, tout comme nous avons fait dans la solution du Probl. III.

XXXII. Nous voilà donc tout à fait éclaircis sur la maniere de déterminer la quantité d'action, lorsque les forces agissent, ou en des directions données, ou lorsqu'elles sont dirigées vers des points fixes, pourvuque que la quantité de chaque force soit exprimée par une fonction de la distance à son point fixe. Car le cas où les directions d'une force sont paralleles entr'elles, est compris dans l'autre, où la force est dirigée vers un point fixe, quand ce point s'eloigne

à l'in-

à l'infini. Or quoique dans ce cas, où la distance au point fixe devient infinie, il semble que la force ne puisse pas être exprimée par une fonction de cette distance, la régle donnée y trouve pourtant lieu, & ne demande aucune exception. Car soit z la distance infinie du lieu, où la force agit, au point fixe qu'on suppose eloigné à l'infini; on en pourra retrancher une ligne constante a pareillement infinie, desorte que $z - a$ devienne une ligne finie; & alors la quantité de la force doit être exprimée par une fonction de cette ligne finie $z - a$, pourqu'on puisse appliquer la régle trouvée: car il est clair, que la force étant une fonction de $z - a$, pourra être regardée comme une fonction de la distance même z, bien qu'elle soit infinie. Or dans ce cas $z - a$ marquera la distance du lieu, où la force agit, à une ligne droite, qui est perpendiculaire aux directions de la force, qui seront paralleles entr'elles. C'est donc la raison, pourquoi notre régle a pu être appliquée avec succes dans les cas, où la force, qui agissoit selon la direction de l'abscisse ou de l'appliquée, a été exprimée par une fonction de l'abscisse, ou de l'appliquée.

XXXIII. Cela remarqué, nous pourrons établir, que la régle, que nous venons de découvrir pour déterminer la *quantité d'action*, aura lieu toutes les fois, que les forces, dont le fil est sollicité, seront dirigées vers des points fixes, & que la quantité de chaque force sera exprimée par une fonction quelconque de la distance à ce point fixe, auquel cette force est dirigée. Or dans les cas où cette condition a lieu, quelque grand que soit le nombre des forces, qui agissent sur le fil parfaitement flexible, on trouvera la figure du fil, en cherchant celle, où la quantité d'action devient *un minimum*. Pour cet effet, il faut considerer chaque force separement: Soit dS l'element de la masse du fil, sur lequel les forces agissent, & V une de ces forces acceleratrices dirigée vers un point fixe, dont la distance à l'element du fil soit $= v$, desorte que V soit une fonction quelconque de cette distance v; & alors qu'on prenne l'intégral $\int V\,dv$, auquel on donnera le signe $+$, si l'action de la force tend à diminuer la distance v, mais s'il arrive le contraire, le signe $-$. Ayant tiré selon cette régle pour chaque force la formule $\int V\,dv$, on recueillira tou-

tes ces formules avec leurs signes dans une somme, que je nommerai $= W$; & alors la quantité d'action sera exprimée par cette formule $\int W\,dS$, qui étant supposée un *minimum*, donnera la figure du fil. En examinant cette expression de la quantité d'action, on la trouvera parfaitement d'accord avec celle que Monsieur de *Maupertuis* a publiée dans les Mémoires de l'Academie Royale des Sciences de Paris pour l'An. 1740. & qu'il a tirée de principes, qui tiennent plutot à la Metaphysique qu'à la Mecanique.

XXXIV. Quoique je n'aye appliqué cette régle, qu'aux fils parfaitement flexibles, on reconnoîtra aisément que cette maniere de déterminer la quantité d'action doit être beaucoup plus générale, & qu'elle aura lieu dans tous les autres objets, sur lesquels les mêmes forces peuvent agir: car en effet, le cas, auquel Mr. de *Maupertuis* a appliqué cette régle est bien different de celui cy, que j'ai consideré dans les problemes précedens. Il n'y a donc aucun doute qu'on ne doive exprimer de la même maniere la quantité d'action des forces semblables, qui agissent sur un fil roide, ou élastique: or dans ce cas, comme la courbure d'un tel fil ne dépend pas uniquement de ces forces, qui agissent sur chacun de ses élémens, mais outre cela aussi de sa roideur, ou de son élasticité; il faut ajouter à la quantité d'action qui resulte des forces, encore la quantité d'action qui convient à la roideur, ou élasticité même du fil, pour obtenir l'expression totale, qui sera un *minimum*. Mais il ne paroit pas si facile de déterminer suivant la même régle, que je viens de donner pour les forces, la quantité d'action, qui convient à l'élasticité; puisque l'action de l'elasticité semble tout à fait differente de celle des forces, que j'ai considerées jusqu'ici, tant par rapport à la direction qu'à la quantité de l'élasticité. Je tacherai donc de découvrir *à posteriori* cette quantité d'action de l'élasticité, en cherchant l'expression, qui étant supposée un *minimum*, fournisse la même courbe, que les principes de la Mecanique donnent pour un fil élastique sollicité par des forces quelconques.

Fig. 1. XXXV. Si le fil élastique AYM n'est sollicité qu'au bout A par deux forces constantes $AB = A$ & $AC = C$, la courbe à laquelle

quelle il sera réduit, sera exprimée par cette équation $\frac{S}{r} = By - Cx$, où r marque le rayon de la courbure au point M, & S signifie l'épaisseur du fil au point M ou l'élasticité absolue. De sorte que si le fil est partout également élastique, cette quantité S deviendra constante; soit donc $S = A$, & l'équation $\frac{A}{r} = By - Cx$ exprimera la nature de la courbe élastique ordinaire. Dans ce cas Mr. *Daniel Bernoulli* a remarqué que cette courbe se trouve, si l'on rend cette formule $\int \frac{ds}{rr}$ un *minimum*, où ds marque l'elément de la courbe Mm. De là il faut donc conclurre que la quantité d'action de l'élasticité est proportionnelle à la formule $\int \frac{ds}{rr}$; mais il n'est pas encore clair, si elle se peut combiner avec les formules, qui représentent les quantités d'action des forces sollicitantes, ou en cas que cela soit permis, par quelle constante on doit multiplier cette formule $\int \frac{ds}{rr}$, pour qu'elle puisse être mise en parallele avec les quantités d'action des forces, qui agiront sur le même fil. Pour nous assûrer sur cet article, je m'en vais chercher par les principes de Mecanique la courbure d'un fil élastique, qui est en chaque point M sollicité selon la direction MQ parallele aux abscisses $CP = x$, par des forces X qui soient des fonctions quelconques des abscisses. Et ensuite je tacherai de découvrir la formule, dont la valeur soit la plus petite dans la courbe du fil que j'aurai trouvée.

PROBLEME VI.

XXXVI. *Le fil élastique* AYM, *dont l'epaisseur aussi bien que l'élasticité soit partout la même, étant dans tous ses points* M *sollicité suivant la direction* MQ *parallele aux abscisses* CP, *par des forces ac-* Fig. 3.

 cele-

celeratrices qui soient exprimées par une fonction quelconque de ces mêmes abscisses : trouver la courbe AYM, *que ce fil prendra.*

SOLUTION.

Soit l'abscisse CP $= x$, l'appliquée PM $= y$, l'elément du fil Mm $= ds$, la force acceleratrice MQ $=$ X, & partant la force motrice $= Xds$, puisque ds marquera en même tems la masse de l'element du fil Mm. Soit ensuite le rayon de la courbure en M $= r$, qui supposant $dy = pdx$; $dp = qdx$, sera exprimé en sorte $r = \frac{(1 + pp) \sqrt{(1 + pp)}}{q}$; & $ds = dx \sqrt{(1 + pp)}$. Pour l'effet de l'élasticité, nous avons vu cy-dessus, que son *moment* pour tourner le fil autour du point M, est $= \frac{A}{r}$, A marquant une quantité constante proportionelle à la quantité absolue de l'elasticité. Cela posé, puisque dans l'équation générale donnée §. IX. il y aura S $=$ A, Q $=$ X, & P $= o$, par consequent $\int P ds$ constant $=$ C, nous aurons pour la courbe du fil AYM cette équation $\frac{A}{r} = \int dy \int X ds - Cx$: & prenant les differentiels : $A d. \frac{1}{r} = dy \int X ds - C dx$ ou $\frac{A}{p} d. \frac{1}{r} = dx \int X ds - \frac{C dx}{p}$. Prenons encore les differentiels en supposant dx constant, & nous aurons $A d (\frac{1}{p} d. \frac{1}{r}) = X dx^2 \sqrt{(1 + pp)} + \frac{C dx dp}{pp}$ puisque $ds = dx \sqrt{(1 + pp)}$ d'où nous obtiendrons :

$$\frac{A}{\sqrt{(1 + pp)}} d. (\frac{1}{p} d. \frac{1}{r}) = X dx^2 + \frac{C dx dp}{pp \sqrt{(1 + pp)}}$$

Pour integrer cette équation supposons $\frac{1}{p} d. \frac{1}{r} = R dx$ & à

cause

cause de $d\left(\frac{1}{p}\, d. \frac{1}{r}\right) = dR\, dx$ nous aurons

$$\frac{A\, dR}{V(1+pp)} = X\, dx + \frac{C\, dp}{pp\, V(1+pp)}$$

dont l'intégral sera :

$$\frac{AR}{V(1+pp)} + A\int \frac{Rp\, dp}{(1+pp)V(1+pp)} = \int X\, dx - \frac{C\, V(1+pp)}{p}$$

Or puisque $dp = q\, dx$ & $R\, dx = \frac{1}{p}\, d.\frac{1}{r}$ il sera

$$\int \frac{Rp\, dp}{(1+pp)V(1+pp)} = \int \frac{q}{(1+pp)V(1+pp)}\, d.\frac{1}{r} = \int \frac{1}{r}\, d.\frac{1}{r} = \frac{1}{2rr}$$

parce que $\frac{(1+pp)V(1+pp)}{q} = r$. Par conséquent nous aurons :

$$\frac{A\, d(1:r)}{p\, dx\, V(1+pp)} + \frac{A}{2rr} = \int X\, dx - \frac{C\, V(1+pp)}{p}$$

Mais il y aura $\frac{A}{2rr} = \frac{Aqq}{2(1+pp)^3}$ & $d\frac{1}{r} =$

$$\frac{dp}{(1+pp)V(1+pp)} - \frac{3qp\, dp}{(1+pp)^2\, V(1+pp)} = \frac{dq}{(1+pp)V(1+pp)} - \frac{3pqq\, dx}{(1+pp)^2\, V(1+pp)}$$

de sorte que notre équation integrée sera :

$$\frac{A\, dq}{p(1+pp)^2 dx} - \frac{3Aqq}{(1+pp)^3} + \frac{Aqq}{2(1+pp)^3} = \int X\, dx - \frac{CV(1+pp)}{p}$$

ou bien $\int X\, dx = \frac{CV(1+pp)}{p} + \frac{A\, dq}{p\, dx(1+pp)^2} - \frac{5Aqq}{2(1+pp)^3}$

Il n'est pas besoin, qu'on cherche à integrer cette équation encore une fois ; car elle suffit pour rechercher la formule, qui par la methode des plus grands & plus petits donne la même équation.

XXXVII. Pour

XXXVII. Pour découvrir la formule $\int Z\,dx$, qui étant supposée un *minimum* produise la même courbe, que nous venons de trouver, je commencerai par considerer separément, tant les forces, dont le fil est sollicité, que son elasticité. Et d'abord si l'elasticité du fil evanouïssoit, la formule qui représente la quantité d'action, seroit, comme nous avons vu, $= \int ds \int X\,dx$: or si la force X evanouïssoit, & que la courbe devint l'elastique commune, alors la formule qui représente la quantite d'action seroit $= \int \frac{ds}{rr}$. Delà on pourra conclure, que joignant les forces X & l'elasticité ensemble, la formule, qui représentera la quantité d'action, aura une telle forme $\int ds \int X\,dx + E \int \frac{ds}{rr}$ où $\int ds\,(\int X\,dx + \frac{E}{rr})$, de sorte que la quantité E evanouïsse, si l'elasticité $\frac{A}{r}$ ou sa valeur absoluë A devient $= o$, mais nous ne savons pas encore, si la quantité E est égale à A ou à quelque fonction de A. Je ferai donc la recherche de la courbe, où la valeur de cette expréssion génerale $\int ds\,(\int X\,dx + \frac{E}{rr})$ devient un *minimum*. Soit pour cet effet $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, & il y aura $ds = dx\,\sqrt{(1+pp)}$, & $r = \frac{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}{q}$: d'où notre formule sera $= \int dx\,(\int X\,dx + \frac{Eqq}{(1+pp)^3})\sqrt{(1+pp)}$.

XXXVIII. Celle-cy étant comparée à la formule générale $\int Z\,dx$, donnera $Z = (1+pp)^{\frac{1}{2}} \int X\,dx + \frac{Eqq}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$ d'où l'on voit que Z sera une fonction des quantités x, p & q: & partant posant $dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq$, nous aurons:

$$M = X\sqrt{(1+pp)}\,;\ N = o\,;\ P = \frac{p\int X\,dx}{\sqrt{(1+pp)}} - \frac{5Epqq}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}}$$

& Q

& $Q = \frac{2Eq}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}}$. Or l'équation pour la courbe, où la valeur de la formule $\int Z\,dx$ est un *minimum*, sera $o = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}$, ou puisque $N = o$, celle-cy: $o = -dP + \frac{ddQ}{dx}$, & prenant les intégrales $D = P - \frac{dQ}{dx}$ ou $P\,dx - dQ = D\,dx$: ou bien $dQ - P\,dx + D\,dx = o$, substituons pour P & Q leurs valeurs trouvées, & puisque $dQ = \frac{2E\,dq}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}} - \frac{10E\,pq\,dp}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}} = \frac{2E\,dq}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}} - \frac{10E\,pqq\,dx}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}}$ à cause de $dp = q\,dx$, nous trouverons:

$$\frac{2E\,dq}{(1+pp)^{\frac{5}{2}}} - \frac{10E\,pqq\,dx}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}} - \frac{p\,dx\int X dx}{\sqrt{(1+pp)}} + \frac{5E\,pqq\,dx}{(1+pp)^{\frac{7}{2}}} + D\,dx = o$$

d'où nous tirons:

$$\int X\,dx = \frac{D\sqrt{(1+pp)}}{p} + \frac{2E\,dq}{p\,dx\,(1+pp)^2} - \frac{5E\,qq}{(1+pp)^3}$$

Or l'équation, que nous a fournie la solution du probleme étant

$$\int X\,dx = \frac{C\sqrt{(1+pp)}}{p} + \frac{A\,dq}{p\,dx(1+pp)^2} - \frac{5A\,qq}{2(1+pp)^3}$$

nous voyons prémierement que la constante D, que l'integration a introduite est celle, qui dans la solution du probleme a été nommée $= C$: Ensuite il est evident que $2E = A$, & partant $E = \frac{1}{2}A$, de sorte que nous connoissons à présent le coëfficient de la formule $\int \frac{ds}{rr}$ afin qu'elle puisse être ajoutée aux expressions, qui contiennent les quantités d'action résultantes des forces sollicitantes. Par conséquent pour le cas du probleme précedent la courbe, qui formera le fil elastique, se trouvera, si l'on cherche parmi toutes les

cour-

courbes possibles celle, où la valeur de cette expression $\int ds \int X\,dx + \frac{1}{2} A \int \frac{ds}{rr}$ sera la plus petite : d'où nous tirons le theoreme suivant.

THEOREME VI.

XXXIX. *Le fil elastique* AYM, *dont l'epaisseur aussi bien que l'elasticité soit partout la même, de sorte que la force de l'elasticité au point* M, *laquelle contrebalance la somme des momens de toutes les forces, qui agissent sur le fil, soit* $= \frac{A}{r}$, *où r marque le rayon de la courbure au point* M; *le fil étant sollicité dans tous ses points* M *suivant la direction* MQ *parallele aux abscisses* CP $= x$, *par des forces acceleratrices* X, *qui soient des fonctions quelconques de l'abscisse* x, *la courbe, que ce fil formera, sera trouvée si l'on cherche parmi toutes les courbes possibles celle où cette expression* $\int ds\,(\int X\,dx + \frac{A}{2rr})$ *sera un* minimum, *où* ds *marque la masse de l'élément du fil* Mm.

On voit bien, si au lieu des forces X, dont les directions sont paralleles aux abscisses x, nous eussions supposé, que les élémens du fil Mm (Fig. 3.) fussent sollicités vers plusieurs points fixes C, C′, C″ &c. par des forces acceleratrices V, V′, V″ &c. qui soient des fonctions quelconques des distances CM $= v$, C′M $= v'$, C″M $= v''$ &c. pendant que l'élasticité $\frac{A}{r}$ demeurât la même, dans ce cas plus général, dis-je la courbure du fil se trouvera en faisant un *minimum* cette formule :

$$\int ds\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + V''\,dv'' + \&c. + \frac{A}{2rr})$$

Et même si le fil n'etoit pas de la même grosseur par tout, mais que la masse de l'élément Mm fut $= S\,ds$ on n'auroit qu'à écrire $S\,ds$ au lieu de ds, dans cette formule ; pourvû que nonobstant cette variabilité de l'épaisseur du fil, l'élasticité absolue A ne changeât point : car d'ailleurs la quantité A deviendroit variable.

XL. Delà

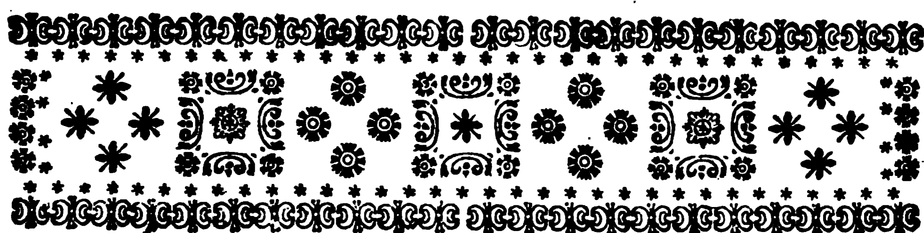
XL. De là il femble que la quantité d'action de l'élafticité fe détermine d'une façon tout à fait differente de celle, qui fert pour les vraies forces follicitantes, vu qu'il n'y a pas de reffemblance entre les formules $\int V\, dv$ & $\frac{A}{2rr}$. Cependant le coëfficienr $\frac{1}{2}$ me fait conjecturer, que cette quantité $\frac{A}{2rr}$ pourroit être originairement une formule intégrale, comme $\int \frac{A}{r}\, d\, \frac{1}{r}$, forme qui approche déjà fort de celle $\int V\, dv$. De plus on voit trés clairement que $\frac{A}{r}$ répond à V, car comme V fignifie la quantité de la force dont l'élément Mm eft follicité dans la direction MC, ainfi $\frac{A}{r}$ marque la quantité de la force de l'élafticité au point M. Mais il n'eft pas encore clair, comme le differentiél de $\frac{1}{r}$ puiffe répondre à dv: neantmoins l'analogie paroitra, dés qu'on fera ces réfléxions. Le differentiel dv pris negativement marque l'efpace par lequel le point M feroit transporté, s'il obeïffoit tant foit peu à la follicitation de la force V: voyons donc fi le differentiél $d\frac{1}{r}$ pourra fignifier le même effet par rapport à l'élafticité.

La force de l'élafticité $\frac{A}{r}$ tend à remettre le fil felon une ligne droite, ou à en diminuer la courbure. Soit donc O le centre de la courbure de l'élément $Mm = ds$, qui de la fituation droite $m\mu$ differe de l'angle $Mm\mu = MOm$; foit cet angle $MOm = d\varphi$, & puisque $MO = mO = r$, il fera $d\varphi = \frac{ds}{r}$; Or la courbure de l'élément $Mm = ds$ fe mefure par l'angle $MOm = d\varphi$, & abfolument fans avoir égard à la quantité de l'élément $Mm = ds$ cette mefure fera = Fig. 4.

 $d\varphi$

$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{1}{r}$. Donc pour peu que l'élafticité produife un effet, cette quantité $\frac{1}{r}$ en fera diminuée ; & partant il eft clair, que le differentiel de cette quantité $\frac{1}{r}$ pris négativement, repréfente le chemin, que la force de l'élafticité fait decrire à l'élément M*m*, dés qu'elle produit quelque effet : d'où l'on voit clairement, que ce que le differentiel dv marque par rapport à la force V, revient au même, que le differentiel de $\frac{1}{r}$ ou $d.\frac{1}{r}$ fignifie par rapport à la force de l'élafticité $\frac{A}{r}$: & comme V eft une fonction de v, de même la force de l'élafticité $\frac{A}{r}$ eft une fonction da la quantité $\frac{1}{r}$, dont le differentiel répréfente l'action inftantanée. De là on pourra tirer cette régle pour trouver la quantité d'action de la force de l'élafticité: Soit T la force de l'élafticité, que nous avons fuppofée $= \frac{A}{r}$, & que T foit une fonction quelconque de r ou de $\frac{1}{r}$: qu'on multiplie cette force T par le differentiel de $\frac{1}{r}$ ou par dt, fuppofant $t = \frac{1}{r}$ pour trouver l'intégrale $\int T\,dt$, qui étant multipliée par la maffe de l'élément M*m*, qui foit ds ou Sds, l'intégrale du produit $\int ds \int T\,dt$ donnera la quantité d'action de la force de l'élafticité. Où il eft evident, que cette régle eft précifément la même, que celle que nous avons trouvée pour les autres forces, dont le fil puiffe être follicité. Par conféquent la régle, que Mons. *de Maupertuis* a donnée dans les Mem. de l'Acad. de Paris eft beaucoup plus générale, qu'on pourroit penfer, puisqu'elle s'etend non feulement à toutes fortes de forces, qui font dirigées vers des centres fixes, mais auffi aux forces d'elafticité ; & il n'y a aucun doute, qu'elle ne foit encore plus générale.

REFLE-



RÉFLÉXIONS
SUR QUELQUES LOIX GÉNÉRALES DE LA NATURE QUI S'OBSERVENT DANS LES EFFETS DES FORCES QUELCONQUES,

PAR M. EULER.



I.

Ayant examiné dans le Mémoire précedent la figure que doit prendre un fil, soit parfaitement flexible, ou doüé de quelque roideur, étant sollicité par des forces quelconques dirigées vers autant de points fixes, qu'on voudra; j'ai recherché les formules, dont la valeur est la plus petite dans cette figure, de sorte que, si l'on connoissoit d'ailleurs ces formules, on pourroit par la methode des plus grands & des plus petits trouver la même figure d'un tel fil, sans avoir égard aux principes directs de la Mecanique, sur lesquels cette recherche est fondée. Comme il y a longtems, que les Philosophes soutiennent avec bien de la raison, que la nature dans toutes ses productions affecte constamment un certain *minimum*, ce que Monsieur *de Maupertuis* a mis tout à fait hors de doute dans quelques Mémoires, qu'il a donnés, tant sur l'état d'equilibre des corps, que sur celui de mouvement; nous nous trouvons en état d'assigner ce *minimum* pour les figures des fils sollicités par des forces quelconques. Mais puisque j'ai été

 con-

conduit à la connoissance de ce *minimum a posteriori*, il s'agit maintenant de découvrir les raisonnemens, qui nous puissent conduire *à priori* à la même connoissance: ou bien il faut rechercher les principes, desquels on pourroit conclure ce *minimum*, quand même on ne connoitroit pas encore la courbe, que le fil prend actuellement. Ces principes une fois découverts ne manqueront pas de répandre beaucoup de lumiére sur les loix que la nature observe dans un nombre infini de ses autres productions, pour la détermination desquelles la Mecanique même n'est pas encore portée à un degré suffisant de perfection; & il n'y a aucun doute, que la Metaphysique ne puisse tirer de cette découverte quantité d'éclaircissemens sur la maniere d'agir des forces en général.

II. Pour mieux réüssir dans cette recherche, il faut commencer par la même considération, dont Mr. de *Maupertuis* s'est servi pour établir sa loi générale du repos: car cette considération nous conduira à une idée plus precise & plus féconde de ce qu'on doit entendre par *la quantité d'action des forces*. Nous verrons que la chose nommée par ce terme est de la derniere importance dans toutes les actions des forces, soit que les corps, qui en sont sollicités demeurent en équilibre, ou qu'ils soient mis en mouvement, ce que je ferai voir par plusieurs preuves trés convainquantes. Aprés cela on conviendra aisément que cette quantité d'action des forces doit entrer dans toutes les formules, dont la valeur est la plus petite dans les effets, qui sont produits par ces forces. C'est une régle asses généralement reçuë, que la nature dans toutes ces productions n'emploie que la plus petite quantité d'action, qu'il soit possible; mais dans la pluspart des cas il a été jusqu'ici extrémement difficile de bien déterminer cette quantité d'action, pour l'epargne de laquelle la nature est si soigneuse. Mais dés que nous nous serons formé une idée asses distincte de la quantité d'action des forces, que Mr. *de Maupertuis* a découverte si heuresement dans le cas d'équilibre, qu'il a traité, la pluspart des autres difficultés, que la diversité des cas semble renfermer, disparoitront bientot, & on sera obligé de reconnoitre que cette idée est d'un usage universel, tant dans la Mecanique, que dans toute

toute la Physique. Quand même on ne gouteroit pas les raisonnemens, par lesquels je ferai l'application de cette idée à quantité d'effects produits par des forces quelconques, on sera obligé d'en reconnoitre la solidité par un grand nombre de cas, qu'on est en état de verifier par les principes ordinaires de la Mecanique.

III. C'est la figure, que doit prendre une masse fluide, dont toutes les particules sont sollicitées par des forces quelconques, qui a été le principal objet des recherches de Mr. *de Maupertuis*, pour découvrir la loi générale du repos dans les Mémoires de l'Academie Royale des Sciences de Paris de l'An. 1740. Je considererai donc de même une masse fluide dont toutes les particules sont attirées vers autant de centres fixes, qu'on voudra, par des forces, qui sont proportionelles à des fonctions quelconques des distances à ces centres, & je rechercherai premierement la figure, que doit prendre cette masse fluide, afin qu'elle soit en repos, ou en équilibre. De là je tacherai ensuite de découvrir ce qui sera dans cette figure un *maximum*, ou un *minimum*, pour être d'autant mieux en état de déterminer ce qu'il faut entendre sous le nom de la *quantité d'action des forces sollicitantes*, dont je ferai sentir aprés, par quelques reflexions, la derniere importance dans toutes les recherches où il s'agit des effets produits par des forces quelconques. D'abord il est évident que, pour qu'une telle masse fluide soit en équilibre, il faut que la moyenne direction des forces, dont chaque particule, qui se trouve à la surface, est sollicitée, soit perpendiculaire à la surface : car si la moyenne direction étoit oblique à la surface, la particule qui en étoit sollicitée, suivroit cette direction oblique selon la tangente, & partant la masse ne seroit point en équilibre. Donc, pour entrer dans cette recherche, je commencerai par déterminer en général la position de la ligne perpendiculaire à une surface quelconque.

PROBLEME I.

IV. *Une surface quelconque étant proposée sur laquelle se trouve le point Z, trouver la position de la ligne ZP, qui est perpendiculaire à cette surface au point Z.* Fig. 1.

SOLU-

SOLUTION.

Pour exprimer la nature de cette ſurface, je choiſis à volonté trois axes AB, AC, AD perpendiculaires entr'eux, dont les deux AB & AC ſoient pris dans le plan de la planche, & le troiſiéme AD y ſoit perpendiculaire. Du point quelconque de cette ſurface Z je tire ſur le plan BAC la perpendiculaire ZY, & du point Y à l'axe AB la perpendiculaire YX, de ſorte que la poſition du point Z ſoit déterminée par les trois coordonnées AX, XY & & YZ, que je nommerai $AX = x$, $XY = y$, & $YZ = z$. Maintenant la nature de la ſurface étant exprimée par une équation quelconque entre ces trois coordonnées x, y, z, je n'ai qu'à en conſidérer la differentielle, qui ſoit :

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = o$$

les lettres X, Y, Z marquant des fonctions quelconques des coordonnées x, y, z, qui peuvent réſulter de la differentiation de l'équation en termes finis. A preſent je conſidere premierement la figure EZ, qui réſulte, lorsqu'on coupe la ſurface propoſée par le plan IYZ parallele au plan BAD. La nature de cette ligne courbe EZ ſera donc exprimée par l'équation donnée, ſi l'on poſe $XY = y$ conſtante & partant ſon differentiel $dy = o$, de ſorte que pour cette courbe EZ nous aurons cette équation $X dx + Z dz = o$ entre les deux coordonnées $IY = x$ & $YZ = z$. Soit la ligne ZM perpendiculaire à cette ſection EZ, & on ſait que la ſounormale YM ſera $= \frac{z\,dz}{dx}$; or puisque $\frac{dz}{dx} = -\frac{X}{Z}$ nous aurons $YM = -\frac{Xz}{Z}$. Qu'on tire ſur le plan BAC, auquel la ſection IYZ eſt perpendiculaire, par le point M la ligne MP perpendiculaire à YM, & il eſt clair que toutes les lignes tirées du point Z à cette droite MP ſeront également perpendiculaires à la ſection EZ. Par conſéquent parmi ces lignes ſera compriſe celle ZP, qui eſt perpendiculaire, non ſeulement à la ſection EZ, mais auſſi à la ſurface propoſée même. Pour trouver cette perpendiculaire cherchée ZP, je coupe pareillement

ment la surface proposée par un plan XZ parallele au plan CAD, & supposant FZ la section, qui en résulte, sa nature sera exprimée par l'équation générale, en faisant $AX = x$ constante, & partant $dx = o$. Donc l'équation pour la section FZ sera $Ydy + Zdz = o$. entre ses coordonnées $XY = y$ & $YZ = z$. Qu'on tire de même à cette section FZ la perpendiculaire ZN, & on voit que la soûnormale sera $YN = \frac{zdz}{dy} = - \frac{Yz}{Z}$. Tirant donc par N à YN la perpendiculaire NP dans le plan BAC auquel la section FZ est perpendiculaire, toutes les lignes tirées du point Z à la ligne NP seront également perpendiculaires à la section FZ. Par conséquent si de l'intersection P des lignes MP & NP nous tirons la ligne PZ, elle sera perpendiculaire à l'une & à l'autre des sections EZ & FZ, & partant elle sera perpendiculaire à la surface proposée même EZF. Donc le point P dans le plan BAC, où la perpendiculaire cherchée ZP rencontre ce plan, se trouvera si on prend $YM = - \frac{Xz}{Z}$ & $YN = - \frac{Yz}{Z}$, & qu'on acheve le parallelogramme YMPN, dont le quatrieme angle P sera au point cherché. Or il est clair, qu'ayant pour la surface l'équation differentielle $Xdx + Ydy + Zdz = o$, on en tirera les valeurs des lignes YM & YN en termes finis. Ce qu'il faloit trouver.

PROBLEME II.

V. *Trouver la nature des forces, qui peuvent agir sur le point Z d'une surface proposée, afin que leur moyenne direction soit perpendiculaire à cette surface.*

SOLUTION.

Soit comme auparavant $Xdx + Ydy + Zdz = o$ l'équation differentielle, qui exprime la nature de la surface proposée entre les trois coordonnees $AX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$. Cela posé, de quelques forces que soit sollicité le point Z, elles peuvent toujours être rédui-

réduites à trois, selon des directions paralleles aux trois axes AB, AC, AD. Soit Q la force, qui agit selon la direction parallele à AB, R la force qui agit selon AC, & S celle qui agit selon AD, de sorte que ces forces tendent à augmenter les valeurs des variables x, y, z. Parce que la moyenne direction de ces forces doit être perpendiculaire à la surface, elle tombera dans la ligne ZP, dont nous venons de déterminer la position, ayant trouvé $YM = -\frac{Xz}{Z}$, & $YN = -\frac{Yz}{Z}$. Soit donc P la force, qui agissant dans la direction ZP soit équivalente aux trois forces proposées Q, R, S. Or cette force P étant décomposée selon les directions ZY & YP, donnera pour la direction ZY la force $= \frac{YZ}{ZP}P$, & pour la direction parallele à YP la force $= \frac{YP}{ZP}P$; celle-cy se decomposera encore selon les directions YM & YN, & pour la direction YM nous aurons la force $\frac{YM}{ZP}.P$, & pour l'autre direction YN la force $= \frac{YN}{ZP}.P$. Donc la force P sera resoluë en trois, suivant des directions paralleles aux trois axes AB, AC, AD, dont la premiere qui agit parallelement à AB sera $= \frac{YM}{ZP}.P$; la seconde, qui agit parallelement à AC sera $= \frac{YN}{ZP}.P$; & la troisieme, qui agit parallélement à AD sera $= -\frac{YZ}{ZP}.P$; puisque la direction ZY de la derniere est contraire à celle de l'axe AD, auquel nous la rapportons. Donc, afin que la force P perpendiculaire à la surface selon ZP soit équivalente aux forces proposées Q, R, S, il faut que celles-cy soient égales respectivement à ces trois, dans lesquelles nous venons

nons de résoudre la force P. Et partant nous en obtiendrons ces égalités

$$Q = \frac{YM}{ZP} P;\ R = \frac{YN}{ZP} P\ \&\ S = -\frac{YZ}{ZP} P.$$

Or ayant trouvé $YM = -\frac{Xz}{Z}$, & $YN = -\frac{Yz}{Z}$, à cause de $YZ = z$ nous aurons $YP = \frac{z}{Z}\sqrt{(XX + YY)}$ & $ZP = \frac{z}{Z}\sqrt{(XX + YY + ZZ)}$. Soit pour abréger $\sqrt{(XX + YY + ZZ)} = W$, & ayant $ZP = \frac{Wz}{Z}$ les trois égalités trouvées se changeront en celles-cy :

$$Q = -\frac{X}{W} P;\ R = -\frac{Y}{W} P\ \&\ S = -\frac{Z}{W} P$$

Par conséquent les trois forces Q, R, S, qui agissent suivant les directions des trois coordonnées x, y, z, seront entr'elles comme les quantités X, Y, Z, qui se trouvent dans l'équation differentielle $Xdx + Ydy + Zdz = o$ qui exprime la nature de la surface, C. Q. F. T.

PROBLEME III.

VI. *Trouver la figure, à laquelle sera reduite une masse fluide, dont toutes les particules seront sollicitées par des forces quelconques.*

SOLUTION.

Soit Z un point dans la surface de cette masse fluide dont nous cherchons la figure, ou ce qui revient au même, il s'agit de trouver une équation entre les trois coordonnées $AX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$, laquelle exprime la nature de la surface de la masse fluide proposée. Soit la differentielle de cette équation, que nous cherchons: $Xdx + Ydy + Zdz = o$. Maintenant de quelques forces que soit sollicité le point Z, elles se pourront reduire selon les directions de

de nos trois coordonnées. Soit donc Q la force qui agit ſelon la direction parallele à A X, R la force qui agit ſelon la direction parallele à X Y, & S celle, qui agit dans la direction Y Z. Cela poſé pour que la maſſe fluide ſoit en équilibre il faut que la moyenne direction de ces trois forces ſoit perpendiculaire à la ſurface. Pour cet effet nommant P la force équivalente aux trois forces données Q, R, & S, laquelle doit agir perpendiculairement à la ſurface, & pour abréger $W = \surd(XX + YY + ZZ)$, la ſolution du probleme précedent nous fournira les équations ſuivantes,

$$Q = -\frac{X}{W} . P; \; R = -\frac{Y}{W} . P; \; S = -\frac{Z}{W} . P$$

Deſquelles nous tirerons $X = -\frac{W}{P} . Q$; $Y = -\frac{W}{P} . R$ & $Z = -\frac{W}{P} . S$: ces valeurs étant ſubſtituées dans l'équation $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = o$, qui doit exprimer la nature de la ſurface que nous cherchons, nous en obtiendrons cette équation :

$$Q\,dx + R\,dy + S\,dz = o$$

D'où l'on voit, que connoiſſant les forces Q, R, S, qui agiſſent ſur chaque point de la maſſe fluide ſuivant les directions des trois coordonnées x, y, z, il n'y a rien de plus aiſé que d'aſſigner l'equation differentielle, qui exprimera la nature de la figure de la maſſe fluide, qu'il faloit chercher. Or la force équivalente aux trois forces Q, R, S, qui agiſſent enſemble ſur le point Z, ſera $P = \surd(QQ + RR + SS)$, laquelle aura ſa direction perpendiculaire à la ſurface : & pour trouver la ſituation de cette direction Z P, nous n'avons qu'à prendre $YM = -\frac{Qz}{S}$, & $YN = -\frac{Rz}{S}$, pour en remplir le parallelogramme rectangle Y M P N, dont l'angle P donnera le lieu du point P, où la perpendiculaire Z P à la ſurface rencontre le plan B A C. Du reſte il faut remarquer que, pour que la figure ſoit poſſible, les forces Q, R, S, doivent être telles fonctions de x, y, z, afin que l'équation

tion $Q\,dx + R\,dy + S\,dz = o$ puiſſe être reduite à des quantités finies.

VII. On ſait qu'une équation differentielle, qui ne renferme que deux variables, eſt toujours poſſible, ou qu'il y a toujours une équation en termes finis entre les mêmes quantités variables, qui étant differentiée produiſe l'équation differentielle propoſée, quoique même fort ſouvent on ne ſoit pas en état de trouver cette équation integrale. Mais il n'en eſt pas de même des équations differentielles qui renferment trois quantités variables, comme x, y & z : car il y a quantité de cas où il eſt abſolument impoſſible, qu'une telle équation puiſſe réſulter par la differentiation d'une équation exprimée en termes finis. Un exemple d'une telle équation impoſſible eſt $x\,dx + y\,dy + x\,dz = o$: car puiſque les deux premiers membres $x\,dx + y\,dy$ ſont integrables d'eux mêmes, il n'eſt pas poſſible de trouver un facteur, par laquel l'equation étant multipliée devienne integrable. On a même déjà decouvert les conditions, ſous leſquelles une telle équation devient poſſible ou impoſſible : & Mons. *Clairaut* & *d'Alembert* ont démontré qu'une équation de cette forme $Q\,dx + R\,dy + S\,dz = o$ n'eſt poſſible, que dans les cas où il y aura :

$$Q\left(\frac{dR}{dz} - \frac{dS}{dy}\right) + R\left(\frac{dS}{dx} - \frac{dQ}{dz}\right) + S\left(\frac{dQ}{dy} - \frac{dR}{dx}\right) = o.$$

Dans cette équation la formule $\frac{dR}{dz}$ marque le differentiel de la fonction R, en ne ſuppoſant que z variable, dont le differentiel dz eſt détruit par le denominateur dz. De même la valeur de $\frac{dS}{dy}$ ſe trouvera en ſuppoſant la ſeule y variable dans la differentiation de S : & pour trouver la valeur de $\frac{dS}{dx}$, dans la differentiation de S il ne faut ſuppoſer que x variable, en ſorte que ces expreſſions $\frac{dR}{dz}$, $\frac{dS}{dy}$, $\frac{dS}{dx}$,

$\frac{dQ}{dz}$ &c. ne renfermeront que des quantités finies, puisque les denominateurs détruisent les differentiels des numerateurs. Donc toutes les fois que la proprieté contenüe dans cette équation n'aura pas lieu entre les fonctions Q, R, S, l'équation $Q\,dx + R\,dy + S\,dz = o$ sera impossible ; & dans ces cas la masse fluide ne sauroit jamais parvenir à l'etat de l'équilibre, comme a fort bien remarqué Mons. *Clairaut*, dans son Traité sur la figure de la terre.

VIII. Le cas le plus évident, auquel l'équation $Q\,dx + R\,dy + S\,dz = o$ devient possible, est si Q est une fonction de x, R une fonction de y, & S une fonction de z : car alors chaque membre de l'equation sera intégrable à part. Donc si chaque particule de la masse fluide est sollicitée de trois forces Q, R, & S, suivant les directions des trois axes AB, AC & AD, ou des trois coordonnées x, y & z; & que la force Q, qui agit dans la direction de x, soit exprimée par une fonction quelconque de x, la force R qui agit dans la direction de y par une fonction de y, & la force S par une fonction de z, alors l'équation differentielle $Q\,dx + R\,dy + S\,dz = o$ étant intégrable, la figure de la masse fluide sera exprimée par cette équation intégrale,

$$\int Q\,dx + \int R\,dy + \int S\,dz = A$$

où A marque une quantité constante, que la quantité du fluide déterminera. Dans ce cas donc la masse fluide sera réduite à l'état de l'equilibre, & à chaque point de sa surface la valeur de cette formule $\int Q\,dx + \int R\,dy + \int S\,dz$ sera la même. Or si nous envisageons en général la nature de l'équilibre, nous appercevrons aisément, qu'elle exige de toutes parts une égalité dans l'action des forces, quoique nous ne sachions d'abord comme il faut estimer cette action des forces. Mais voyant dans le cas proposé, que c'est cette quantité $\int Q\,dx + \int R\,dy + \int S\,dz$ qui est par tout la même, nous en conclurrons surement, que cette même formule répréſente la quantité d'action des forces, qui dans l'équilibre doit partout être la même. Donc la quantité d'action des forces Q, R, S, qui agissent sur le point Z de la maniere que je viens de supposer, sera $= \int Q\,dx + \int R\,dy + \int S\,dz$:

dz : formule qui eſt parfaitement conforme aux principes de Mons. *de Maupertuis*, & dont je ferai voir plus clairement la force & l'importance dans les réfléxions ſuivantes.

PROBLEME IV.

IX. *Une maſſe fluide étant attirée vers pluſieurs centres fixes* C, C', C'' *par des forces proportionelles à des fonctions quelconques des diſtances, trouver la figure, à laquelle cette maſſe fluide ſera réduite.* Fig. 2.

SOLUTION.

Soit Z un point quelconque dans la ſurface de la maſſe fluide propoſée, dont les diſtances aux centres fixes C, C', C'' ſoient nommées $CZ = v$, $C'Z = v'$, $C''Z = v''$, & les forces dont ce point Z eſt attiré vers ces centres ſoient des fonctions quelconques de ces diſtances V, V', V'', la force V qui tire dans la direction ZC, étant une fonction quelconque de v, la force V' dans la direction ZC' une fonction de v', & la force V'' dans la direction ZC'' une fonction de v''. Cela poſé, qu'on choiſiſſe comme auparavant trois axes perpendiculaires entr'eux, auxquels on tire du point Z les droites paralleles ZQ, ZR, ZY, ſuivant lesquelles on décompoſe les forces V, V', V'' qui agiſſent ſur le point Z. Pour cet effet on n'a qu'à concevoir des plans paralleles au plan QZR, qui paſſent par les points C, C', C'', lesquels ſeront traverſés perpendiculairement par la droite ZY aux points Y, Y', Y'', & dans ces plans on tire les droites CX, C'X' C''X'' paralleles à ZQ, & à celles-cy les perpendiculaires YX, Y', X', Y''X'', qui ſeront paralleles à ZR. Maintenant on aura pour chaque centre C, C', C'' trois coordonnées qu'on nommera : pour le centre C; $CX = x$, $XY = y$ & $YZ = z$: pour le centre C'; $C'X' = x'$, $X'Y' = y'$ $Y'Z = z'$ & pour le centre C''; $C''X'' = x''$; $X''Y'' = y''$ & $Y''Z = z''$. De ces coordonnées nous obtiendrons d'abord ces équations $vv = xx + yy + zz$; $v'v' = x'x' + y'y' + z'z'$ & $v''v'' = x''x'' + y''y'' + z''z''$. Et puisque les variables x, x' x'' ne different entr'elles que des quantités conſtantes, leurs differentiels ſeront égaux entr'eux d'où nous aurons $dx = dx' = dx''$, & par la même raiſon :

dy

$dy = dy' = dy''$; & $dz = dz' = dz''$. Maintenant la force ZC = V étant décompoſée ſuivant les directions Z Q, ZR & Z Y, donnera ces trois forces

$$ZQ = \frac{Vx}{v}, \quad ZR = \frac{Vy}{v} \ \& \ ZY = \frac{Vz}{v}$$

De la force ZC′ réſulteront ces trois forces

$$ZQ = \frac{V'x'}{v'}; \quad ZR = \frac{V'y'}{v'}, \ \& \ ZY = \frac{V'z'}{v'}$$

& de la force Z C″ ces trois

$$ZQ = \frac{V''x''}{v''}; \quad ZR = \frac{V''y''}{v''} \ \& \ ZY = \frac{V''z''}{v''}$$

Dont de l'action commune de ces trois forces le point Z ſera ſollicité

ſuivant la direction	par la force
Z Q	$\frac{Vx}{v} + \frac{V'x'}{v'} + \frac{V''x''}{v''}$
Z R	$\frac{Vy}{v} + \frac{V'y'}{v'} + \frac{V''y''}{v''}$
Z Y	$\frac{Vz}{v} + \frac{V'z'}{v'} + \frac{V''z''}{v''}$

Ces forces agiſſant ſelon des directions contraires à celles que nous avons données aux forces Q, R, S dans le probleme precedent, ſi nous ferons l'application, nous aurons :

$$Q = -\frac{Vx}{v} - \frac{V'x'}{v'} - \frac{V''x''}{v''}$$

$$R = -\frac{Vy}{v} - \frac{V'y'}{v'} - \frac{V''y''}{v''}$$

$$S = -\frac{Vz}{v} - \frac{V'z'}{v'} - \frac{V''z''}{v''}$$

Or

Or la nature de la surface de cette masse fluide sera exprimée par cette équation $Q\,dx + R\,dy + S\,dz = o$. Mais substituant les valeurs trouvées pour Q, R, S, nous obtiendrons en changeant les signes cette équation.

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{V\,x\,dx}{v} + \frac{V'x'\,dx'}{v'} + \frac{V''x''\,dx''}{v''} \\ + \frac{V\,y\,dy}{v} + \frac{V'y'\,dy'}{v'} + \frac{V''\,y''\,dy''}{v''} \\ + \frac{V\,z\,dz}{v} + \frac{V'z'\,dz'}{v'} + \frac{V''z''\,dz''}{v''} \end{array}\right\} = o$$

Or les premieres formules, qui expriment les valeurs des distances v, v' v'' fournissent

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = v\,dv$$
$$x'\,dx' + y'\,dy' + z'\,dz' = v'\,dv'$$
$$x''dx'' + y''dy'' + z''dz'' = v''\,dv''$$

Par conséquent la figure de la masse fluide sera exprimée par cette équation $V\,dv + V'dv' + V''\,dv'' = o$ dont chaque terme est integrable de lui même, & partant nous aurons pour la figure cherchée cette équation integrale : $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' = \text{Const.}$ P. Q. F. T.

X. La même équation se peut aussi trouver, sans qu'on ait égard à la position des trois axes, laquelle est arbitraire, & ne se trouve plus dans l'équation finale. Nous n'avons qu'à considerer un élément infiniment petit Z z, conçu d'une maniere quelconque depuis le point Z sur la surface de la masse fluide, & il est d'abord clair, que pour que le point Z puisse être en équilibre ou demeurer en repos, il faut que les forces, qui sollicitent le point Z selon la direction Z z évanouïssent, àpres avoir decomposé les forces V, V', V'', qui y agissent, selon cette direction Z z, & d'autres qui y sont perpendiculaires. Car si les forces suivant Z z ne se detruisoient pas mutuellement

ment, rien n'empêcheroit, que le point Z ne se mût actuellement suivant cette diréction & partant la masse fluide ne seroit pas en équilibre. On nomme ces forces *tangentielles*, qui résultent de cette décomposition selon la direction de l'élément Zz; ce seront donc ces forces tangentielles, qui doivent se detruire mutuellement, ou dont la somme doit être $= o$. Pour trouver ces forces tangentielles, je mene du point z sur les distances CZ, $C'Z$, $C''Z$ les perpendiculaires zt, zt', zt'', & nommant l'élément $Zz = ds$, nous aurons $Zt = -dv$; $Zt' = -dv'$ & $Zt'' = -dv''$. La ressemblance des triangles élémentaires Zzt, $Zz't'$, $Zz''t''$ aux triangles, qui se forment en baissant des perpendiculaires des points C, C', C'' sur la tangente ou l'élément Zz prolongé, donnera les forces tangentielles, qui résultent de chacune des forces V, V', V'' & de la force V on obtiendra la force tangentielle $= -\frac{V\,dv}{ds}$, de la force V' proviendra la force tangentielle $-\frac{V'dv'}{ds}$ & de la force V'' celle-cy $-\frac{V''\,dv''}{ds}$. Donc puis que la somme de ces forces tangentielles doit être égale à o, nous aurons pour la figure de la masse fluide cette équation $-\frac{V\,dv}{ds} - \frac{V'\,dv'}{ds} - \frac{V''\,dv''}{ds} = o$, ou bien celle-cy $V\,dv + V'\,dv' + V''\,dv'' = o$, dont l'integrale sera:

$$\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' = C.$$

qui est la même équation, à laquelle nous a conduit la solution précedente.

XI. La masse fluide donc étant sollicitée par ces forces V, V', V'', que nous venons de considerer, parviendra dans un état d'équilibre, & la figure qu'elle prendra alors, aura cette proprieté que pour chaque point Z de sa surface la valeur de cette expréssion $\int V.dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$, sera partout la même. Donc puisque l'état d'équilibre exige de toutes parts une égalité d'action, il est d'abord clair

que

que cette même formule nous exprimera la quantité d'action, qui par son égalité se contrebalance de tous cotés ; & on ne sauroit douter que cette formule, $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ ne fût la vraie mesure de la quantité d'action des forces, qui agissent sur la masse fluide, quand même on n'auroit point d'autres raisons, par lesquelles on feroit en état de determiner cette mesure. Or Mr. *de Maupertuis*, dans son excellente piece sur les loix du repos, a expliqué les principes, desquels il a tiré precisément la même mesure de la quantité d'action des forces : & ces principes lui ont fourni pour ce cas d'équilibre d'une masse fluide la même formule $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$, sans qu' il ait été obligé d'avoir recours aux principes ordinaires de la Mecanique. De là on tirera la régle suivante pour trouver la quantité d'action des forces, qui agissent sur un point quelconque Z: *Qu'on multiplie chaque force* V *par le differentiel de la ligne* $ZC = v$, *suivant la direction de laquelle cette force agit, du produit* $V\,dv$ *qu'on prenne l'integrale, & la somme de toutes ces integrales* $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ *donnera la quantité d'action de toutes ces forces sur le point* Z. Cette régle, qui coule immediatement des principes de Mr. *de Maupertuis*, est donc parfaitement d'accord avec la solution, que je viens de déduire des principes ordinaires de la Mecanique.

XII. Mr. *de Maupertuis* dans ses réflexions sur cette matiére est encore allé plus loin, & a soutenu que non seulement la quantité d'action des forces, qui agissent sur toutes les particules de la surface d'une masse fluide, étoit partout la meme ; mais que sa valeur étoit encore la plus petite, qu'il soit possible. Cette proprieté si convenable aux loix générales de la nature, qui affecte constamment de produire ses effets à moindres fraix, est aussi une suite fort naturelle de la solution, que je viens de trouver. Car puisque la valeur de cette expression $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ est partout la même, son differentiel sera égal à zero, ou $V\,dv + V'\,dv' + V''\,dv'' = 0$. Or on sait que, pour que la valeur d'une quantité variable soit la plus grande, ou plus petite, il faut, que son differentiel soit $= 0$. Donc reciproquement, puisque dans la figure de la masse fluide le differentiel $V\,dv + V'\,dv' + V''\,dv''$ est $= 0$, on pourra dire, que son integral

gral

gral $\int V\,dv + \int V' dv_{\prime} + \int V'' dv''$ y est un *minimum*. Il est bien vrai que cette conversion n'est pas toujours juste; car, par exemple, dans un cercle dont la nature est exprimée par cette équation $xx + yy = aa$, quoique le differentiel de la quantité $xx + yy$ soit égal à zero, on ne sauroit dire que la quantité $xx + yy$ même y étoit un *maximum*, ou *minimum*. Mais outre que le principe général de la nature exige que la quantité d'action, que cette formule $\int V\,dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ exprime, soit un *minimum*, de sorte que l'exception tirée de l'exemple du cercle, n'y puisse pas avoir lieu, je m'en vai prouver cette conclusion par un cas tout particulier, dont l'evidence sautera d'abord aux yeux.

XIII. Supposons que la masse fluide vienne à être diminuée à l'infini, desorte qu'elle soit réduite à un seul point Z: on demandera donc où ce point Z doit être placé, afin qu'étant attiré vers les centres de forces C, C', C'', il soit en équilibre: & on s'appercevra dabord que ce lieu d'équilibre du point Z sera là, où la quantité d'action de forces, ou la valeur de l'expression $\int V\,dv + \int V' dv' + \int V'' dv''$ sera la plus petite. Quand j'aurai prouvé cela, on ne fera aucune difficulté de reconnoitre, que pour le cas d'une masse fluide d'une étendue finie, le même raisonnement n'ait lieu: & que puisque le differentiel de cette même formule est également zero, la valeur de cette formule n'y soit un *minimum*. Car si cette conclusion n'étoit pas juste dans le cas d'une masse fluide, elle ne le seroit pas non plus dans le cas, où la masse fluide est reduite à un seul point. Or le cas de l'état déquilibre d'un point, qui est sollicité par des forces quelconques, que je m'en vai considerer, est celui d'où dépendent les premiers principes de la Statique, savoir la composition & la décomposition des forces, dont la verité est par conséquent d'autant moins assujetie à des doutes: quoique les demonstrations qu'on en donne ordinairement ne soient pas assés rigoureuses; puisqu'on y fait entrer la consideration du mouvement, qui paroit tout à fait étrangére dans ce cas, où il ne s'agit que de l'état du repos. Feu Monsieur *Nicolas Bernoulli* a bien fait sentir ce defaut général dans le I. Tome des Comment. de l'Acad. de Petersbourg, où il a donné une fort belle

belle démonstration de ce principe de la Statique, qui est aussi ingenieuse, que purement geometrique, & fondée sur des axiomes incontestables.

XIV. Cependant je me flatte, qu'on trouvera la démonstration suivante, que je donnerai de ce même principe, également convaincante, quoiqu'elle soit fondée sur quelque principe tiré de la Metaphysique. Soit un point quelconque Z, qui étant sollicité par trois forces V, V' V'' selon les directions ZC, Z C' ZC'', se trouve actuellement en équilibre : & on soutient qu' alors ces trois forces seront entr'elles comme les sinus des angles opposés C' Z C'' ; C Z C'', C Z C'. Pour démontrer cette verité, de laquelle depend toute la Statique, au lieu des forces, je concevrai des fils élastiques égaux entr'eux, qui étant attachés aux lignes A B, A' B', A'' B'', & les tirant vers les parois immobiles E F, E' F', E'' F'' agissent sur le point Z par le moyen des verges Z C, Z C', Z C'' de la même maniere, que les forces proposées V, V', V''. Soit la force de chaque fil élastique, dont il tache de se contracter, = 1, & le nombre des fils, qui sont attachés à la ligne A B pour l'approcher au parois E F, soit = V, afinque toute la force unie de ces fils élastiques devienne = V. & que le point Z par ce moyen soit sollicité par la même force V dans la direction Z C. De même, soit le nombre des fils semblables attachés à la ligne A' B' = V', & le nombre des fils attachés à la ligne A'' B'' = V'' afinque le point Z soit sollicité suivant les directions Z C' & Z C'' par les forces V' & V''. Fig. 3.

XV. Cela posé il est clair que ces forces n'agissent qu' entant que les fils élastiques tachent de se raccourcir, & le point Z ne sauroit être en repos, que lorsqu'il sera impossible, que la contraction de tous ces fils ensemble se puisse augmenter davantage. On m'accordera donc sans aucune difficulté, que le point Z sera alors en equilibre, lorsque les fils se seront raccourcis autant qu'il sera possible, ou lorsque la somme de tous les fils pris ensemble sera la plus petite : car si le point Z pouvoit être trainé dans un autre endroit z, où le raccourcissement des fils, considerés tous ensemble, seroit encore plus grand, il n'y a aucun doute, que les forces ne le transportassent dans

 cet

cet endroit là, avant que l'état d'équilibre arrive. Ce principe est si evident, que pour peu qu'on y réflechisse on sera convaincu de sa verité : puisque ces fils se contracteront effectivement, tandis qu'une plus grande contraction sera possible, & ils ne cesseront d'agir, qu'il ne s'oppose des obstacles insurmontables, qui rendront impossible une plus grande contraction. Donc, si nous nommons la longueur des fils élastiques $AG = x$, celle des fils $A'G' = x'$ & $A''G'' = x''$, la longueur de tous les fils pris ensemble sera $= Vx + V'x' + V''x''$, & celle-cy sera par consequent la plus petite, lorsque le point Z est réduit dans l'état d'équilibre.

XVI. Donc, si le point Z sera transporté infiniment peu de l'endroit où il est en équilibre, la valeur de la formule $Vx + V'x' + V''x''$ demeurera encore la même, ou son differentiel $V dx + V'dx' + V'' dx''$ sera égal à zero ; car je regarderai ici les forces $V, V' V''$, comme constantes, de sorte qu'elles n'augmentent ni ne diminuent, pendant que les fils élastiques s'allongent, ou se raccourcissent : je fai cette hypothese, afin que le cas soit plus evident & moins embarassé, puisqu'il ne sera pas difficile ensuite de juger des cas, où les forces V, V' V'' sont elles-mêmes variables. Qu'on conçoive donc le point Z transporté en z par l'espace infiniment petit Zz, & comme un tel changement se peut faire d'une infinité de manieres, j'en choisirai celui où le point z est également éloigné de AB, que le point Z, desorte que par ce changement les fils AG, BH ne souffrent aucune alteration. Mais comme le point Z par ce mouvement Zz s'est approché plus de $E'F'$, & qu'il s'est éloigné plus de $E''F''$, les fils $A'G' B'H'$, se feront raccourcis, & les fils $A''G''$, $B''H''$ allongés : & partant la ligne $A'B'$, à laquelle sont attachés les fils, sera parvenue en $a'b'$, & la ligne $A''B''$ en $a''b''$: donc le raccourcissement de ceux-là sera $= A'a'$, & l'allongement de ceux-cy $= A''a''$. Or en vertu de la proprieté des plus petits, l'allongement total d'un coté $V''. A''a''$ doit être égal au raccourcissement de l'autre coté $V'. A'a'$. Tirons les lignes zc', zc'' égales & paralleles aux lignes ZC' & ZC'', & y ayant mené les perpendiculaires Zq, zp, le raccourcissement $A'a'$ sera $= Zp$, & l'allongement $A''a'' = zq$, donc il y aura $V'. Zp$ $= V''$:

$= V''$: $z\,q$, ce qui donnera cette proportion $V' : V'' = z\,q : Z\,p$. Or prenant $Z\,z$ pour le finus total, $z\,q$ fera le finus de l'angle $z\,Z\,q$, ou bien de $C\,Z\,C''$ à caufe des angles droits $C\,Z\,z$ & $C''\,Z\,q$; de même $Z\,p$ fera le cofinus de $z\,Z\,p$ & partant le finus de $C\,Z\,C'$, d'où il s'enfuit que les forces V' & V'' feront entr'elles comme les finus des angles $C\,Z\,C''$ & $C\,Z\,C'$, & de là on tirera cette proportion connuë :

force $Z\,C$: force $Z\,C'$: force $Z\,C'' =$ fin $C'\,Z\,C''$: fin $C\,Z\,C''$, fin $C\,Z\,C'$.

XVII. De cette nouvelle démonftration du principe général de la Statique, en vertu duquel trois forces appliquées à un point font en équilibre, lorsque ces forces font entr'elles, comme les finus des angles oppofés, on fera convaincu, que non feulement la formule differentielle $V\,d\,x + V'\,d\,x' + V''\,d\,x''$ doit être $= o$, mais auffi que la valeur de la formule finie $V\,x + V'\,x' + V''\,x''$ y eft la plus petite. J'ai fuppofé ici les forces V, V', V'' conftantes, ou qu'elles demeurent les mêmes, quelque changement que fubiffent les fils élaftiques que j'ai fubftitués à leurs places : mais la formule differentielle demeurera la même, quoique les forces foient variables : on n'a pour cet effet qu'à nommer les diftances $Z\,C = v$, $Z\,C' = v'$ $Z\,C'' = v''$, & on aura $d\,x = -d\,v$, $d\,x' = -d\,v'$, $d\,x'' = -d\,v''$. De plus, fi les forces V, V', V'' font des fonctions quelconques de ces diftances v, v', v'', l'état d'équilibre du point Z donnera la même équation differentielle $V\,d\,v + V'\,d\,v' + V''\,d\,v'' = o$, qui a été trouvée dans la folution du probleme, & à préfent il n'y a aucun doute que fon integral $\int V\,d\,v + \int V'\,d\,v' + \int V''\,d\,v''$ ne foit auffi un *minimum*. Or fi cette formule eft un *minimum* dans le cas, où les forces n'agiffent que fur le feul point Z, elle fera pareillement un *minimum* dans le cas d'une maffe fluide quelconque, qui eft follicitée par les mêmes forces. Par conféquent, nous avons les plus fortes raifons de foutenir, que la quantité d'action des forces V, V', V' fur un point quelconque Z, doit être exprimée par cette formule $\int V\,d\,v + \int V'\,d\,v' + \int V''\,d\,v''$ puis que cette formule fe trouve, foit qu'on confidere le point Z tout feul, ou qu'il appartienne à une maffe fluide quelconque. Voilà donc un appuy inébranlable, fur lequel eft fondée la

régle

regle donnée cy-dessus pour déterminer la quantité d'action des forces quelconques sur un point donné.

XVIII. Les réfléxions suivantes mettront encore davantage dans tout son jour cette idée de la quantité d'action des forces, & on en entendra plus clairement la raison, pourquoi la quantité d'action des forces V, V', V'' sur le point Z doit être exprimée précisément par la formule $\int V\,du + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$. Dans la recherche précedente, où j'ai substitué des fils élastiques égaux entr'eux au lieu des forces V, V', V'', l'état ou l'action de chaque force appliquée au point Z' a été representée par la somme des longueurs de tous les fils élastiques, qui tiennent lieu des forces: car nous avons vu, si la longueur des fils élastiques A G substitués à la place de la force V est nommée $= x$, & que V marque le nombre de ces fils, puisque la force de chacun a été posée $= 1$; alors la somme totale de tous ces fils étoit $= Vx$: ce sera donc cette quantité Vx, qui répresente l'action de cette force V sur le point Z, puisque Vx exprime l'état actuel de contraction des fils élastiques, de laquelle dépend l'action de la force V. Or posant toute la distance du point Z aux parois immobiles E F $= v$, & la distance constante Z C $= a$, nous aurons $x = v - a$, & l'action de la force V sera $= V(v - a)$ pourvu que que la force V soit constante, ou que sa quantité ne dépende point de la distance v. Or en cas que la force V dépende de la distance v, ou ce qui revient au même de la longueur des fils élastiques x, alors le nombre des fils V seroit variable, & leur longueur totale ne seroit plus Vx ou $V(v - a)$, mais on s'appercevra aisement que pour avoir cette longueur totale, il faudra prendre l'integrale de $V\,dx$ ou de $V\,dv$, y ayant égard à la variabilité de V. Ce sera donc alors $\int V\,dv$, qui exprime la longueur totale des fils élastiques substitués au lieu de la force V, & partant il est évident que cette même formule $\int V\,dv$, exprimera aussi la quantité d'action de la force V sur le point Z; & on comprendra de même que la quantité d'action de plusieurs forces V, V', V'' sera $= \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$.

XIX.

XIX. Mais il y a plus : la formule $\int V\, dv + \int V'\, dv' + \int V''\, dv''$ est non seulement d'un si grand usage dans l'état de repos, c'est aussi d'elle que dépend principalement la determination du mouvement. Car supposons qu'un corps sollicité vers les centres C, C', C'' par des forces V, V' V'' ait parcouru déjà l'arc A Z d'une courbe quelconque, ayant commencé son mouvement du repos en A : & soit u la vitesse, que ce corps aura acquise au point Z : & $u + du$ celle qu'il aura au point z, aprés avoir parcouru l'élément d'espace, $Zz = ds$. Soient les distances du corps en Z aux centres C, C', C'' nommées $CZ = v$, $C'Z = v'$, $C''Z = v''$, & V, V', V'' les forces dont le corps est attiré à ces centres. Qu'on tire de z sur les distances CZ, C'Z, C''Z les perpendiculaires zt, zt', zt'' & on aura $Zt = dv$, $Zt' = -dv'$, $Zt'' = -dv''$, d'où nous tirerons les forces tangentielles $-\frac{V\, dv}{ds}$, $-\frac{V'\, dv'}{ds}$; $-\frac{V''\, dv''}{ds}$, & partant le mouvement du corps, pendant qu'il parcourt l'élément $Zz = ds$ sera acceleré par la force $-\frac{V\, dv - V'\, dv' - V''\, dv''}{ds}$, qui étant multipliée par l'espace ds sera égale au produit de la vitesse u par son differentiel du : desorte que nous aurons cette équation $u\, du = -V\, dv - V'\, dv' - V''\, dv''$, dont l'integrale sera $\frac{1}{2} uu = C - \int V\, dv - \int V'\, dv' - \int V''\, dv''$, où la constante C doit être prise, en sorte qu'au point A la vitesse devienne $= 0$. Donc le demi-quarré de la vitesse au point Z, ou ce qui revient au même, la hauteur duë à la vitesse sera exprimée par la formule $C - \int V\, dv - \int V'\, dv' - \int V''\, dv''$, qui consiste de deux membres, dont le premier C dépend uniquement du point A où le mouvement a commencé ; mais l'autre membre $-\int V\, dv - \int V'\, dv' - \int V''\, dv''$ dépend uniquement du point Z où le corps est parvenu. Par conséquent la formule $\int V\, dv + \int V'\, dv' + \int V''\, dv''$, qui dans l'etat de repos marque la quantité d'action des forces sur le point Z, exprime aussi dans l'etat de mouvement la partie du quarré de la vitesse, laquelle dépend du point Z, de sorte que cette formule

Fig. 4.

mulé eſt de la derniere importance, auſſi bien dans l'etat de repos, que dans celui de mouvement.

XX. Ayant donc établi la veritable idée de la quantité d'action des forces quelconques ſur un point donné, ſoit qu'il ſe trouve en repos, ou en mouvement, je ferai voir plus clairement le grand uſage de cette idée, en conſiderant pluſieurs centres fixes C, C', C'' &c. qui attirent à ſoi avec des forces V, V', V'' &c, proportionelles à des fonctions quelconques des diſtances v, v' v'', &c. de ſorte que la quantité d'action de ces forces ſur un point Z, dont les diſtances à ces centres ſont v, v', v'' &c. eſt $= \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ &c. Et d'abord pour trouver le lieu, où il faut placer un corps conſideré comme un point, afin qu'il demeure en repos, ou en équilibre, entre ces centres de forces, je viens de montrer que ce point cherché Z ſera là, où la valeur de cette formule $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$, ou la quantité d'action, eſt la plus petite. Par le moyen de cette proprieté on trouvera aiſement le lieu de ce point Z, en transportant ce point Z par un eſpace infiniment petit Z z, & ſuppoſant le differentiel $V\,dv + V'\,dv' + V''\,dv''$ + &c. égal à zero : comme j'ai fait voir dans le cas, où le point Z étoit ſollicité de trois forces. C'eſt de ce cas, que dépend la compoſition & la réſolution des forces, aquelle étant la baſe de toute la Statique, on voit que ce ſeul principe de la quantité d'action fournit le fondement de cette ſcience.

XXI. En ſecond lieu, ſi on conſidere une maſſe fluide dont toutes les particules ſont attirées à ces centres de forces, C, C', C'' &c. on trouvera encore la figure, que cette maſſe fluide prendra, par le ſeul moyen de la quantité d'action : car il faut, comme j'ai fait voir que la quantité d'action des forces ſoit la même partout, ſur chaque point de la ſurface de la maſſe fluide : ou la nature de cette ſurface ſera exprimée par cette équation :

$$\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c. = \text{Conſt.}$$

Ou bien cette maſſe fluide ne ſauroit être en repos, que dans un tel endroit & avec une telle figure, afin que la quantité d'action totale ſoit la plus petite qu'il eſt poſſible : *c. d. d.* pour que la maſſe fluide

ſoit

soit en équilibre, il faut que la valeur de cette formule $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' +$ &c. soit un *minimum*. C'est de ce principe que dépend toute l'hydrostatique, ou la theorie de l'équilibre des liqueurs. Car si nous ne considerons qu'une seule force centrale, pour avoir le cas de la pesanteur naturelle, nous aurons pour l'état d'équilibre d'une masse fluide l'équation $\int V\,dv = C$, & puisque V est une fonction de v, la distance v sera constante ; donc tous les points de la surface fluide doivent être également éloignées du centre de la terre, ou la surface d'un fluide sera horizontale.

XXII. Ce ne sera pas donc seulement la quantité d'action des forces sur un seul point Z, qui est la plus petite, mais on reconnoîtra aisement que dans une masse fluide, qui est en équilibre, la somme totale de toutes les quantités d'action des forces sur tous les élémens de la masse fluide doit être un *minimum*. Ainsi si l'on nomme dS une particule quelconque de la masse fluide, & que la quantité d'action des forces V, V', V'' &c. sur cette particule, soit $= \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' +$ &c, entant qu'elle n'est considerée que comme un point, il est clair que la quantité d'action sur l'élément dS sera $= dS\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' +$ &c.), puisque dS est déjà regardé comme un assemblage de plusieurs points, sur chacun desquels la quantité d'action des forces est $= \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' +$ &c. de sorte que cette quantité doit être multipliée par le nombre des points de l'élément dS, *c. à. d.* par l'élément dS même, pour avoir la quantité d'action des forces sur cet élément dS. Par conséquent la quantité d'action des forces sur toute la masse fluide sera $= \int dS\,(\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' +$ &c.). Ce sera donc cette expression integrale, dont la valeur doit être la plus petite ; puisqu'elle comprend la somme totale de toutes les quantités d'action des forces sur toutes les particules de la masse fluide. De là il est aisé de tirer cette régle générale pour trouver l'état d'équilibre d'un corps quelconque sollicité par des forces quelconques ; *Qu'on multiplie chaque élément du corps par la quantité d'action des forces, qui y agissent, & l'intégrale de ce produit, qui sera la quantité d'action totale sur le corps entier, doit*

 être

être un minimum. Quiconque aura compris la réalité de l'idée de la quantité d'action des forces sur un point, que je viens d'établir par les plus fortes raisons, accordera sans difficulté, que dans tous les cas d'équilibre la somme de toutes ces quantités d'action doit être la plus petite.

XXIII. Si le corps entier, dont nous cherchons l'état d'equilibre, est infiniment petit, de sorte que dS exprime tout ce corps, alors la quantité d'action totale sera $= dS\ (\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.)$ laquelle sera un *minimum*, si $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.$ aura la plus petite valeur, puisque dS est constant : & c'est le cas que j'ai déjà dévelopé cy - dessus. Mais si le corps proposé est une masse fluide, dont dS est un élément, il n'est plus si aisé, que la figure où $\int dS\ (\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.)$ est un *minimum*, sera la même, que j'ai trouvée auparavant, & qui avoit cette proprieté, qu'à chaque point de sa surface la quantité d'action $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.$ étoit d'une valeur constante; Car en général il est extrémement difficile de déterminer la figure d'un solide, où une telle formule $\int dS\ (\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.)$ est un *maximum*, ou un *minimum*, puisque cette methode n'est encore asses cultivée, que pour les figures décrites sur un plan. Donc, pour affermir la verité de cette régle générale, & pour faire voir qu'elle conduit à la même solution, que j'ai dejà trouvée, je considererai une masse fluide infiniment mince, couchée sur un plan, & dont
Fig. 5. toutes les particules sont poussées vers plusieurs centres fixes C, C', C'' &c. situés dans le même plan.

XXIV. Soit donc A M la surface de cette masse fluide, quand elle sera en équilibre ; & pour trouver cette figure qu'on prenne les coordonnées $CX = x$, $XM = y$, & pour les autres centres soient des coordonnées semblables $C'X' = x'$, $X'M = y'$; $C''X'' = x''$, $X''M = y''$: & il y aura $dx = dx' = dx''$ & $dy = dy' = dy''$. Mais avant que de considérer le dernier point M, il faut chercher la quantité d'action des forces sur l'élément XxmM de l'aire CXMA, qui nous répresente la masse fluide. Pour cet effet qu'on prenne de cet élément XxmM une particule quelconque Yy, & qu'on nomme en

atten-

pendant X Y $=y$; X' Y $=y'$, X'' Y $=y''$: & la particule Y y sera $=dx\,dy$. Maintenant soient les distances de cette particule aux centres des forces: C Y $=v$, C' Y $=v'$, C'' Y $=v''$, & les forces mêmes, comme jusqu'ici, V, V', V'': de sorte que nous ayons $vv=xx+yy$; $v'v'=x'x'+y'y'$; $v''v''=x''x''+y''y''$. Or la quantité d'action de ces forces sur le point Y étant $=\int V\,dv+\int V'\,dv'+\int V''\,dv''$, la quantité d'action sur la particule Y y sera $=dx\,dy$ $(\int V\,dv+\int V'\,dv'+\int V''\,dv'')$ dont l'integrale, en supposant x constant, donnera la quantité d'action des forces sur tout l'élement X x m M, pourvu qu'on avance le point Y jusqu' en M, & que les significations des y, y', y'' soient les mêmes, que je leur ai données au commencement. Par conséquent la quantité d'action des forces sur tout l'élément de l'aire X x m M sera $=dx\int dy\,(\int V\,dv+\int V'\,dv'+\int V''\,dv'')$, supposant dans cette integrale l'abscisse x constante, & la seule appliquée y variable. Je nommerai pour abréger cette integrale, qui résulte en supposant x constante, $\int dy\,(\int V\,dv+\int V'\,dv'+\int V''\,dv''+\&c.)=$ U, desorte que le differentiel de U en supposant encore x constante soit $dy\,(\int V\,dv+\int V'\,dv'+\int V''\,dv'')$, ou si nous posons en général dU $=$ M dx + Ndy, il y aura N $=\int V\,dv+\int V'\,dv'+\int V''\,dv''$.

XXV. Ayant ainsi trouvé la quantité d'action sur l'élément X x m M, laquelle est $=$ U dx, il est clair que la quantité d'action sur toute l'aire C X M A sera $=\int$U dx. Par conséquent cette quantité $\int$U dx doit être la plus petite entre toutes les figures, que cette aire pourroit prendre ; il s'agit donc de trouver parmi toutes les figures de la même aire, $\int y\,dx$, celle où la valeur de cette formule $\int$U dx est la plus petite. Cette question revient au même que si l'on cherchoit parmi toutes les courbes possibles celle, où cette formule $\alpha\int y\,dx+\int$U dx ou $\int dx\,($U $+\alpha y)$ est un *minimum*. Pour cet effet suivant ma methode, en comparant cette formule avec $\int$Z dx, & posant dZ $=$M dx + N dy + P dp + &c. la courbe cherchée sera $o=$ N $-\frac{dP}{dx}$. Mais puisque Z $=$ U $+\alpha y$, & que U ne renferme que les va-

riables x & y, nous aurons $N = o$, ou bien le differentiel de $U + \alpha y$, en ne ſuppoſant que y variable doit être $= o$. Et partant le differentiel de U, en ne ſuppoſant que y variable, étant $= dy\ (\int V\, dv + \int V'\, dx' + \int V''\, dx'')$ & celui de $\alpha y = \alpha\, dy$, nous en obtiendrons pour la courbe cherchée A M cette équation $o = \alpha + \int V\, dv + \int V'\, dv' + \int V''\, dv''$ ou bien la quantité d'action des forces ſur chaque point M de la courbe A M doit être la même ; tout comme il a été trouvé par les autres principes. Ce bel accord de notre principe général dans ce cas ne laiſſera pas le moindre doute, qu'il ne ſoit pareillement d'accord dans tous les autres cas.

XXVI. On ſera encore plus fortement convaincu de la verité de ce principe général, ſi l'on remarquera, que la formule, dont la valeur eſt la plus petite dans la figure des fils flexibles, eſt parfaitement conforme à ce principe. Car ſoit A M la figure d'un fil parfaitement flexible, dont tous les élémens ſont ſollicités aux centres C, C', C'' par des forces V, V', V'' &c. & en vertu de notre principe le fil demeurera en repos, ſi la ſomme de toutes les actions des forces ſur le fil A M ſera la plus petite. Pour trouver cette ſomme, il faut chercher la quantité d'action ſur l'élément $Mm = ds$, & puiſque, en nommant les diſtances $CM = v$, $C'M = v'$, $C''M = v''$ la quantité d'action ſur le point M eſt $= \int V\, dv + \int V'\, dv' + \int V''\, dv''$ l'action ſur l'élément $Mm = ds$ ſera $= ds\ (\int V\, dv + \int V'\, dv' + \int V''\, dv'')$, & partant la ſomme de toutes les actions ſur la partie du fil A M, ſera l'integrale $\int dS\ (\int V\, dv + \int V'\, dv' + \int V''\, dv'')$. La valeur de cette formule étant renduë un *minimum*, donnera la figure du fil lors qu'il s'eſt mis en équilibre. Or ayant determiné dans le Mémoire precedent la figure d'un tel fil par les principes ordinaires de la Mécanique, j'ai déjà remarqué que cette figure ſe trouve, ſi l'on cherche la courbe, où la valeur de cette meme formule $\int dS\ (\int V\, dv + \int V'\, dv' + \int V''\, dv'')$ eſt la plus petite.

XXVII. Je ne puis pas paſſer ſous ſilence une fort belle proprieté de la courbe d'un fil parfaitement flexible, & d'une épaiſſeur par tout égale, à laquelle cette ſolution conduit. Soit A M ce fil parfaitement flexible, & partout de la même epaiſſeur, dont chaque point M eſt

Fig. 6.

M est attiré à trois centres C, C', C'' par des forces V, V', V'', qui sont des fonctions quelconques des distances $CM = v$, $CM = v'$, $C''M = v''$. Qu'on nomme les abscisses $CX = x$, $C'X' = -x'$, $C''X'' = -x''$- les appliquées $XM = y$, $X'M = y'$, $X''M = y''$ & puisque $dx = dx' = dx''$ & $dy = dy' = dy''$ l'élément de la courbe Mm sera $= ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Soit maintenant $dy = pdx$, & $dp = qdx$; & la methode des plus grands & plus petits a fourni pour la courbe du fil AM l'equation suivante

$$\frac{V(y-px)}{v} + \frac{V'(y'-px')}{v'} + \frac{V''(y''-px'')}{v''} = \frac{q}{1+pp}(\int Vdv + \int V'dv' + \int V''dv'')$$

où la formule $\int Vdv + \int V'dv + \int V''dv''$ exprime la quantité d'acti, on sur le point M. Qu'on divise de part & d'autre par $\sqrt{(1+pp)}$, & puisque le rayon de la developée $MO = \frac{(1+pp)\sqrt{(1+pp)}}{q}$ nous aurons cette equation

$$\frac{\int Vdv + \int V'dv' + \int V''dv''}{MO} = \frac{V(y-px)}{v\sqrt{(1+pp)}} + \frac{V'(y'-px')}{v'\sqrt{(1+pp)}} + \frac{V''(y''-px')}{v''\sqrt{(1+pp)}}$$

Or $\frac{y-px}{\sqrt{(1+pp)}} = \frac{ydx - xdy}{ds}$ exprime la perpendiculaire CT qui est menée du centre C à la tangente MT; car baissant du point X sur la même tangente la perpendiculaire XP & CQ sur XP, on voit d'abord que $XP = \frac{ydx}{ds}$ & $XQ = \frac{xdy}{ds}$, de sorte que $CT = \frac{ydx - xdy}{ds} = \frac{y-px}{\sqrt{(1+pp)}}$; Donc si des autres centres C', C'' on tire pareillement sur la tangente les perpendiculaires C'T', C''T'', l'equation trouvée se changera en cette forme:

$$\frac{\int Vdv + \int V'dv' + \int V''dv''}{MO} = \frac{V}{v}.CT + \frac{V'}{v'}C'T' + \frac{V''}{v''}C''T''$$

Multiplions par MO, & $\frac{CT.MO}{v} = \frac{CT.MO}{CM}$ exprimera la ligne

ligne M R, ayant baissé sur la ligne CM prolongée du point O la perpendiculaire O R. Ce qui nous fournit cette proprieté : *Si du centre* O *du cercle osculateur en* M *on mene sur les distances* CM, C′M, C″ M *prolongées les perpendiculaires* O R, O R′, O R″ ; *alors la quantité d'action des forces sur le point* M, *c'est à dire* $\int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv''$ *sera égale à* V. M R + V′. M R′ + V″. M R″.

XXVIII. Mais notre principe est encore plus général, & s'étend même aux fils elastiques, comme j'ai fait voir dans mon Mémoire precedent ; il s'agit seulement de ramener l'effet de l'elasticité à l'idée de la quantité d'action. Qu'on retienne toutes les dénominations du cas précedent, où chaque particule du fil A M est attirée vers les centres C, C′, C″ par les forces V, V′, V″, & soit le rayon de la developpée $MO = r = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,ddy}$, duquel dépend la force de l'élasticité, qu'on suppose ordinairement $= \frac{A}{r}$, ou $= \frac{S}{r}$, si le fil n'est pas partout de la même épaisseur, de sorte que l'élasticité est dans un endroit plus grande, ou plus petite que dans un autre. Or pour rendre la solution plus générale, je supposerai que l'élasticité en M soit $= T$, cette lettre T marquant une fonction quelconque de r, qui renferme même la longueur du fil, en cas qu'il soit d'une élasticité variable. Cela posé, les principes de la Mecanique nous fournissent pour la courbe de ce fil élastique cette équation

$$T = +\int dy \int ds \left(\frac{Vx}{v} + \frac{V'x'}{v'} + \frac{V''x''}{v''} + \&c.\right)$$
$$- \int dx \int ds \left(\frac{Vy}{v} + \frac{V'y'}{v'} + \frac{V''y''}{v''} + \&c.\right)$$

Pour trouver cette même équation par la methode des plus grands & plus petits, puisque la quantité d'action des forces V, V′. V″ sur le point M est $= \int V\,dv + \int V'\,dv' + \int V''\,dv'' + \&c.$ on n'aura qu'à y ajouter la quantité d'action de l'elasticité, que je viens de nommer T : on

Or nommant $\frac{1}{r} = t$, de forte que t foit proportionnel à la courbure même, on comprendra aifément que, comme de la force V eft réfulté l'action $\int V\, dv$, ainfi de la force T réfultera l'action $\int T\, dt$. Par conféquent, nommant la maffe de l'élément du fil $Mm = dS$, la fomme totale de toutes les actions fur la portion du fil AS fera $= \int dS\, (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c + \int T\, dt)$ & celle-cy fera la plus petite, quand le fil fe trouve en équilibre: & cette proprieté doit avoir lieu en vertu de notre principe, non feulement, lorsque les centres des forces C, C', C'' avec la figure du fil fe trouvent dans le même plan, mais auffi lorsque leur fituation eft quelconque.

XXIX. Mais ayant établi ce principe général, que dans tout état d'equilibre la fomme de toutes les actions des forces fur toutes les particules du corps, qui eft en équilibre, eft un *minimum*, je remarque de plus que ce même principe a lieu dans tous les mouvemens libres des corps, de quelques forces qu'ils foient follicités. Soit un corps, aprés avoir reçu un mouvement quelconque, attiré conftamment vers plufieurs centres de forces C, C', C'', & que les forces V, V', V'' foient exprimées par des fonctions quelconques des diftances $CM = v$, $C'M = v'$, $C''M = v''$; ce corps éprouvera à chaque inftant une autre quantité d'action de ces forces, & au moment qu'il fe trouve en M, la quantité d'action eft $= \int V\, dv + \int V'\, dv' + \int V''\, dv''$, comme j'ai fait voir au commencement de ce difcours. Donc nommant l'élément du tems $= dt$, la quantité d'action inftantanée, que le corps foutient pendant cet élément de tems dt, fera $= dt\, (\int V\, dv + \int V'\, dv' + \int V''\, dv'' + \&c.)$: & partant la fomme de toutes les actions inftantanées, auxquelles le corps eft expofé pendant le tems fini $= t$, fera $= \int dt\, (\int V dv + \int V' dv' + \int V'' dv'' + \&c.)$. Maintenant il eft fort naturel, *que ce corps prendra une telle route, que cette fomme de toutes les actions inftantanées y foit un* minimum. Voilà donc un nouveau principe général, pour le mouvement libre des corps follicités par des forces quelconques, dont la verité faute d'a-

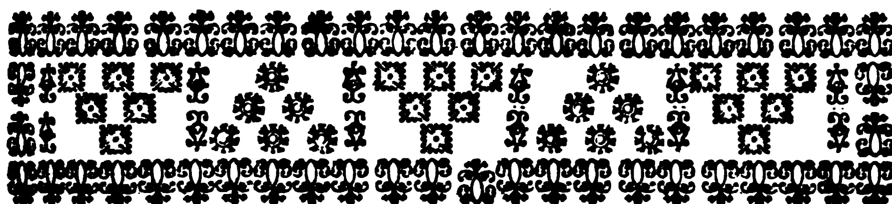
 bord

bord aux yeux, dés qu'on fait réfléxion sur l'idée de la quantité d'action, que j'ai établie.

XXX. En se servant de ce principe on trouvera en effet les mêmes courbes pour le mouvement des corps sollicités par des forces quelconques, auxquelles les principes ordinaires de la mecanique nous conduisent. Car ce principe ne differe point de celui, dont je me suis servi pour déterminer ces mêmes courbes par la methode *de maximis & minimis*: où j'ai fait voir, tout comme le principe de Mr. de Maupertuis exige que nommant l'élément de la courbe $M m = d s$ & la vitesse du corps en $M = u$, la valeur de cette formule $\int u\, d s$ étoit toujours un *maximum*. Or j'ai remarqué cy-dessus que la quantité d'action $\int V\, d v + \int V'\, d v' + \int V''\, d v''$ étant retranchée d'une quantité constante donne le quarré de la vitesse $u u$, de sorte que $\int V\, d v + \int V'\, d v' + \int V''\, d v'' = C - u u$; donc, suivant notre nouveau principe, cette formule $\int d t\, (C - u u)$, où $C t - \int u u\, d t$ sera un *minimum*, ou bien pendant le même tems t la valeur de cette formule $\int u u\, d t$ ou à cause de $d s = u\, d t$, la valeur de celle-cy $\int u\, d s$ doit être un *maximum*, tout comme j'ai prouvé dans mon Traité *de Maximis & Minimis*.



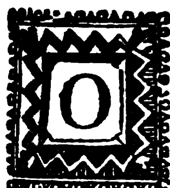
SUR



SUR UNE CONTRADICTION APPARENTE DANS LA DOCTRINE DES LIGNES COURBES.

PAR M. EULER.

I.

n croit généralement que la Geometrie ſe diſtingue des autres ſciences, parce que tout qu'on y avance eſt fondé ſur des démonſtrations les plus rigoureuſes, & qu'il ne s'y trouve rien, qui puiſſe donner occaſion à des controverſes. En effet, puisque dans la Geometrie on n'admet d'autres propoſitions, que celles qui ſont parfaitement démontrées, on ne ſauroit comprendre, comment on pourroit tomber en diſpute. Encore moins ſera-t-il poſſible, que deux propoſitions ſolidement prouvées ſoient en contradiction entr'elles, vu que les verités, bien loin d'être contraires, ſe trouvent toujours dans la plus parfaite harmonie entr'elles. Et quoiqu'il arrive ſouvent dans les autres ſciences, que deux verités ſe paroiſſent contredire, on eſt pourtant bien aſſuré, que ce n'eſt qu'une contradiction apparente, qui tire pour la plus part ſon origine des idées moins preciſes, ou du deffaut d'une connoiſſance ſuffiſante des choſes, auxquelles il faut avoir égard. Par cette raiſon on ſera d'autant plus porté à croire, que dans la Geometrie de pareilles contradictions apparentes ne trouvent aucun lieu, puisqu'on eſt bien eloigné de ſe contenter des idées vagues, & non ſuffiſamment déterminées.

II. Neanmoins je m'en vai mettre devant les yeux deux propositions de la Geometrie, dont toutes les deux sont rigoureusement démontrées, qui paroissent conduire à une contradiction ouverte. Cette difficulté se rencontre dans la doctrine des lignes courbes, où pour les lignes courbes d'un certain ordre on sait combien de points il en faut pour la détermination. Ainsi une ligne du troisieme ordre peut être décrite par 9 points donnés, ou 9 points déterminent tellement une ligne du troisieme ordre, qu'il n'y a qu'elle seule qui puisse être tirée par ces neuf points. Mais il est aussi demontré que deux lignes du 3me ordre se peuvent couper en neuf points ; donc, il peut arriver que deux lignes du troisieme ordre passent par neuf points donnés, d'où il s'ensuit que neuf points ne sont pas suffisants pour déterminer une ligne du 3me ordre, ce qui est contraire à ce qu'on vient d'avancer. Avant que d'expliquer & de déveloper cette contradiction apparente, il sera convenable de la mettre dans tout son jour, pour en mieux faire sentir l'importance. Pour cet effet je commencerai par l'explication de ces deux propositions mêmes, qui semblent renfermer cette contradiction.

ropos. I. III. Comme une ligne du premier ordre, ou une droite, se peut tirer par deux points donnés quelconques, ainsi une ligne du second ordre, ou section conique, sera tirée par 5 points, une ligne du troisieme ordre par 9 points, une du quatrieme ordre par 14 points, & en général une ligne de l'ordre indiqué par le nombre n, pourra être tirée par $\frac{nn+3n}{2}$ points. Car l'equation générale des lignes de cet ordre :

$$Ay^{n}+(B+Cx)y^{n-1}+(D+Ex+Fx^{2})y^{n-2}+(G+Hx+Ix^{2}+Kx^{3})y^{n-3}+ \&c. = 0$$

contient $\frac{nn+3n}{2}+$, coëfficients arbitraires A, B, C, D, &c. Or chaque point donné, par lequel la courbe doit passer, fournit des valeurs données pour les coordonnées x & y, qui étant substituées donneront une

une équation. Donc $\frac{nn+3n}{2}$ points donnés conduisent à autant d'equations, par lesquelles tous les coëfficiens A, B, C, &c. seront déterminés, & par consequent la courbe même. Car quoique les coëfficients soient d'un de plus, que les équations tirées de $\frac{nn+3n}{2}$ points, puisqu'il ne s'agit ici que du rapport mutuel entre les coëfficients, il n'en faut que $\frac{nn+3n}{2}$ équations pour déterminer tous ces rapports.

IV. Deux lignes droites, ou du premier ordre, ne peuvent se couper mutuellement qu'en un point; deux sections coniques, ou deux lignes du second ordre, ne peuvent se couper en plus qu'en quatre points. Deux lignes du troisieme ordre se peuvent couper en 9 points; deux lignes du quatrieme ordre en 16 points, & ainsi de suite. Et comme une ligne de l'ordre m, peut-être coupée, par une ligne droite en m points, par une ligne du second ordre en $2m$ points, par une ligne du troisieme ordre en $3m$ points; ainsi on soutient en général qu'une ligne de l'ordre m peut-être coupée par une ligne de l'ordre n en mn points. Cette proposition se doit entendre, que le nombre des intersections de deux lignes courbes, dont l'une est de l'ordre m, & l'autre de l'ordre n, ne peut être plus grand que mn, bien qu'il soit souvent plus petit: quelques points d'intersection ou s'eloignant à l'infini, ou devenant imaginaires. La démonstration, de cette proposition n'est pas si aisée, & j'en parlerai plus amplement dans la suite de ce discours. Propos. II.

V. La verité de ces deux propositions étant reconnue, je rapporterai premierement les conséquences qu'on en tire, & qui paroissent être contradictoires. Ensuite je ferai voir le defaut, qui se trouve dans ces conséquences, qui consiste dans une fort subtile précipitation du raisonnement, laquelle n'etant pas si facile à découvrir, nous doit rendre extrémement circonspects, principalement dans les autres scien-

ſciences, afin que nous ne nous laiſſions pas ſéduire pas de ſemblables contradictions apparentes. Car, ſi dans la Geometrie nous ſommes aſſujettis à des difficultés ſi remarquables, où il eſt pourtant permis de ramener toutes les idées presque au plus haut degré de juſteſſe, combien plus pourrons-nous être embarraſſés dans les autres ſciences, où il n'eſt pas poſſible de parvenir à des idées aſſés preciſes, & oú il eſt infiniment plus difficile de ſe garantir de pareilles fautes dans le raiſonnement? Enfin je mettrai dans tout ſon jour la maniere dont il faut entendre ces deux propoſitions, en y appliquant une certaine reſtriction neceſſaire, laquelle étant remarquée, toutes les contradictions, quelques ſolides qu'elles ayent pu paroitre, évanouïront tout d'un coup, & on s'appercevra de la plus belle harmonie entre ces deux propoſitions.

Difficulté. VI. La premiere contradiction ſemble d'abord ſe rencontrer dans la proprieté des lignes du troiſieme ordre, ſelon qu'on a égard ou à l'une ou à l'autre des deux propoſitions générales rapportées. Voicy les conſéquences qu'on en tire :

I. *Puisqu'il faut, ſelon la premiere propoſition, 9 points pour déterminer une ligne du troiſieme ordre ; par 9 points donnés on ne peut tirer qu'une ligne du troiſieme ordre.*

II. *Or, ſelon la ſeconde propoſition, deux lignes du troiſiéme ordre ſe peuvent couper en 9 points ; donc on pourra marquer 9 points, par lesquels peuvent paſſer deux lignes du troiſieme ordre.*

Ces deux conſéquences ſe contrediſent ouvertement ; car dans la premiere on ſoutient, que 9 points étant donnés, on ne ſauroit décrire qu'une ligne du troiſieme ordre qui paſſât par chacun de ces 9 points. Neanmoins la ſeconde conſéquence nous fait voir, qu'il y a une infinité de cas, où par neuf points donnés on puiſſe faire paſſer deux lignes du troiſieme ordre.

I. Difficulté. VII. La contradiction devient encore plus ſenſible dans les lignes du quatrieme & de plus hauts ordres. Pour le quatrieme ordre les conſéquences contradictoires ſont.

I. Par

I. *Par la premiere proposition, il faut 14 points pour déterminer une ligne du quatrieme ordre : & partant 14 points étant donnés, on ne pourra decrire qu'une ligne de cet ordre, qui passe par tous ces points.*

II. *Mais la seconde proposition nous apprend, que deux lignes du quatrieme ordre se peuvent couper mutuellement en 16 points : par conséquent dans ces cas il sera possible de faire passer deux lignes du quatrieme ordre par 16 points donnés.*

La contradiction de ces deux conséquences est manifeste, car s'il n'étoit pas possible de décrire plus d'une ligne du quatrieme ordre par 14 points donnés ; à plus forte raison on ne sauroit décrire deux lignes de cet ordre, qui passassent toutes les deux par les mêmes 16 points:

VIII. Pour les lignes du cinquieme ordre, nos deux propositions générales nous fournissent ces deux conséquences encore plus contraires entr'elles. III. Difficulté.

I. *La premiere proposition nous enseignant que 20 points suffisent pour determiner une ligne du 5me ordre, il s'en suit que par 20 points donnés on ne sauroit décrire qu'une seule ligne du 5me ordre.*

II. *Or la seconde proposition nous assure, que deux lignes du 5me ordre se peuvent couper mutuellement en 25 points. Donc il sera possible de marquer 25 points, par lesquels on sera en état de faire passer deux lignes du 5me ordre.*

Il y a par conséquent des cas, ou 25 points donnés ne sont pas suffisants pour déterminer la ligne du 5me ordre, & pourtant la premiere conséquence nous veut persuader qu'il ne faut que 20 points pour determiner une ligne du cinquieme ordre. Et il est clair que dans les courbes de plus hauts ordres, la difference entre les nombres des points, qui devroient suffire à la détermination, devient encore plus grande.

IX. Ces contradictions étant tout à fait manifestes, il faut absolument, ou que l'une des deux propositions générales soit fausse, ou que les conséquences, qu'on en a tirées, ne soient pas justes. Pour la seconde proposition, quoiqu'on n'en trouve nulle part, à ce que je

sache,

ſache, une démonſtration aſſés rigoureuſe, elle eſt pourtant trés certaine, comme je le montrerai cy-apres; & les conſéquences, qui en ont été tirées, ſont ſi claires qu'il ne reſte pas le moindre doute de ce coté là. Car ſi par exemple deux lignes du quatrieme ordre s'entrecoupent en 16 points, on ſera abſolument forcé d'accorder, qu'il eſt poſſible de marquer 16 points, par lesquels on puiſſe faire paſſer non ſeulement une, mais deux lignes du quatrieme ordre. Donc tant la ſeconde propoſition, que les conſéquences, qu'on en a tirées, étant tout à fait averées, nous ſommes obligés de conclure, que c'eſt dans la premiere propoſition, ou dans la maniere d'en tirer les conſéquences marquées Nro. I, qu'il faut chercher quelque paralogisme.

X. Les conſéquences, qu'on a tirées de la prémiere propoſition, ſont également bien fondées: car ſi 9 points déterminent une ligne du troiſieme ordre, il s'enſuit, que par 9 points donnés on ne ſauroit tirer qu'une ligne de cet ordre: de même que par deux points donnés on ne peut tirer qu'une ligne droite, & par cinq points donnés une ſeule ſection conique. Donc, ſi l'equation générale pour les lignes de l'ordre n eſt déterminée par $\frac{nn+3n}{2}$ points, par lesquels elle doit paſſer, il ne ſera pas poſſible, que plus d'une ligne de cet ordre paſſe par autant de points donnés, que cette formule $\frac{nn+3n}{2}$ contient d'unités. Ce n'eſt pas donc dans les conſéquences, qu'on vient de déduire de la prémiére propoſition, qu'il faut chercher la ſource de ces contradictions: & par conſéquent il ne reſte que la prémiére propoſition même, ſur laquelle puiſſe tomber le ſoupçon d'un paralogisme, quelque fondée qu'elle paroiſſe d'ailleurs.

XI. En effet, en réflêchiſſant bien ſur l'état de la prémiére propoſition, nous remarquerons qu'il peut y avoir des cas, où $\frac{nn+3n}{2}$ points donnés ne ſont pas ſuffiſans pour déterminer la courbe de l'ordre n, qui peut être tirée par ces points: ou, ce qui revient

vient au même que $\frac{nn+3n}{2}$ équations ne suffisent pas pour déterminer autant de coëfficients, ou pour déterminer le rapport entre $\frac{nn+3n}{2}+1$ coëfficients : quoique ces coëfficients entrent dans chacune des équations, & qu'ils n'y occupent qu'une seule dimension. D'ailleurs c'est le cas le plus simple, où plusieurs inconnuës doivent être déterminées par autant d'équations, puisque par l'elimination successive de ces quantités inconnuës, on demeure toujours au premier degré, de sorte qu'on ne trouve jamais pour chaque inconnuë plus d'une valeur, qui par conséquent sera toujours réelle. Circonstance qui paroit d'autant plus confirmer la verité de la premiere proposition, & l'affranchir de toute exception.

XII. Cependant on ne doutera plus, qu'on ne doive appliquer à cette premiére proposition une certaine restriction, sans laquelle elle ne sauroit être vraie en général; dés qu'on aura égard aux réfléxions suivantes.

Prémierement donc je dis, pour commencer des cas les plus simples, qu'il peut arriver. que deux équations ne sont pas suffisantes pour déterminer les valeurs de deux inconnuës, quoique toutes les deux entrent dans chacune de ces deux équations, & n'y occupent qu'une seule dimension. Car on n'a qu'à regarder ces deux équations $3x-2y=5$ & $4y=6x-10$ & on verra d'abord, qu'il n'est pas possible d'en déterminer les deux inconnuës x & y : puisqu'en eliminant l'une x, l'autre s'en va d'elle même, & on obtient une équation identique, dont on n'est en état de determiner rien. La raison de cet accident saute d'abord aux yeux, puisque la seconde équation se change en $6x-4y=10$, qui n'etant que la premiere $3x-2y=5$ doublée, n'en differe point. C'est pourquoi, quand on dit que pour déterminer deux quantités inconnuës, il suffit d'avoir deux équations, il faut joindre à cette proposition cette restriction, que ces deux équations soient differentes entr'elles, ou que l'une ne soit pas déjà comprise dans l'autre & ce n'est qu'avec cette restriction, que la dite proposition puisse être admise. I. Réfléxion.

XIII.

II.Réfléxion. XIII. En second lieu, on reconnoitra aisément, que trois équations peuvent ne suffire pas à determiner trois quantités inconnues. Car s'il arrive le même cas, que dans la réfléxion precedente, qu'une des trois équations soit comprise dans une des deux autres, auquel cas les trois équations ne valent que deux; alors il sera impossible d'en déterminer les trois inconnuës. Comme si l'on avoit ces trois équations:

$$4x - 6y + 10z = 16$$
$$3x - 5y + 7z = 9$$
$$2x - 3y + 5z = 8$$

il est clair que la premiere ne differant de la 3me, ne contribuë rien à la détermination des trois inconnuës x, y & z. Mais il y a aussi des cas, où une des trois équations est contenuë dans les deux autres conjointement, comme si l'on avoit ces trois équations:

$$2x - 3y + 5z = 8$$
$$3x - 5y + 7z = 9$$
$$x - y + 3z = 7$$

où la somme de la premiere & troisieme produit la seconde. Dans ce cas on peut obmettre telle de ces trois équations qu'on voudra, & il est de même que s'il n'y avoit que deux équations. Ainsi quand on dit, que pour déterminer trois inconnuës, il suffit d'avoir trois équations, il y faut ajouter cette restriction, que ces trois équations different tellement entr'elles, qu'aucune ne soit déjà comprise dans les autres.

III.Réfléxion. XIV. Il en est de même de quatre équations, qui ne sont suffisantes à determiner quatre quantités inconnues, qu'au cas qu'elles soient toutes differentes entr'elles, ou qu'aucune ne soit déjà renfermée dans les autres. Car si une est déjà comprise dans les trois autres, ces quatre équations doivent être regardées, comme s'il n'y avoit que trois. Il peut même arriver, que deux équations soient déjà comprises dans les deux autres, & alors il n'y aura que deux équations, qui restent dans le calcul, & par conséquent deux inconnuës resteront

ront indéterminées. Comme si l'on étoit parvenu à ces quatre équations :

$$5x + 7y - 4z + 3v - 24 = 0$$
$$2x - 3y + 5z - 6v - 20 = 0$$
$$x + 13y - 14z + 15v + 16 = 0$$
$$3x + 10y - 9z + 9v - 4 = 0,$$

elles ne vaudroient que deux. Car ayant tiré de la troisieme la valeur de $x = -13y + 14z - 15v - 16$, & l'ayant substituée dans la seconde pour avoir : $y = \frac{33z - 36v - 52}{29}$ & $x = \frac{23z + v33 + 212}{29}$, ces deux valeurs de x & y étant substituées dans la premiere & quatrieme équation conduiront à des équations identiques, de sorte que les quantités z & v resteront indéterminées.

XV. La même circonstance peut avoir lieu en quelque nombre d'equations qu'on voudra, de sorte que quand même on auroit autant d'equations, qu'il y a d'inconnuës, elles ne pourroient pas être suffisantes à les determiner toutes. Car une des quantités inconnuës restera indéterminée, si une des équations proposées est renfermée dans les autres. De plus, deux ou plusieurs quantités inconnuës resteront indeterminées, s'il y a parmi les équations deux ou plusieurs, qui sont déjà renfermées dans les autres, & qui par consequent ne contribuënt rien à la détermination des inconnuës. C'est pourquoi quand on soutient, que pour déterminer n quantités inconnuës, il suffit d'avoir n équations, qui expriment leur rapport mutuel, il y faut ajouter cette restriction, que toutes les équations soient differentes entr'elles, ou qu'il n'y en ait aucune qui soit déjà renfermée dans les autres. IV. Réfléxion.

XVI. Apres ces réfléxions on conviendra aisément, que pour la détermination de la ligne courbe d'un certain degré le nombre des points, qui selon la premiere proposition paroit suffisant, peut en

 certains

certains cas devenir insuffisant, puisque cette détermination se réduit à la détermination d'un certain nombre de coëfficients par autant d'équations, qui, à ce que nous venons de voir, peuvent quelquefois devenir insuffisantes à ce dessein. Pour connoitre ces cas, je considererai premierement l'équation générale pour les lignes droites au du premier ordre: $\alpha y + \zeta x + \gamma = o$, & soient proposés deux points, par lesquels doive passer une ligne de cet ordre. Ayant choisi une ligne droite quelconque pour $a x e$, soient a & b les coordonnées pour premier point & $c d$, pour l'autre: ou pour le premier point on aura $x = a$; $y = b$; & pour l'autre $x = c$; $y = d$; d'où nous tirerons ces deux équations:

$$\alpha b + \mathfrak{E} a + \gamma = o. \quad \alpha d + \mathfrak{E} c + \gamma = o$$

de la difference desquelles nous aurons: $\frac{\alpha}{\mathfrak{E}} = \frac{c - a}{b - d}$. Le rapport donc entre α & ζ sera toujours déterminé, à moins qu'il ne soit $c = a$ & $d = b$, auquel cas les deux points tombent l'un sur l'autre. Donc deux points déterminent une ligne droite, pourvu qu'ils ne soient pas coïncidents. Restriction qui s'entend de soi même dans la description de toutes les autres lignes courbes, parce que deux points qui tombent l'un sur l'autre, ne sont reputés que comme un seul.

XVII. L'équation générale pour les lignes du second degré étant:

$$\alpha x^2 + \mathfrak{E} x y + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y + \zeta = o$$

que 5 points soient proposés, par lesquels on doive décrire une ligne du second ordre. Pour abréger le calcul, qu'on prenne une ligne droite, qui passe par deux de ces points, pour axe, & une autre ligne tirée par un de ces deux points, & un troisieme, répresente l'inclinaison des appliquées, puisqu'il est indifferent de les supposer perpendiculaires à l'axe, ou non. Cela supposé, soient les valeurs de x & y pour ces 5 points donnés;

	I	II	III	IV	V
$x =$	o	a	o	c	e
$y =$	o	o	b	d	f

De

De là nous aurons les 5 équations suivantes :

I. $\zeta = 0$

II. $\alpha a^2 + \delta a + \zeta = 0$

III. $\gamma b^2 + \varepsilon b + \zeta = 0$

IV. $\alpha c^2 + \beta c d + \gamma d^2 + \delta c + \varepsilon d + \zeta = 0$

V. $\alpha e^2 + \beta e f + \gamma f^2 + \delta e + \varepsilon f + \zeta = 0$

Des trois premieres nous avons d'abord :

$$\zeta = 0;\ \delta = -\alpha a;\ \&\ \varepsilon = -\gamma b.$$

ces valeurs étant substituées dans les deux dernieres donnent ces équations

$$\alpha c^2 + \beta c d + \gamma d^2 - \alpha a c - \gamma b d = 0$$
$$\alpha e^2 + \beta e f + \gamma f^2 - \alpha a e - \gamma b f = 0$$

que détermineront la courbe cherchée, à moins qu'elles ne soient pas équivalentes. Or ce cas arrivera, quand les deux valeurs de β qu'on en tire seront les mêmes

$$\beta = \frac{\alpha c (a - c) + \gamma d (b - d)}{c d} = \frac{\alpha e (a - e) + \gamma f (b - f)}{e f}$$

c. à. d. si $\frac{a - c}{d} = \frac{a - e}{f}$ & $\frac{b - d}{c} = \frac{b - f}{e}$; ou si

$a = \frac{cf - de}{f - d}$ & $b = \frac{de - cf}{e - c}$. Par là on voit, que les cinq points donnés peuvent être tellement disposés, que la ligne du second ordre n'en est pas déterminée, & puisque un coëfficient demeure indéterminé, il s'ensuit que par ces cinq points donnés on pourra faire passer une infinité de lignes du second ordre.

XVIII. Si nous considerons de plus prés ce cas, où les cinq points donnés peuvent être insuffisants pour déterminer la ligne du second ordre, nous remarquerons aisément que cela arrive, quand quatre de ces cinq points donnés sont disposés dans une ligne droi-

 te.

te. Cela deviendra assés clair, si des équations $\frac{a-c}{d} = \frac{a-e}{f}$ & $\frac{b-d}{c} = \frac{b-f}{e}$ nous tirons les valeurs $f = \frac{d(a-e)}{a-c} = b - \frac{e(b-d)}{c}$ ce qui donne $(c-e)(ad-ab+bc) = 0$. Lorsque $e = c$, il y aura aussi $f = d$, & deux points tombent l'un sur l'autre; lequel cas s'exclut de lui même. Soit donc $ad-ab+bc = 0$. ou $d = b - \frac{bc}{a}$, & on trouvera $f = b - \frac{be}{c}$; on n'a à present qu'à regarder ces formules geometriquement, pour s'assurer, que quatre points sont situés en ligne droite. Il nauroit pas été difficile de deviner d'abord ce cas, car puisque le second ordre renferme aussi deux lignes droites situées d'une maniere quelconque, on reconnoit, que si trois des cinq points donnés sont en ligne droite, celle-cy fera part de la ligne du second ordre, & l'autre droite conjuguée sera déterminée par les deux autres points. Donc, si quatre points sont situés en ligne droite, celle-cy fera part de la ligne cherchée, mais l'autre partie, ou l'autre ligne droite passera par le cinquieme point, & n'ayant pas d'autres déterminations, on la pourra tirer comme on voudra. Si tous les cinq points donnés étoient situés en ligne droite, cette même droite avec toute autre quelconque satisferoit à la question; donc, ce cas sera encore moins déterminé que le précedent.

XIX. L'equation générale pour les lignes du troisieme ordre étant :

$$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3 + \varepsilon x^2 + \zeta x y + \eta y^2 + \theta x + \iota y + \kappa = 0$$

il faut definir neuf coëfficients par le dixiême, pour que l'equation ou la ligne de cet ordre soit déterminée. Donc si neuf points sont donnés, par lesquels cette ligne doit passer, chacun fournissant une équation, la ligne sera déterminée, pourvu que ces neuf équations soient toutes differentes entr'elles, & qu'il n'y en ait aucune, qui soit déjà

déjà comprise dans les autres. Or on comprendra aisément, qu'il y a une infinité de cas, où non seulement une, mais aussi deux, ou plusieurs des neuf équations peuvent déjà être renfermées dans les autres: & par conséquent dans ces cas la courbe ne sera point déterminée par les 9 points proposés, mais on y pourra encore ajouter le dixieme, & même l'onzieme, ou le douzieme, afin que la détermination devienne complette. Il est cependant fort difficile de définir ces cas généralement, comme j'ai fait pour les lignes du second ordre, puisque le calcul à cause du grand nombre des points, & des coëfficients, deviendroit trop compliqué. Neanmoins il n'est pas difficile de découvrir plusieurs cas particuliers, où ce defaut dans la détermination a lieu; desquels on ne conclurra pas difficilement, que le nombre de tels cas peut être infiniment grand, ce qui suffit pour mon dessein.

XX. On sait que l'équation générale du troisieme ordre comprend, outre les lignes courbes de cet ordre, aussi ou trois lignes droites, ou une ligne droite jointe à une section conique. Donc si des neuf points donnés quatre sont disposés en ligne droite, puisque dans les lignes courbes de cet ordre il n'y a pas quatre points en ligne droite, cette ligne droite tirée par ces quatre points constituera une partie de la figure cherchée, & les cinq autre points détermineront l'autre partie, qui sera ou une section conique, ou deux droites; & ici peut déjà avoir lieu le cas précedent de marque de détermination. Mais supposons que 5 points soient situés en ligne droite, qui constituera une partie de la figure, & il est clair que les autres 4 points ne sont pas suffisants pour déterminer l'autre partie. Dans ce cas donc on aura besoin de dix points pour déterminer la figure: or si des points proposés il y en a 6 situés en ligne droite, il en faut encore 5, & partant en tout 11 points pour déterminer entierement la question. Et de là il est evident, qu'il peut arriver, que quelque grand nombre que ce soit de points, ne soit pas suffisant pour la détermination d'une ligne du troisieme ordre, qui doit passer par tous ces points.

XXI. Comme ces cas n'ont lieu que dans les lignes droites qui sont comprises dans l'équation générale des lignes du troisieme ordre

ordre, on doutera peut être, si la même chose peut arriver dans les lignes courbes de troisieme ordre, ou si neuf points peuvent être insuffisants pour déterminer une ligne courbe propre à cet ordre. Pour prouver cela je ne considererai qu'un cas, où les neuf points donnés sont disposés en quarré $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,i$: que l'axe soit tiré par les points $d\,e\,f$, & que le point e soit le commencement des abscisses. Nommant l'intervalle de deux points $= a$, nous aurons pour l'abscisse $x = o$, trois valeurs pour l'appliquée y, qui sont o, $+ a$, & $- a$; & ces mêmes trois valeurs répondront aussi à l'abcisse $x = a$, & à $x = - a$. A ces valeurs répondra cette équation

$$a \quad b \quad c$$
$$d \quad e \quad f$$
$$g \quad h \quad i$$

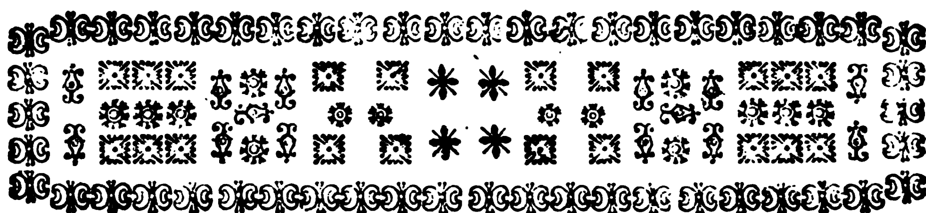
$$my\,(yy - aa) = nx\,(xx - aa)$$

où le rapport des coëfficients m & n peut être quelconque, de sorte qu'une infinité de lignes du troisieme ordre peut être indiquée, qui passent toutes par ces points donnés.

XXII. Il est bien vrai que cette équation renferme aussi des lignes droites, & des sections coniques: car si $n = o$, on aura trois lignes droites ac, df & gi: si $m = o$, on aura trois lignes droites ag, bh & ci: si $m = n$, on aura une droite aei, & une ellipse tirée par les points $b\,c\,f\,d\,g\,h$: & si $m = - n$, la ligne du troisieme ordre sera composée d'une ligne droite ceg & d'une ellipse qui passe par les points $a\,b\,d\,f\,h\,i$. Mais dans tous les autres rapports, qu'on pose entre m & n, on aura toujours une vraie ligne courbe, qui passe par les neuf points donnés. Et de là on comprendra aisément que toutes les fois, que deux lignes du troisieme ordre, se coupent en 9 points, ces points seront tels, qu'ils ne déterminent pas tout à fait la ligne du troisieme ordre, & que dans l'équation générale, aprés qu'on l'aura appliquée à ces neuf points, il restera un coëfficient indéterminé. Dans ces cas donc, il n'y aura pas seulement deux lignes du troisieme ordre, mais une infinité de lignes de cet ordre, qui peuvent toutes être décrites par ces neuf points.

XXIII. Quand deux lignes du quatrieme ordre s'entrecoupent en 16 points, puisque 14 points, lorsqu'ils conduisent à des équations toutes differentes entr'elles, sont suffisants pour déterminer une ligne de cet ordre ; ces 16 points seront toujours tels, que trois ou plusieurs des équations, qui en résultent, sont déjà comprises dans les autres. De sorte que ces 16 points ne déterminent plus que s'il n'y en avoit que 13, ou 12, ou encore moins, & partant pour déterminer la courbe entierement, on pourra encore à ces 16 points ajouter un ou deux points. La même chose arrivera si deux lignes du cinquieme ordre se coupent l'une l'autre en 25 points, qui n'etant pas suffisants à determiner la courbe; ils ne vaudront plus que 19, ou même 18, de sorte que 6 ou 7 points sont superflus: & partant ces 25 points seront toujours tellement disposés, que dés que la courbe passe par 19 de ces points, elle passera d'elle même aussi par les autres, ou il sera impossible qu'elle passe par 19 points, sans passer en même tems par tous les 25. Ces réflexions étant bien comprises, on résoudra aisément toutes les autres difficultés, qui pourroient naitre de la comparaison des deux propositions générales, que j'ai rapportées dans le commencement de ce discours.





DEMONSTRATION SUR LE NOMBRE DES POINTS, OU DEUX LIGNES DES ORDRES QUELCONQUES PEUVENT SE COUPER.

PAR M. EULER.



I.

Dans la Piece prècedente j'ai rapporté sans démonstration cette proposition, *que deux lignes courbes algebriques, dont l'une est de l'ordre* m *& l'autre de l'ordre* n *se peuvent couper en* m n *points.* La verité de cette proposition est reconnuë de tous les Geometres, quoiqu'on doive avouër, qu'on n'en trouve nulle part une démonstration asses rigoureuse. Il y a des verites générales, que notre esprit est prêt d'embrasser aussitot qu'il en reconnoit la justesse dans quelques cas particuliers : & c'est parmi cette espece de verités, qu'on peut ranger à bon droit la proposition, dont je viens de faire mention, puisqu'on la trouve vraie non seulement dans quelques, ou plusieurs cas, mais aussi dans une infinité de cas differens. Cependant on conviendra aisement, que toutes ces preuves infinies ne sont pas capables de mettre cette proposition à l'abri de toutes les objections, qu'un adversaire peut former, & qu'il faut absolument une démonstration rigourense, pour le réduire au silence.

II. Avant

II. Avant que d'entreprendre la démonstration de cette proposition, il en faut bien fixer le sens; Premierement il est à remarquer, que le nombre des intersections de deux lignes, dont l'une est de l'ordre m, l'autre de l'ordre n, n'est pas nécessairement $= mn$, mais qu'il peut fort souvent être plus petit. Ainsi il peut arriver, que deux lignes droites ne se coupent point du tout, lorsqu'elles sont paralleles : & qu'une ligne droite ne coupe une parabole que dans un point : & que deux sections coniques ne se coupent l'une l'autre qu'en deux points, ou point du tout. Ainsi le sens de notre proposition est, que le nombre des intersections ne peut jamais être plus grand que mn, quoiqu'il soit souvent plus petit; & alors on juge, ou que quelques intersections s'éloignent à l'infini, ou qu'elles deviennent imaginaires. De sorte qu'en contant les intersections à l'infini, & les imaginaires aussi bien que les réelles, on puisse dire, que le nombre des intersections est toujours $= mn$.

III. Il peut y avoir pourtant des cas, où le nombre des intersections est infini, si l'on veut regarder la coïncidence de deux lignes égales & semblables pour une infinité d'intersections. Ce cas arrivera donc, si les deux équations, qui expriment les deux lignes, sont les mêmes, ou si elles ont des facteurs égaux. Mais comme la coïncidence parfaite ne peut pas proprement être regardée comme une infinité d'intersections, puisque c'est plutot un attouchement continuel, le contenu de la proposition ne souffre aucune exception réelle de ce coté là; & si la question roule sur le nombre d'intersections de deux lignes courbes, on suppose toujours qu'elles ne sont ni coïncidentes, ni qu'élles ont des parties, dont l'une tombe parfaitement sur l'autre. Ainsi on pourra énoncer la proposition en question de cette maniere : que deux lignes courbes, l'une de l'ordre m, & l'autre de l'ordre n, dont les équations ne sont, ni les mêmes, ni qu'elles ont aucun commun diviseur, ne se peuvent jamais couper en plus que mn points, bien que le nombre des intersections puisse fort souvent être plus petit.

IV. On reconnoitra aisément la verité de cette proposition générale dans une infinite de cas differens, & qui pourroient même tenir

lieu d'une démonstration, si l'on ne se piquoit pas de n'avancer rien dans la Geometrie, qui ne soit muni d'une démonstration rigoureuse. Cependant comme ces preuves particulieres ne contribuënt pas peu à connoitre mieux la proposition même, & à en faire sentir l'importance, je commencerai par l'explication de ces preuves, avant que d'entreprendre la démonstration générale. Et d'abord la verité de cette proposition est reconnuë dans le cas, où l'une des deux lignes, qui se coupent, est droite, ou du premier ordre, c. à. d. si $m = 1$, car alors il est aisé de démontrer que le nombre des intersections d'une ligne de l'ordre n par une ligne droite est égal à n, ou plus petit. Car l'équation générale des lignes de l'ordre n étant:

$$\alpha y^{n} + (\beta + \gamma x) y^{n-1} + (\delta + \varepsilon x + \zeta x^2) y^{n-2} + \&c. = o$$

si de l'équation pour une ligne droite quelconque

$$a y + b x + c = o$$

on substituë la valeur de $y = -\frac{b x - c}{a}$, on parviendra à une équation, où l'inconnuë x ne monte, qu'à n dimensions. Donc puisque chaque intersection est marquée par une racine de x de cette équation, il est clair que le nombre des intersections est égal au nombre des racines de cette équation, & qu'il ne peut pas par conséquent être plus grand que n. De plus on verra que le nombre des intersections est $= n$, si toutes les racines sont réelles, & qu'il sera plus petit, si quelques unes de ces racines sont imaginaires. Or si les plus hautes dimensions de x se détruisent mutuellement, & que l'équation apres l'elimination de y se réduise à un degré inferieur, c'est une marque, que quelques points d'intersections s'eloignent à l'infini.

V. Soit $m = 2$, & que la ligne du second ordre soit composée de deux lignes droites, ce qui arrive, lorsque l'équation est résoluble en deux facteurs, comme

$$(a y + b x + c)(d y + e x + f) = o$$

Or

Or l'autre ligne soit une courbe quelconque de l'ordre n, dont la nature soit exprimée par cette équation

$$\alpha y^{n} + (\beta + \gamma x) y^{n-2} + (\delta + \epsilon x + \zeta x^2) y^{n-1} + \&c. = 0$$

Dans ce cas il eſt clair, puisque cette ligne de l'ordre n ne peut être coupée par une ligne droite qu'en n points ; que deux lignes droites qui ſont regardées comme une ſeule ligne du ſecond ordre, la pourront couper en $2n$ points, lorsque chacune la coupe en n points : ce qui eſt conforme à l'enoncé de la propoſition, puisque mn dans ce cas devient $= 2n$.

VI. Si l'une des deux lignes propoſées eſt du troiſieme ordre, mais qu'elle ſoit compoſée de trois lignes droites, l'autre demeurant une courbe quelconque de l'ordre n, il eſt clair que le nombre d'interſections ſera $= 3n$, ou moindre, comme la propoſition exige. Et il en ſera de même d'une ligne de l'ordre quelconque m, ſi elle conſiſte de m lignes droites, ou ſi ſon équation eſt réſoluble en autant d'équations ſimples de cette forme $ay + bx + c = o$; car puisque chacune de ces lignes droites peut couper l'autre ligne propoſée de l'ordre n en n points, le nombre de toutes les interſections pourra monter à mn, ſelon l'enoncé de la propoſition. Et partant nous avons déjà une infinité de cas, où la verité de cette propoſition ſe trouve ſolidement établie. Mais dans tous ces cas l'une des deux lignes propoſées, n'eſt pas veritablement une ligne courbe, mais plutot un amas de pluſieurs lignes droites, ſelon l'ordre auquel elle appartient.

VII. Mais il y a auſſi une infinité de lignes courbes où la verité éclate avec autant de clarté. Car ſoit l'une des deux lignes une parabole exprimée par l'équation : $y = axx + bx + c$, & partant $m = 2$. l'autre courbe ſoit exprimée par l'équation générale de l'ordre n :

$$\alpha y^{n} + (\beta + \gamma x) y^{n-1} + (\delta + \epsilon x + \zeta xx) y^{n-2} + \&c. = o.$$

& il eſt evident que ſi l'on met ici par tout pour y ſa valeur $axx + bx + c$, cette équation montera au degré $2n$, & la racine x pourra avoir autant de racines, dont toutes les interſections ſeront indiquées :

donc

donc il sera possible que la ligne de l'ordre n soit coupée par la parabole en $2n$ points : & quoique le nombre des intersections puisse souvent être plus pétit, on voit pourtant, qu'il ne peut jamais être plus grand que $2n$.

VIII. La même chose paroit aussi, si l'une des deux lignes est une courbe parabolique d'une ordre quelconque :

$$y = ax^{m} + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c.$$

Car si l'on met cette valeur pour y dans l'équation pour l'autre courbe de l'ordre n, on verra sans difficulté, que la lettre x obtiendra dans l'équation resultante mn dimensions, qui marquent autant de racines & partant autant d'intersections, tout comme la proposition prononce. De là on conclura aussi, comme l'axe des deux courbes est arbitraire, quand même l'une des deux courbes ne seroit pas exprimée par une telle équation :

$$y = ax^{m} + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \&c.$$

pourvu qu'en changeant d'axe, & même d'inclinaison entre les coordonnées, l'equation puisse être réduite à cette forme, le nombre des intersections sera également $= mn$, l'équation qui designe les intersections montant toujours à ce degré, ou un inferieur, & jamais à un plus haut.

IX. Ces cas particuliers joints ensemble nous conduisent à un cas beaucoup plus général, où la verité de la proposition se trouve confirmée. Car toutes les fois que l'équation de la premiere ligne, que je supose de l'ordre m se peut résoudre en des facteurs, qui expriment, ou lignes droites, ou courbes paraboliques, cette équation étant ;

$$(y - P)\ (y - Q)\ (y - R)\ (y - S)\ \&c. = o$$

où P, Q, R, S, &c. soient des fonctions rationelles de x, & le premier facteur $y - P = o$ marque une ligne de l'ordre p, le second $y - Q = o$ une de l'ordre q, le troisieme une de l'ordre r, &c. de sorte que $p + q + r + s + \&c. = m$, cette ligne sera composée de toutes ces lignes droites ou courbes ensemble : & l'autre courbe, que je suppose

être

être de l'ordre n, pourra être coupée de la partie de la premiere, qui est exprimée par le facteur $y - P = o$, en pn points, de la partie comprise en $y - Q = o$ en qn points, de la partie comprise en $y - R = o$ en rn points. &c. Et partant la ligne de l'ordre n pourra être coupée par toutes les parties de la ligne premiere de l'ordre m en $pn + qn + rn + sn +$ &c. points, c'est à dire en mn points, à cause de $p + q + r + s +$ &c. $= m$.

X. Quoique ces cas aillent à l'infini, on conviendra neanmoins, qu'il s'en faut encore beaucoup, que la verité de la proposition soit démontrée dans toute son étenduë. Et pour parvenir à une telle démonstration il faut prouver, que deux équations d'ordres quelconques étant proposées, comme :

$$ay^{m} + (b + cx)y^{m-1} + (d + ex + fxx)y^{m-2} + \&c. = o$$

$$\alpha y^{n} + (\beta + \gamma x)y^{n-1} + (\delta + \epsilon x + \zeta xx)y^{n-2} + \&c. = o$$

si l'on elimine l'une ou l'autre des deux variables x & y, l'autre ne monte aprés l'elimination qu'à mn dimensions. Il est bien vrai qu'il seroit imposs ible d'achever en général cette élimination, pour faire voir actuellement, à combien de dimensions l'autre variable pourroit monter : & même dans la plupart des cas si l'on se sert des methodes ordinaires d'eliminer, on parviendra à une équation de plus de dimensions, que mn; de sorte qu'emploiant cette maniere, on devroit plutot croire que la proposition fut fausse. Car quoique l'équation, à laquelle on arrive par ce chemin, ait des diviseurs, on a lieu de douter, si l'on peut negliger ces diviseurs, & s'ils ne renferment des racines, qui marquent des intersections.

XI. Pour faire sentir plus évidemment cette difficulté, je m'en vai éliminer suivant la maniere ordinaire la quantité y de ces deux équations :

I. $Py^3 + Qy^2 + Ry + S = o.$

II. $py^3 + qy^2 + ry + s = o.$

Où P, Q, R, S, p, q, r, s soient des fonctions quelconques de l'autre

tre quantité variable x. Multiplions la premiere par s, & la seconde par S, & la difference étant divisée par y donnera :

$$\text{III. } (Ps - pS)\,y^2 + (Qs - qS)\,y + Rs - rS = o.$$

Ensuite multiplions la premiere par p, & la seconde par P, & la difference donnera :

$$\text{IV. } (Qp - qP)\,y^2 + (Rp - rP)\,y + Sp - sP = o.$$

De la même maniere de ces deux équations du second degré nous tirerons deux du premier degré de y :

$$\text{V. } ((Ps-pS)(Sp-sP)-(Qp-qP)(Rs-rS))\,y+(Qs-qS)(Sp-sP)-(Rp-rP)(Rs-rS)=o.$$

$$\text{VI. } ((Qs-qS)(Qp-qP)-(Rp-rP)(Ps-pS))\,y+(Rs-rS)(Qp-qP)-(Sp-sP)(Ps-pS)=o.$$

Et de là on tirera cette équation, ou la quantité y ne se trouve plus :

$$\begin{aligned}\text{VII. } &(Ps-pS)(Sp-sP)(Rs-rS)(Qp-qP)-(Ps-pS)^2(Sp-sP)^2\\ &-(Qp-qP)^2(Rs-rS)^2+(Qp-qP)(sR-rS)(Sp-sP)(Ps-pS)=\\ &(Qs-qS)^2(Qp-qP)(Sp-sP)-(Qs-qS)(Qp-qP)(Rp-rP)(Rs-rS)\\ &-(Rp-rP)(Ps-pS)(Qs-qS)(Sp-sP)+(Rp-rP)^2(Ps-pS)(Rs-rS)\end{aligned}$$

qui se change en celle-cy :

$$\begin{aligned}\ldots=(Ps-pS)^4&+2(Qp-qP)(Rs-rS)(Ps-pS)^2-(Qp-qP)(Qs-qS)^2(Ps-pS)+(Qp-qP)^2(Rs-rS)^2\\ &+(Rp-rP)(Qs-qS)(Ps-pS)^2+(Rs-rS)(Rp-rP)^2(Ps-pS)-(Qp-qP)(Qs-qS)(Rp-rP)(Rs-rS)\end{aligned}$$

Mais les derniers termes qui ne contiennent pas le facteur $(Ps-pS)$ se reduisent à :

$$(Qp-qP)(Rs-rS)((Qp-qP)(Rs-rS)-(Qs-qS)(Rp-rP))$$

ce qui est :

$$(Qp-qP)(Rs-rS)(Ps-pS)(Qr-qR)$$

& partant toute l'equation sera divisible par $Ps-pS$ étant :

$$\ldots pS)^4+\left.\begin{matrix}2(Qp-qP)(Rs-rS)\\+(Rp-rP)(Qs-qS)\end{matrix}\right\}(Ps-pS)^2\left.\begin{matrix}-(Qp-qP)(Qs-qS)^2\\+(Rs-rS)(Rp-rP)^2\end{matrix}\right\}(Ps-pS)+(Qp-qP)(Qr-qR)(Rs-rS)(Ps-pS)$$

XII. Il est assés clair, que dans ce cas le facteur $Ps-pS$ étant posé $= o$, ne peut pas marquer une intersection, & que par consequent les intersections des deux courbes proposées seront contenuës dans cette équation :

$$\left.\begin{aligned}&(Ps-pS)^3+2(Qp-qP)(Rs-rS)(Ps-pS)-(Qp-qP)(Qs-qS)^2\\ &\quad+(Rp-rP)(Qs-qS)(Ps-pS)+(Rs-rS)(Rp-rP)^2\\ &\qquad+(Qp-qP)(Qr-qR)(Rs-rS)\end{aligned}\right\}=o.$$

Donc dans le cas de deux lignes courbes du troisieme ordre, les coëfficiens

ficients P & p seront constans ; Q & q des fonctions de x d'une dimension comme $\alpha + \beta x$; R & r des fonctions de x de deux dimensions comme $\alpha + \beta x + \gamma x^2$; & S & s des fonctions de x de trois dimensions comme $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$. Par conséquent les facteurs, qui se trouvent dans cette équation seront des fonctions de x :

$Ps - pS$ de 3 dim.	$Qs - qS$ de 4 dim.
$Qp - qP$ d'une dim.	$Qr - qR$ de 3 dim.
$Rs - rS$ de 5 dim.	$Rp = rP$ de 2 dim.

d'où il est evident, que l'équation, qui indique les intersections sera de 9 dimensions, & que par conséquent, en général deux lignes du 3me ordre se peuvent couper en 9 points.

XIII. Ces mêmes équations choisies :

$$Py^3 + Qy^2 + Ry + S = o$$
$$py^3 + qy^2 + ry + s = o$$

peuvent aussi montrer le nombre des intersections dans une infinité d'autres cas. Car que la premiere équation exprime une ligne de l'ordre m, & la seconde équation une ligne de l'ordre n, ce qui arrivera, quand les coëfficients seront des fonctions rationnelles entieres de x : savoir

P de $m - 3$ dimens.	p de $n - 3$ dim.
Q de $m - 2$ dim.	q de $n - 2$ dim.
R de $m - 1$ dim.	r de $n - 1$ dim.
S de m dim.	s de n dim.

Alors les facteurs, qui constituënt l'equation, qui ne contient plus la variable y, seront des fonctions de x :

$Ps - pS$ de $m + n - 3$ dim.	$Rp - rP$ de $m + n - 4$ dim.
$Qp - qP$ de $m + n - 5$	$Qr - qR$ de $m + n - 3$
$Rs - rS$ de $m + n - 1$	$Qs - qS$ de $m + n - 2$

Et partant le nombre des intersections de ces deux courbes sera $= 3m + 3n - 9$; qui est toujours plus petit que mn si m & n sont plus grand que 3. Car soit : $m = 3 + \alpha$ & $n = 3 + \beta$, le nombre des intersections sera $= 9 + 3(\alpha + \beta)$ au lieu que $mn = 9 + 3(\alpha + \beta) +$

α β. Mais on voit bien que cette diminution du nombre des interſections vient de ce que les équations choiſies n'expriment pas généralement les courbes des ordres *m* & *n*, mais ſeulement des eſpeces de ces ordres; d'où il n'eſt pas ſurprenant, que le nombre des interſections a été trouvé plus petit, que la propoſition demande.

XIV. Comme l'elimination de l'inconnuë *y* des deux équations cubiques, dont j'ai fait le calcul, a conduit à une équation trop haute, qui n'a été conduite au juſte degré que par la diviſion d'un facteur, dont on pouvoit bien voir qu'il ne renfermoit aucune interſection: ainſi dans les équations, où *y* a plus de dimenſion, on parviendra par l'elimination de *y* à une équation encore plus élevée, qui en verité admettra un diviſeur, mais cette methode, qui ſeroit d'ailleurs impracticable dans de plus hautes équations, ne nous mettra pas en ſeureté, ſi l'on trouvera toujours un tel diviſeur, qui ne regarde point les interſections, & encore moins, ſi aprés la diviſion l'équation ſera juſtement d'autant de dimenſions, que la propoſition générale marque; c. à d. ſi le nombre des dimenſions ne ſera jamais plus grand que *mn*, ſi les deux équation propoſées ont été des ordres *m* & *n*. Cette circonſtance prouve donc encore davantage la néceſſité de démontrer la propoſition générale dans toute ſon étenduë, puiſque ſans cela on auroit bien de la raiſon de douter de ſa verité.

XV. C'eſt donc principalement de l'ouvrage de l'elimination, que dépend la démonſtration de notre propoſition générale, où il faut prendre garde, que par l'elimination on ne parvienne à une équation, qui renferme des racines inutiles. Car deux équations étant propoſées, dont chacune contient une même variable *y*, qui doit être eliminée, on voit aiſément que l'elimination ſe peut faire d'une infinité de manieres differentes, ſelon qu'on multiplie l'une & l'autre équation par une quantité arbitraire. Il s'agit donc de bien fixer l'idée de l'elimination, & de diriger cette opération, en ſorte que l'equation, à laquelle on arrive, ne contienne d'autres racines, que telles, qui marquent des interſections, & qu'on puiſſe être aſſuré, qu'elle ne renferme des facteurs ſuperflus, dont on pourroit douter s'ils indiquent des interſections, ou non?

XVI. Soient

XVI. Soient donc proposées deux équations quelconques:

$$y^{m} - Py^{m-1} + Qy^{m-2} + Ry^{m-3} - Sy^{m-4} + \&c. = o$$

$$y^{n} - py^{n-1} + qy^{n-2} + ry^{n-3} - sy^{n-4} + \&c. = o$$

lesquelles il faille combiner, en sorte qu'il en résulte une équation qui ne contienne plus la lettre y. Or d'abord on voit que la valeur de y, qui resulte d'une de ces équations doit être égale à la valeur de y, qui résulte de l'autre. Donc si l'une & l'autre équation donne plusieurs valeurs de y, les deux équations proposées pourront subsister ensemble, si une valeur quelconque de y de l'une sera égale à une valeur quelconque de y de l'autre. Supposons que toutes les racines de la premiere équation soient:

A, B, C, D, E, F, G &c.

& les racines de l'autre équation:

a, b, c, d, e, f, g &c.

Cela posé, il est clair que chacune des deux équations proposées aura lieu dans tous les cas, qu'une des racines de la premiere équation sera égale à une des racines de l'autre.

XVII. Le nombre des racines A, B, C, D &c. de la premiere équation sera $= m$, & le nombre des racines de l'autre équation sera $= n$; donc les équations proposées pourront être répresentées sous ces formes:

$$(y - A)(y - B)(y - C)(y - D)(y - E) \&c. = o.$$

$$(y - a)(y - b)(y - c)(y - d)(y - e) \&c. = o.$$

A présent il est clair que si $A = a$, la valeur $y = A = a$ satisfera à l'une & à l'autre équation; la même chose arrivera si $A = b$; ou $A = c$; ou $A = d$; ou $A = e$; &c. de plus la valeur $y = B$ satisfera à l'une & à l'autre, si $B = a$, ou $B = b$; ou $B = c$; ou $B = d$; ou $B = e$; &c. & la valeur $y = C$ satisfera à toutes les deux équations si $C = a$, ou $C = b$; ou $C = c$; ou $C = d$; ou $C = e$; &c. & ainsi des autres. Et il est evident, que toutes ces combinaisons ensemble répresentent tous les cas possibles, où les deux équations proposées pourront subsister à la fois.

 XVIII. Donc

XVIII. Donc puisque l'équation, qu'on cherche par l'elimination, doit contenir tous les cas possibles, où la même valeur mise pour y satisfait à l'une & à l'autre équation à la fois, il est clair qu'elle doit contenir tous les cas marqués, & partant elle sera composée de tous ces facteurs

$$\left.\begin{matrix} (A-a)\ (A-b)\ (A-c)\ (A-d)\ (A-e)\ \&c. \\ (B-a)\ (B-b)\ (B-c)\ (B-d)\ (B-e)\ \&c. \\ (C-a)\ (C-b)\ (C-c)\ (C-d)\ (C-e)\ \&c. \\ (D-a)\ (D-b)\ (D-c)\ (D-d)\ (D-e)\ \&c. \\ (E-a)\ (E-b)\ (E-c)\ (E-d)\ (E-e)\ \&c. \\ \&c. \end{matrix}\right\} = 0.$$

Donc, puisque la quantité y ne se trouve plus dans cette équation, elle sera la même qu'on cherche par l'elimination, & qui montre tous les cas, où les deux équations proposées peuvent avoir la même racine. Mais comme les racines A, B, C, D &c. a, b, c, d &c. sont souvent impossibles d'être asſignées, il s'agit d'exprimer cette équation par les coëfficients P, Q, R, S &c. p, q, r, s &c. dont le rapport aux racines est connu.

XIX. Parceque, comme nous avons vu, le produit de tous ces facteurs $(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)(y-e)$ &c. est égal à l'expression $y^{n} - py^{n-1} + qy^{n-2} - ry^{n-2} + sy^{n-3}$ — &c. si nous substituons successivement pour y les valeurs A, B, C, D &c. l'equation, qui doit résulter par l'elimination, sera composée de ces facteurs:

$$\left.\begin{matrix} (A^{n} - pA^{n-1} + qA^{n-2} - rA^{n-3} + sA^{n-4} - \&c.) \\ (B^{n} - pB^{n-1} + qB^{n-2} - rB^{n-3} + sB^{n-4} - \&c.) \\ (C^{n} - pC^{n-1} + qC^{n-2} - rC^{n-3} + sC^{n-4} - \&c.) \\ (D^{n} - pD^{n-1} + qD^{n-2} - rD^{n-3} + sD^{n-4} - \&c.) \\ (E^{n} - pE^{n-1} + qE^{n-2} - rE^{n-3} + sE^{n-4} - \&c.) \\ \&c. \end{matrix}\right\} = 0,$$

où

où le nombre de ces facteurs est $= m$, selon le nombre des racines de la premiere équation. D'où est il evident aussi que changeant les équations, l'equation, qui resulte par l'elimination, peut être représentée aussi sous cette forme :

$$\left.\begin{array}{l} (a^{m} - Pa^{m-1} + Qa^{m-2} - Ra^{m-3} + Sa^{m-4} - \&c.) \\ (b^{m} - Pb^{m-1} + Qb^{m-2} - Rb^{m-3} + Sb^{m-4} - \&c.) \\ (c^{m} - Pc^{m-1} + Qc^{m-2} - Rc^{m-3} + Sc^{m-4} - \&c.) \\ (d^{m} - Pd^{m-1} + Qd^{m-2} - Rd^{m-3} + Sd^{m-4} - \&c.) \\ (e^{m} - Pe^{m-1} + Qe^{m-2} - Re^{m-3} + Se^{m-4} - \&c.) \\ \&c. \end{array}\right\} = o$$

où le nombre des facteurs est $= n$.

XX. Quoique les expressions des racines A, B, C, D &c. & a, b, c, d &c. soient pour la pluspart fort irrationelles, & souvent telles, qu'on ne les peut pas assigner; on sait pourtant que la somme de toutes les racines A, B, C, D &c. est $=$ P
la somme des produits de deux à deux $=$ Q
la somme des produits de trois à trois $=$ R
la somme des produits de quatre à quatre $=$ S
&c.

Et par ces valeurs P, Q, R, S &c. on est en état d'exprimer toutes les expressions, dans lesquelles entrent toutes les racines également, par des formules rationnelles composées de P, Q, R, S &c. Or on voit aisément, que si l'on multiplie les facteurs mentionnés actuellement, on parviendra toujours à de semblables expressions, qui renferment toutes les racines également, & au lieu desquelles on pourra mettre des fonctions rationnelles des coëfficients P, Q, R, S &c. & p, q, r, s &c. Cela est aussi clair par la double forme de cette équation du §. preced. Car s'il restoit dans la premiere forme quelque irrationalité, ce seroit une irrationalité de la premiere équation, mais

par la seconde forme nous voyons, qu'il n'y peut y avoir une irrationalité de la premiére équation. D'où il s'ensuit, que l'une & l'autre forme doit conduire à la même expression rationnelle, qui ne renferme que les coëfficients P, Q, R, S &c. & p, q, r, s &c.

XXI. Si nous réflechissons maintenant, que dans les équations proposées

$$y^m - Py^{m-1} + Qy^{m-2} - Ry^{m-3} + Sy^{m-4} - \&c. = 0$$

$$y^n - py^{n-1} + qy^{n-2} - ry^{n-3} + sy^{n-4} - \&c. = 0$$

entant qu'elles expriment des lignes des ordres m & n les coëfficients P & p marquent des fonctions du premier degré de x comme $\alpha + \beta x$; les coëfficients Q & q des fonctions du second degré $\alpha + \beta x + \gamma xx$; les coëfficients R & r des fonctions du troisieme degré $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ &c. Donc la somme des racines A, B, C, D &c. ou a, b, c, d, e &c. sera exprimée par une fonction de x d'un degré. La somme des produits de deux à deux de ces racines par une fonction du second degré: la somme des produits de trois à trois racines par une fonction du troisieme degré, & ainsi de suite. C'est pourquoi dans la composition de toutes ces racines dans la premiere forme (§. XVIII.) on pourra regarder chaque racine comme une fonction d'une dimension de x: & partant cette forme étant composée de mn facteurs simples, elle montera à mn dimensions de x & désignera par conséquent mn intersections des deux courbes proposées.

XXII. S'il y a dans cette démonstration encore quelque obscurité, cela vient de sa grande universalité: & tous les doutes qu'on en pourroit avoir évanouiront entierement, dèsqu'on fera l'application à quelques cas particuliers, d'où l'on reconnoitra dabord, que tout ce que je viens d'avancer sur les dimensions de chaque partie, doit avoir lieu non seulement dans ces cas, mais aussi en général. Je commencerai par deux équations du second ordre, qui soient

	Les racines	
$yy - Py + Q = 0$	A,	B
$yy - py + q = 0$	a,	b

donc

donc, puisque $m = 2$ & $n = 2$, l'équation, où l'élimination doit conduire, sera :

$$(A^2 - pA + q)(B^2 - pB + q) = 0$$

qui étant développée, donnera :

$$A^2B^2 - pAB(A+B) + q(A^2+B^2) + ppAB - pq(A+B) + qq = 0$$

Or ayant $AB = Q$ & $A + B = P$, il sera $AA + BB = PP - 2Q$: par conséquent l'équation cherchée sera :

$$Q^2 - pPQ + qPP - 2Qq + ppQ - pqQ + qq = 0$$

dont chaque terme sera de quatre dimensions de x pourvu que P & p renferment une dimension de x, & Q & q deux.

XXIII. Soient les deux équations proposées du troisieme ordre :

	Les racines étant
$y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$	A, B, C & $m = 3$
$y^3 - py^2 + qy - r = 0$	a, b, c & $n = 3$

Donc l'équation cherchés par l'élimination de y sera :

$$(A^3 - pA^2 + qA - r)(B^3 - pB^2 + qB - r)(C^3 - pC^2 + qC - r) = 0$$

qui par le developpement deviendra :

$$\begin{aligned}
&A^3B^3C^3 - pA^2B^2C^2(AB+AC+BC) + qABC(A^2B^2+A^2C^2+B^2C^2) - r(A^3B^3+A^3C^3+B^3C^3)\\
&+p^2A^2B^2C^2(A+B+C) - pqABC(A^2B+AB^2+A^2C+AC^2+B^2C+BC^2) - p^3A^2B^2C^2\\
&+q^2ABC(A^2+C^2+C^2) + pr(A^3B^2+A^2B^3+A^3C^2+A^2C^3+B^3C^2+B^2C^3) + q^3ABC\\
&+r^2(A^3+B^3+C^3) - qr(A^3B+AB^3+A^3C+AC^3+B^3C+BC^3) - r^3\\
&+p^2qABC(AB+AC+BC) + pqr(A^2B+AB^2+A^2C+AC^2+B^2C+BC^2)\\
&-p^2r(A^2B^2+A^2C^2+B^2C^2) - q^2r(AB+AC+BC)\\
&-pq^2ABC(A+B+C) + qr^2(A+B+C)\\
&-pr^2(A^2+B^2+C^2) \qquad = 0
\end{aligned}$$

où il faut remarquer que :

$A + B + C = P$	d'une dimension de x
$AB+AC+BC = Q$	de deux dimensions
$ABC = R$	de trois dimensions.

XXIV. Pour les autres expressions on les trouvera formées des coëfficients P, Q, R en sorte :

$A^2 + B^2 + C^2 = P^2 - 2Q$ de 2 dimens.

$A^2B + AB^2 + A^2C + AC^2 + B^2C + BC^2 = PQ - 3R$ de 3 dimens.

$A^3 + B$

$$A^3 + B^3 + C^3 = P^3 - 3PQ + 3R \text{ de 3 dim.}$$
$$A^3B + AB^3 + A^3C + AC^3 + B^3C + BC^3 = P^2Q - PR - 2Q^2 \text{ de 4 dim.}$$
$$A^2B^2 + A^2C^2 + B^2C^2 = Q^2 - 2PR \text{ de 4 dim.}$$
$$A^3B^2 + A^2B^3 + A^3C^2 + A^2C^3 + B^3C^2 + B^2C^3 = PQ^2 - 2P^2R - QR \text{ de 5 dim.}$$
$$A^3B^3 + A^3C^3 + B^3C^3 = Q^3 - 3PQR + 3RR \text{ de 6 dim.}$$

d'où l'on voit clairement, puisque p, q, & r ſont des fonctions d'une, 2 & 3 dimenſions de x, que tous les termes renferment le même nombre de dimenſions de x, & que ce nombre eſt $= 9$, comme l'enoncé de la propoſition exige. Or cette ſubſtitution donnera l'equation ſuivante par l'elimination de la variable y:

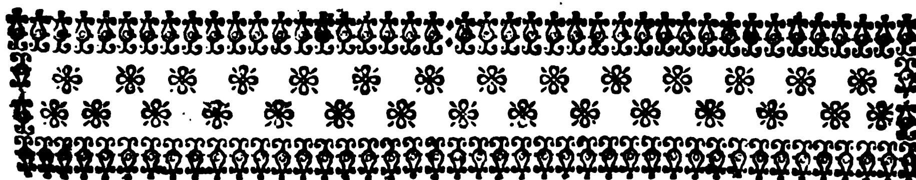
$$+R^3 - pQR^2 + qQ^2R - 2qPR^2 - rQ^3 + 3rPQR - 3rR^2$$
$$- r^3 + qr^2P - q^2rQ + 2pr^2Q + q^3R - 3pqrR + 3r^2R$$
$$+ p^2PR^2 - pqPQR + 3pqRR + prPQ^2 - 2prP^2R - prQR + q^2P^2R$$
$$- pr^2P^2 + pqrPQ - 3r^2PQ - pq^2PR + 2p^2rPR + qrPR - p^2rQ^2$$
$$+ rrP^3 - 2qqQR - qrP^2Q$$
$$- p^3R^2 + 2qrQQ + ppqQR = 0.$$

XXV, Cet exemple ſervira à nous convaincre en général, ſi les deux équations propoſées ſont:

$$y^m - Py^{m-1} + Qy^{m-2} - Ry^{m-3} + Sy^{m-4} \dots \pm V = 0$$
$$y^n - py^{n-1} + qy^{n-2} - ry^{n-3} + sy^{n-4} \dots \pm v = 0$$

où P & p ſont des fonctions d'une dimenſion de x; Q & q de deux: R & r de trois &c. & les derniers termes V de m dimenſions & v de n dimenſions: que le premier terme, que l'equation du §. XIX. réſultante par l'elimination fournit, ſera $A^n B^n C^n D^n$ &c. $= V^n$ & partant de mn dimenſions de x, & puiſqu'on voit auſſi clairement, que tous les autres termes pouvant être exprimés par les lettres P, Q, R &c. & p, q, r &c. doivent contenir le même nombre de dimenſions de x, il eſt inconteſtablement démontré, que l'equation, à laquelle on parvient par l'elimination de la lettre y, ſera de mn dimenſions de x: tout comme la propoſition générale avance.

SUITE



SUITE DES RECHERCHES SUR LE CALCUL INTEGRAL.

PAR M. D'ALEMBERT.

TROISIEME PARTIE.

DES DIFFERENTIELLES QUI SE RAPPORTENT A LA QUADRATURE DES LIGNES DU TROISIEME ORDRE.

PROBLEME I.



I.

Trouver l'integrale de $\frac{dx}{x^n \sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$, *n étant un nombre entier positif.*

Si on prend la difference de $x^{-q} \cdot \sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}$, on trouvera que cette difference est égale à la quantité suivante ;

$$\frac{dx}{2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}} \cdot \left(\begin{matrix} -2aqx^{-q-1} & -2bqx^{-q} & -2cqx^{-q+1} & -2fqx^{-q+2} \\ & +bx^{-q} & +2cx^{-q+1} & +3fx^{-q+2} \end{matrix}\right)$$

d'où il s'ensuit 1°. que si l'on fait $q = 1$, l'integrale de

$\frac{dx}{x^2 V(a+bx+cx^2+fx^3)}$ dépendra de celle de $\frac{dx}{xV(a+bx+cx^2+fx^3)}$, de celle de $\frac{dx}{V(a+bx+cx^2+fx^3)}$ & de celle de $\frac{xdx}{V(a+bx+cx^2+fx^3)}$. Or ces deux dernieres se rapportent à la rectification des sections coniques, comme nous l'avons fait voir dans la seconde partie: donc la differentielle $\frac{dx}{x^2 V(a+bx+cx^2+fx^3)}$ dépend de la rectification des sections coniques, & de l'intégration de $\frac{dx}{xV(a+bx+cx^2+fx^3)}$

2°. On prouvera de la même maniére, en faisant $q=2$, que $\frac{dx}{x^3 V(a+bx+cx^2+fx^3)}$ dépendra de $\frac{dx}{x^2 V(a+bx+cx^2+fx^3)}$, de $\frac{dx}{xV(a+bx+cx^2+fx^3)}$ & de $\frac{dx}{V(a+bx+cx^2+fx^3)}$; d'où il s'ensuit qu'elle dependra des sections coniques, & de la differentielle $\frac{dx}{xV(a+bx+cx^2+fx^3)}$; & parconséquent il est facile de voir qu'en général $\frac{dx}{x^n V(a+bx+cx^2+fx^3)}$ dépend de la rectification des sections coniques, & de la differentielle $\frac{dx}{xV(a+bx+cx^2+fx^3)}$. Or cette derniére differentielle ne peut se réduire, du moins par la methode présente, à la rectification des sections coniques, parcequ'en faisant $q=0$, on a $2aqx^{-q-1}=0$. Nous enseignerons dans le probleme suivant, laquelle est la quadrature la plus simple à laquelle elle paroisse pouvoir se réduire.

CO-

COROLL. I.

II. Au reste il est bon de remarquer qu'il y a des cas où la differentielle $\frac{dx}{x^n\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ se rapporte uniquement à la rectification des sections coniques. Ce sont les cas, où les coëfficients $a, b, c, f,$ & l'exposant n sont tels, que le coëfficient qui affecte $\frac{dx}{x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ est $=o$. Par exemple $\frac{dx}{x^3\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ dépend de la rectification des sections coniques, & des intégrales de $\frac{3bdx}{-2ax^2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ & de $\frac{3cdx}{-2ax\sqrt{(a+bx^2+cx^2+fx^3)}}$; or l'intégrale de $\frac{dx}{x^2\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$ dépend de la rectification des sections coniques, & de $\frac{bdx}{-2ax\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$, donc l'integrale cherchée dépend de la rectification des sections coniques, & de $\left(\frac{3bb}{4aa}-\frac{3c}{2a}\right)\cdot\frac{dx}{x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$. D'où il s'ensuit que la differentielle proposée est absolument dépendante de la rectification des sections coniques, si $bb=2ca$.

On verra de même que $\frac{dx}{x^2\sqrt{(a+cx^2+fx^3)}}$ dépend de la rectification des sections coniques, parceque $b=o$, & ainsi des autres.

COROLL. II.

III. Si b & $c=o$, c'est à dire si la differentielle proposée est $\frac{dx}{x^n\sqrt{(a+fx^3)}}$; En ce cas elle se réduira toujours à la rectification

des sections coniques. Car $\frac{dx}{xV(a+fx^3)}$ se change en une fraction rationelle, en faisant $x^3 = u$ & $a+fu = z$; d'où il s'ensuit qu'elle s'integre, ou par des arcs de cercle, ou par les logarithmes, c'est à dire, par des arcs de cercle, ou de parabole. Donc &c.

COROLL. III.

IV. De là il s'ensuit que la differentielle $x^{\pm p} dx. (a+bxx)^{\pm \frac{n}{3}}$, dans laquelle p & n répréſentent des nombres entiers quelconques, se rapporte toujours à la rectification des sections coniques: car si on fait $a+bxx = z^3$, on aura une transformée de cette forme $z^{\pm q} dz (e+gz^3)^{\pm \frac{r}{2}}$, q & r marquant des nombres entiers positifs. Or cette derniere quantité se rapporte à la rectification des sections coniques, car 1°. si on a $+\frac{r}{2}$, on multipliera le haut & le bas par $V(e+gz^3)$ & on aura une transformée, dont les differens termes seront de la forme $\frac{z^{\pm k} dz}{V(e+gz^3)}$, & par conséquent se rapportent à la rectification des sections coniques. 2°. Si on a $-\frac{r}{2}$, on pourra toujours réduire l'integration de la differentielle proposée à celle de $\frac{z^{\pm k} dz}{V(e+gz^3)}$. Car la differentielle de $\frac{z^s}{(e+gz^3)^{\frac{m}{2}}}$ est

$$\frac{s z^{s-1} dz}{(e+gz^3)^{\frac{m}{2}}} - \frac{3mgz^{s+2} dz}{2(e+gz^3)^{\frac{m+2}{2}}};$$ d'où l'on voit qu'en général

l'inte-

l'intégration de $z^{\pm q}\, dz\, (e + gz^3)^{-\frac{r}{2}}$ dépend de celle de $z^{\pm q - 3} dz\, (e + gz^3)^{\frac{-r+1}{2}}$ & ainsi de suite, & que par conséquent l'intégration de la differentielle proposée se réduit à celle de $\frac{z^{\pm k}\, dz}{\sqrt{(e+gz^3)}}$. Or comme cette derniére se réduit à la rectification des sections coniques, il s'ensuit &c.

COROLL. IV.

V. De ce que $z^{\pm q}\, dz\, (e + gz^s)^{\frac{+r}{2}}$ se réduit à la rectification des sections coniques, il s'ensuit, en faisant $z = u^{-1}$, que $u^{\frac{+n}{2}} du\, (m + pu^3)^{\frac{+r}{2}}$ s'y réduit aussi, n & r étant des nombres positifs & entiers.

COROLL. V.

VI. Il est donc evident, tant par ce que nous avons dit dans la seconde partie, que par les Coroll. precedens, qu'en général $z^q dz\, (e + gz^m)^n$ se réduit à la rectification des sections coniques, m étant $= 2$ ou $= 3$; q étant égale à la moitié d'un nombre entier positif ou negatif, & n étant égale à la moitié d'un nombre entier positif ou negatif, ou même encore au tiers d'un nombre entier positif ou negatif, lorsque $m = 2$. Ou enfin, lorsqu'on a $m = 2$; $q =$ à un nombre entier positif ou negatif, & $n =$ au quart d'un nombre entier positif ou negatif. Or soit proposé d'integrer $z^p dz (a + bz^r)^s$, & soit fait $a + bz^r = u^t$, on aura pour transformée une quantité de cette forme $u^{ts + t - 1} du\, (f + gu^t)^{\frac{p+1-r}{r}}$; d'où il

s'ensuit

s'ensuit que la proposée est réductible à des arcs de sections coniques 1o. si $s=2$, $2s+1=\pm\frac{n}{2}$ & $\frac{p+1-r}{r}=\pm\frac{q}{2}$ ou $\pm\frac{q}{3}$ n & q exprimant des nombres entiers. 2°. si $s=3$, $3s+2=\pm\frac{n}{2}$ & $\frac{p+1-r}{r}=\pm\frac{q}{2}$. 3°. si $s=2$, $2s+1=\pm n$, & $\frac{p+1-r}{r}$ $=\pm\frac{q}{4}$.

Probleme II.

VII. *Trouver l'intégrale de* $\frac{dx}{x\sqrt{(a+bx+cx^2+fx^3)}}$.

On commencera par supposer $x=u^{-1}$, ce qui donnera pour transformée $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$. Or je dis que l'intégration de cette derniére differentielle dépend de celle de $\frac{du\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$ qui est l'élément d'un espace curviligne du 3e ordre, dont l'équation feroit $uyy=k+lu+mu^2+nu^3$. Pour le démontrer, je suppose, qu'on ait à integrer $\frac{du\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$; je mets d'abord cette quantité sous la forme suivante $\frac{kdu}{\sqrt{u}.\ \sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}+\frac{ldu\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}+\frac{mudu\sqrt{u}+nu^2du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$, or de ces trois quantités la premiére se rapporte à des arcs de sections coniques, en faisant $u=z^{-1}$. De plus on trouvera que

nu

$$\frac{nu^2 du\sqrt{u}+mu\,du\sqrt{u}+l\,du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}=d\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{2}\right)$$

$$+\frac{l\,du\sqrt{u}}{2\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}+\frac{m}{4n}\cdot d(u^{-\frac{1}{2}}\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)})$$

$$-\frac{mm\,du\sqrt{u}}{8n\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}+\frac{m}{4n}\cdot\frac{k\,du.u^{-\frac{3}{2}}-\frac{knu}{m}^{-\frac{1}{2}}du}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}.$$

Or en faisant $u=z^{-1}$, on verra facilement que $\frac{k\,du.u^{-\frac{3}{2}}-\frac{knu}{m}^{-\frac{1}{2}}du}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ se rapporte à des arcs de sections coniques, d'où il s'ensuit que la differentielle $\frac{du\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$ dépend de la rectification des sections coniques, & de $\left(\frac{l}{2}-\frac{mm}{8n}\right)\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$. Donc réciproquement $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ dépend de $\frac{du\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

REMARQUE Iere.

VIII. Il n'y a qu'un seul cas où la demonstration précedente puisse souffrir quelque difficulté, c'est celuy ou $\frac{l}{2}$ sera égal à $\frac{mm}{8n}$; car alors les deux differentielles $\frac{d\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}}$ &

du

$\dfrac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ ne dépendroient plus l'une de l'autre. Je feray voir dans la suite, qu'en ce cas, l'une & l'autre differentielle se rapporte à la rectification des sections coniques ; mais je me contenteray de faire voir pour le présent, que la differentielle $\dfrac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ peut se réduire à une autre qui dépende de la quadrature d'une courbe du 3e ordre. Pour le démontrer, soient $au+b$, $cu+e$, $gu+f$, les trois racines de $k+lu+mu^2+nu^3$, dont deux peuvent être imaginaires ; la condition de $4ln = mm$, donnera $2baecgg+2bfccag+2faacge = bbccgg+aaeegg+ffaacc$. Faisons maintenant $au+b=x$, la differentielle proposée se changera en

$$\frac{xdx-bdx}{\sqrt{a}.\sqrt{x}.\sqrt{(x-b)}.\left(\frac{cx-cb+ae}{a}\right).\left(\frac{gx-gb+af}{a}\right).}$$

Or la seconde partie

$$\frac{-bdx}{\sqrt{x}\sqrt{(ax-ab.)}\ \sqrt{\left(\frac{cx-cb+ae}{a}\right)}-\left(\frac{gx-gb+af}{a}\right)},$$

s'integre par des arcs de sections coniques, en faisant $x=z^{-1}$: à l'égard de la premiére partie, elle s'integrera par le Probleme précedent, pourvu que $3ccggbb-2baecgg-2afccbg$ ne soit point $=aaeegg-2aaegfc+aaffcc$. Or cette équation ètant combinée avec l'équation $2baecgg+2bfccag+2faacge = bbccqq+aaeegg+ffaacc$ donne $ccggbb-aebcgg-bccagf=o$. d'où l'on tire $cbg=o$, ou $cgb-aeg-acf=o$ dans le 1er. cas on aura $k=o$ ou $n=o$, & la differentielle proposée se reduira à des logarithmes ou à des arcs de cercle, ou à des arcs de

sections

fections coniques; dans le fecond cas on aura $cgb = aeg + acf$ & $ggccbb + aaeegg + aaccff = 2ggbcae + 2ccafgb - 2aaegcf$; & cette équation étant combinée avec la premiére équation, qui réfulte de la condition $4ln = mm$, on aura $aaegcf = o$; donc a ou g ou e, ou c, ou $f = o$, & par conféquent on a encore $k = o$ ou $n = o$ & la propofée fe réduit à des logarithmes, ou à des arcs de cercle, ou à des arcs de fections coniques. Donc fi $4ln = mm$, on pourra toujours réduire la differentielle propofée à la quadrature d'une courbe du 3. ordre, à moins que $3ccggbb - 2baecgg - 2faccbg$ ne foit $= aaeegg - 2aaeefc + aaffcc$, auquel cas elle s'integrera par des arcs de fections coniques, c'eft à dire par des arcs, de cercle, ou de parabole, ou d'ellipfe, ou d'hyperbole.

REMARQUE II.

IX. Je n'ai pu parvenir jusqu'à préfent à m'affurer, fi la differentielle $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ pouvoit en général fe réduire à des arcs de fections coniques; mais j'ai trouvé un trés grand nombre de cas où elle peut en effet s'y réduire, & je crois qu'il ne fera pas inutile d'en parler icy.

En prémier lieu, je dis que fi $4ln = mm$, la differentielle eft toujours réductible à des arcs de fections coniques. Pour le démontrer, je remarque que fuivant les calculs de l'art. 7 on a

$\int\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ egal à une fraction dont le denominateur eft $\frac{mm}{8n} - \frac{l}{2}$ & dont le numerateur eft

$$\frac{\int du\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}} + V' + \int\frac{\left(k - \frac{kn}{4m}\right)u^{-\frac{1}{2}}du + \frac{kmu^{-\frac{3}{2}}}{4n}du}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$$

V' marquant une fonction finie de n, & lorsque $mm = 4ln$, le nu-

 merateur

merateur & le denominateur de cette fraction deviennent égaux à zero. Il faut donc pour avoir alors la valeur de cette fraction, en differentier le haut & le bas suivant les regles connuës, en faisant varier une des quantités l, m, n, à volonté, par exemple l & faisant tout le reste constant. Or en faisant cette differentiation, ou aura suivant les regles connuës des Geometres, la difference de $\frac{mm}{8n} - \frac{l}{2} = -\frac{dl}{2}$ celle de $\int \frac{du\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}{\sqrt{u}} = dl \int \frac{du\sqrt{u}}{2\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ celle de $V' = V''\, dl$, V'' exprimant une fonction finie de u, & enfin celle du terme suivant $= -\frac{dl}{2} \int \frac{\frac{3k}{4} u^{\frac{1}{2}} du + \frac{km}{4n} u^{-\frac{1}{2}} du}{(k+lu+mu^2+nu^3)^{\frac{3}{2}}}$ laquelle se réduira aisément à des arcs de sections coniques en faisant $u = z^{-1}$. On aura donc

$$\int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} = \frac{\Phi\, dl + dl \int \frac{du\sqrt{u}}{2\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}}{-\frac{dl}{2}},$$

Φ étant une quantité en partie integrable, & en partie réductible à des arcs de sections coniques donc $\int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}} = -\frac{\Phi}{2}$ donc &c. Ce *q. f.* D.

RE-

Remarque III.

X. Nous avons fait voir dans l'art. 8 que la differentielle $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ ou $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(au+b)}.\sqrt{(cu+e)(gu+f)}}$ se réduisoit à la differentielle

$$\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(ax-ab)}.\sqrt{\left(\frac{cx-cb+ae}{a}\right)\left(\frac{gx-gb+af}{a}\right)}}.$$

Or la Iere differentielle est réductible à des arcs de sections coniques (art. 8 & 9) lorsque $2baecgg+2bfccag+2faacge=bbccgg+aaeegg+aaffcc$ ..... (A). Donc si on fait $-ab=b'$, $\frac{c}{a}=c'$, $-\frac{cb+ae}{a}=e'$, $\frac{g}{a}=e'$, $\frac{-gb+af}{a}=f'$, la II^de.^ & la Iere, differentielle se réduiront à des arcs de sections coniques, toutes les fois que $2b'a'e'c'g'g'+2b'f'c'c'a'g'+2f'a'a'c'g'e'=b'b'c'c'g'g'+a'a'e'e'g'g'+a'a'f'f'c'c'$; c'est à dire toutes les fois que $2baecgg+2aecgg+2afbccg-2aaeegfc$ sera $=3ccbbgg-aaeegg-aaffcc$.

De plus on a vu cy-dessus que $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+nu^3)}}$ étoit toujours réductible à des arcs de sections coniques ; d'où il s'ensuit que chacune des deux differentielles precedentes est réductible à des arcs de sections coniques toutes les fois que l'on a $-3cbg+aeg+afc=0$ & $-3bbcg-2aebg-2afcb+aafe=0$; ou $-3c'b'g'+a'e'g'+a'e'g'+a'f'c'=0$ & $-3b'b'c'g'-2a'e'b'g'-2a'f'c'b'+a'a'f'e'=0$.

Remarque IV.

XI. On peut encore trouver beaucoup d'autres cas, où la differentielle $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(au+b)}\sqrt{(cu+e)(gu+f)}}$ est réductible à

des

des arcs de sections coniques. Pour les déterminer, je me propose, au lieu de cette differentielle, celle-cy qui revient au même (art. 7)
$\frac{dx\sqrt{x}}{x\sqrt{(mx+n)}.\sqrt{(a+bx+cxx)}}$, & que j'ecris ainsy

$$\frac{-m\,dx}{n\sqrt{(mx+n)}.\sqrt{(a+bx+cxx)}}+\frac{\sqrt{(mx+n)}.\,dx}{nx.\sqrt{(a+bx+cxx)}}$$

& dont la premiére partie s'integre par des arcs de sections coniques. Pour integrer la seconde, je fais $\frac{mx+n}{(a+bx+cxx)}=\frac{1}{Bz+\frac{a}{n}}$; je tire de cette équation $x=-\frac{b}{2c}+\frac{am}{2nc}$

$$+\frac{Bmz}{2c}\pm\sqrt{\frac{(nb-am)^2}{4nncc}+\frac{Bmz(am-bn)}{2ncc}+\frac{BBmmzz}{4cc}};$$
$$+\frac{nBz}{c}$$

substituant une de ces valeurs de x dans la difference proposée, & multipliant le haut & le bas de la fraction par l'autre valeur de x, on aura une transformée, dont une partie des termes s'integrera par des arcs de sections coniques, & l'autre se réduira à l'integration de la differentielle suivante

$$\frac{(bn-am)\,dz}{\frac{nBz}{c}\sqrt{(Bz+\frac{a}{n})}\sqrt{\frac{(bn-am)^2+2Bmnz(am-bn)+4n^3cBz+BBmmnnzz}{4nncc}}}.$$

Je suppose pour abreger $B=m'$, $\frac{a}{n}=n'$, $\frac{(bn-am)^2}{4nncc}=a'$,
$\frac{2mm'n(am-bn)+4n^3cm'}{4nncc}=b'$, $\frac{m'm'mmnn}{4nncc}=c'$; & il

est

eſt evident que la differentielle propoſée $\frac{dx}{x\sqrt{(mx+n)}.\sqrt{(a+bx+cxx)}}$ ſe réduira à la differentielle $\frac{dz}{z\sqrt{(m'z+n')}.\sqrt{(a'+b'z+c'zz)}}$.

De même en faiſant $\frac{a'}{n'} = n''$, $\frac{(b'n'-a'm')^2}{4n'n'c'c'} = a'$ &c. cette derniére differentielle ſe reduira à la differentielle $\frac{dz}{z\sqrt{(m''z+n'')}.\sqrt{(a''+b''z+c''zz)}}$; & ainſy de ſuite; d'où il réſulte que la differentielle propoſée ſera intégrable par des arcs de ſections coniques, toutes les fois qu'une des differentielles transformées le ſera.

Or I°. les differentielles transformées ſeront réductibles à des arcs de ſections coniques, toutes les fois que a', a'', a''' &c. ſeront égaux à zero. Ainſy pour avoir les cas où la propoſée eſt réductible à des arcs de ſections coniques, il faut d'abord ſuppoſer $a' = o$, c'eſt à dire $bn - am = n$, enſuite $b'n' - a'm' = o$, & ſubſtituer dans cette derniére équation les valeurs de b', n', a', m' en m, n, a, b, c, ce qui donnera une nouvelle équation : pour en avoir une troiſiéme, en ſubſtituant dans cette derniére m', ou ſa valeur à la place de m, n' à la place de n, a' à la place de a &c. Ainſy pour avoir en général toutes les équations que ce cas peut fournir, il faudra prendre pour premiére équation $a = o$; d'où l'on tirera une ſeconde équation en mettant $(bn - am)^2$ au lieu de a; & cette ſeconde en donnera un troiſiéme, en y ſubſtituant $(bn - am)^2$ au lieu de a, $\frac{a}{n}$ au lieu de n, m' à la place de m (& cette derniére quantité diſparoitra toujours) $m'm'mmnn$ à la place de c & $2m'mn(am - bn) + 4nncm'$ à la place de b. &c.

II°. La differentielle transformée $\frac{dz}{z\sqrt{(zm'+n')}.\sqrt{(a'+b'z+c'zz)}}$

eſt réductible à des arcs de ſections coniques, lorſque le produit de $m' z + n'$ par $a' + b' z + c' zz$ n'a que deux termes $A + Bz^3$ ce qui donne deux équations entre les coëfficiens m', n', a', b', c', & ces deux équations en donneront pluſieurs autres, en ſubſtituant au lieu de m', n', a', b', c', leurs valeurs, comme on a fait dans l'art. precedent.

III°. La transformée eſt integrable par des logarithmes, ou des arcs de cercle, lorſque le produit de $m' z + n'$ par $a' + b' z + c' zz$ a deux racines égales, & cette condition fournit encore de nouvelles équations.

IV°. Enfin ſi ou fait $z = u^{-1}$ on trouvera encore (art. 10) d'autres cas où la transformée ſera integrable, & d'où l'on tirera encore des équations de condition entre les coëfficiens a, b, c &c.

Remarque V.

XII. Reciproquement, ſi la differentielle propoſée eſt integrable par des arcs de ſections coniques, toutes ſes transformées le ſeront auſſy; de ſorte que ſi on a une differentielle $\frac{dx}{x\sqrt{(Mx+N)}.\sqrt{(A+Bx+Cxx)}}$, & qu'on faſſe $\frac{a}{n} = N$, $\frac{(bn-am)^2}{4n^2c^2} = A$, $\frac{2mMn(am-bn)+4n^3cM}{4n^2c^2} = B$, $\frac{m^2M^2n^2}{4n^2c^2} = C$, l'integration de la differentielle propoſée ſe reduira à celle de la differentielle $\frac{dx}{x\sqrt{(mx+n)}.\sqrt{(a+bx+cxx)}}$ c'eſt à dire de la differentielle

$$\frac{dx}{x\sqrt{\left(n\frac{+2nx\sqrt{C}.}{B-2\sqrt{CA}}\right)}\sqrt{\left(nN+2nx\sqrt{C}\left(\frac{N\sqrt{C}+M\sqrt{A}}{B-2\sqrt{CA}}\right)+\frac{nMxx}{B-2\sqrt{CA}}\right)}}$$

ainſy la differentielle propoſée ſera integrable toutes les fois que cette dernière

dernière le sera ; ce qui donnera encore de nouvelles équations de condition entre les coëfficiens A, B, C, M, N ; & chacune de ces équations en donnera plusieurs autres, en substituant successivement n à la place de N, $\frac{2n\sqrt{C}}{B-2\sqrt{CA}}$ à la place de M, n N à la place de A &c.

REMARQUE VI.

XIII. On voit par là qu'en combinant ensemble les differentes transformations dont la differentielle $\frac{dx}{x\sqrt{(mx+n)}.\sqrt{(a+bx+xx)}}$ est susceptible, & les differens cas dans lesquels cette differentielle ou ses trans formées sont réductibles à des arcs de sections coniques, on trouvera un grand nombre d'équations de condition entre les coëfficiens a, b, c, m, n ; qui rendront la differentielle integrable par des arcs de sections coniques ; & si la proposée étoit donnée sous la forme $\frac{dx}{x\sqrt{(p+qx+rxx+sx^3)}}$. Il faudroit mettre dans les équations de condition, au lieu de m, n, a, &c. leurs valeurs en p, q, r, &c. qu'on trouveroit facilement. Mais en voilà assés sur cette recherche, que je laisse à d'autres à pousser plus loin.

REMARQUE VII.

14. De plus si $a \pm bx + cxx$ a ses racines imaginaires, ce qui n'arrivera que quand a & c seront positifs & que bb sera $< 4ac$ on pourra toujours transformer la differentielle proposée en d'autres de même forme, & dans les quelles les racines du binome seront réelles. Pour cela il suffira de supposer $x \pm \frac{b}{2c} = z$ & $z + \sqrt{(zz + \frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc})} = t$; ou (si on a $- bx$ & que $\frac{b}{2c}$ soit $> x$) $\frac{b}{2c} - x = z$

&$\sqrt{(zz}$

& $V(zz + \frac{a}{c} - \frac{bb}{4cc}) - z = u$. Ainsy quand je diray dans la suite qu'une differentielle est réductible à la quadrature des courbes du III. ordre, j'entendray toujours les courbes qui ont pour équation $xyy = p + qx + rx^2 + sx^3$, le second membre ayant toutes ses racines réelles.

PROBLEME III.

XV. *Trouver l'intégrale de* $(Kx+c)^{p} . (f+gx)^{\frac{n}{2}} dx(a+bx+cxx)^{\frac{m}{2}}$ p, n, m, *exprimant des nombres entiers positifs ou negatifs.*

I. Si p est un nombre entier negatif, on pourra toujours (en faisant $f + gx = z$) changer la proposée en une quantité dont chaque terme aura cette forme $\frac{qz^{k}dz}{(hz+e)^{p} . z^{\frac{r}{2}}(a+\beta z+\delta zz)^{\frac{s}{2}}}$;

on divisera z^{k} par $(hz+e)^{p}$ tant que cela se pourra faire, & chacune des parties du quotient etant multipliée par $\frac{dz}{z^{\frac{r}{2}}(a+\beta x+\delta zz)^{\frac{s}{2}}}$

s'integrera par des arcs de sections coniques.

II. Lors qu'on sera enfin parvenu à avoir $k < p$, on commencera par mettre la quantité restante sous cette forme,

$\frac{qz^{k} . z^{\frac{s}{2}}dz}{(hz+e)^{p} . z^{\frac{r+s}{2}}(a+\beta z+\delta zz)^{\frac{s}{2}}}$ & ensuite sous celle-cy

$$\frac{Pdz . z^{\frac{s}{2}}}{(hz+e)^{p}(a+\beta z+\delta zz)^{\frac{s}{2}}} + \frac{Qdz . z^{\frac{s}{2}}}{z^{\frac{r+s}{2}}(a+\beta z+\delta zz)^{\frac{s}{2}}}$$

P & Q

P & Q etant des fonctions de z, rationelles & sans diviseur. Cela posé, on remarquera que la IIde. de ces deux quantités s'integre par des arcs de sections coniques, à l'egard de la Iere, on supposera

$\frac{z}{a + bz + dzz} = \frac{1}{y}$ d'où l'on tire $z = Ay + B \pm \sqrt{(G + (Ay + B)^2}$ (& $bz + e = bAy + bB + e \pm b\sqrt{G + (Ay + B)^2}$). substituant ces valeurs, & multipliant le haut & le bas de tous les termes par $bAy + bB + e \mp b\sqrt{(G + (Ay + B)^2)}$ on aura une transformée, dont les termes les plus difficiles à integrer seront de cette forme $\frac{y^{\pm\frac{n}{2}}\, dy}{(Ky + H)^p \sqrt{(M + Ny + Ryy)}}$, qu'on peut toujours réduire à la forme $\frac{u^{\frac{q}{2}}\, du}{(Pu + L)^p \sqrt{(D + Fu + Gu)^2}}$, q étant un nombre entier positif, parceque si n est negatif, il n'y a qu'à faire $y = u^{-1}$ & qu'on aura pour transformée

$$\frac{R\, u^{\frac{n}{2} - 1 + p}\, du}{(Pu + L)^p \sqrt{(D + Fu + Gu)^2}}.$$

Pour trouver maintenant l'integrale de

$\frac{y^{\frac{n}{2}}\, dy}{(Ky + H)^p \sqrt{(M + Ny + Ryy)}}$, n & p étant des nombres entiers positifs, je suppose $Ky + H = t$ pour avoir une transformée de cette

cette forme, $\frac{dt.(\gamma t+\varepsilon)^{\frac{n}{2}}}{t^p V(\mu+\nu t+\omega tt)}$ qui pourra encore être développée en differens termes de la forme $\frac{t^{\pm q} dt V(\gamma t+\varepsilon)}{V(\mu+\nu t+\omega tt)}$.

Or I°. si on a t^q, l'integrale n'a aucune difficulté, & se réduit à des arcs de sections coniques. II°. Si q est negatif, on multipliera le haut & le bas par $V(\gamma t+\varepsilon)$ pour avoir deux differentielles de cette forme, $\frac{dt}{t^k V(a+bt+ct^2+t^3)}$ qui (art. 1. & suiv.) se réduiront à la quadrature d'une courbe du IIIe. ordre.

Coroll. I.

XVI. Donc le produit de $(f+gx)^{\frac{n}{2}} dx.(a+bx+cxx)^{\frac{m}{2}}$ (n & m étant des nombres entiers positifs ou negatifs) par une fonction rationelle quelconque de x, pourra s'integrer par le Problême precedent, pourvuque l'on puisse partager le dénominateur de la fonction (si elle est une fraction) en des quantités simples $(x+b)^p$, p étant un nombre entier quelconque, c'est à dire, pourvu que le denominateur de la fonction, s'il y en a un, ait toutes ses racines réelles.

Coroll. II.

XVII. Donc on pourra integrer encore par le Probleme precedent le produit de $dx(e+fx)^{\frac{n}{2}}.(g+kx)^{\frac{m}{2}}.(a+bx+cxx)^{\frac{s}{2}}$ par une fonction rationelle de x, qui ait les conditions marquées dans l'art. 16. Pour le bien voir, il n'y a qu'à écrire $(g+kx)^{\frac{m+n}{2}}$

(e+f

$\left(\frac{e+fx}{g+kx}\right)^{\frac{n}{1}}$ au lieu de $(e+fx)^{\frac{n}{1}}$ $(g+fx)^{\frac{m}{1}}$ & ſuppoſer en ſuite $\frac{e+fx}{g+kx}=z.$

COROLL. III.

XVIII. Le produit d'une fonction rationelle de x, qui ait toujours les mémes conditions, par $dx\ (a+bx+cxx)^{\pm\frac{m}{1}}$. $(e+fx+gxx)^{\pm\frac{n}{1}}$ peut toujours ſe développer en divers termes de cette forme

$$\frac{Kx^{q}dx}{(lx+n)^{r}(a+bx+cxx)^{\frac{q+s}{2}}\left(\frac{a+fx+gxx}{a+bx+cxx}\right)^{\frac{s}{1}}}=\frac{Qdx}{(lx+n)^{r}\left(\frac{e+fx+gxx}{a+bx+cxx}\right)^{\frac{s}{1}}}$$

$$+\frac{Pdx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q+s}{2}}\left(\frac{e+fx+gxx}{a+bx+cxx}\right)^{\frac{s}{1}}},$$ P & Q etant des fonctions de x rationnelles & ſans diviſeur.

Or ſi on fait $\frac{c+fx+gxx}{a+bx+cxx}=\varphi+\frac{gx+\delta}{a+bx+cxx}=\varphi+\frac{1}{z}$, qu'on tire de la deux valeurs de x en z, & qu' aprés avoir ſubſtitué l'une de ces valeurs dans la differentielle donnée, on multiplie le haur & le bas par les valeurs de $(lx+n)^{r}$ & de $(a+bx+cxx)$ ou $(\gamma x+\delta)\ z$ qui réſulteroient de l'autre valeur de x, on aura une tranſformée, dont les differentes parties ſeront intégrables par le Corol. precedent.

REMARQUE I.

XIX. Il est presque inutile d'avertir qu'il y aura des cas, où par la destruction mutuelle des coëfficiens, les differentielles se reduiront à des arcs de sections coniques. On peut même démontrer qu'elles s'y réduiront toujours, lorsque la differentielle proposée sera $\frac{dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q}{2}}.(e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$; & comme la démonstration que nous avons à en donner, est assés singuliére, nous croyons devoir l'exposer icy avec quelque etenduë. Supposons d'abord que l'un des deux facteurs du dénominateur, par exemple $(a+bx+cxx)$ ait ses racines réelles, comme $mx+n$, $rx+p$, il est certain qu'en faisant $mx+n=z$ & $z=u^{-1}$, la differentielle proposée se changera en une autre de cette forme $\frac{u^{q+s-2}\,du}{(Au+B)^{\frac{q}{2}}(C+Du+Euu)^{\frac{s}{2}}}$ qui sera réductible à des arcs de sections coniques.

Or si l'on fait $\frac{e+fx+gxx}{a+bx+cxx}=\varphi+\frac{\gamma x+\delta}{a+bx+cxx}$ $=\varphi+\frac{1}{z}=\varphi+\frac{u}{m}$ on verra facilement par la methode du Corol. précedent que la differentielle proposée se réduira à l'integration de la differentielle

$$\frac{du}{uV\left(\varphi\ \frac{u}{m}\right)V\left(\frac{\gamma^2\ m^2}{bb-4ac}+\frac{4c\delta mu-2b\gamma m\,nu}{bb-4ac}+u^2\right)}$$

ou à la rectification des sections coniques, si le coëfficient qui doit affecter cette derniere differentielle, est $=o$.

Cela

Cela posé, I°. si ce coëfficient est égal à zero, il le sera toujours, soit que $a + bx + cxx$ ait ses racines réelles, ou non: car la condition que $a + bx + cxx$ ait ses racines réelles, n'emporte aucune équation entre les coëfficiens a, b, c, mais seulement la condition que $bb > 4ac$, donc si le coëfficient est $= o$ dans le cas des racines réelles, cela ne vient point de ce que les coëfficiens ont entr'eux un certain rapport, mais de ce qu'ils se détruisent mutuellement dans le coëfficient. Donc ils se detruiront également, quand $a + bx + cxx$ aura ses racines imaginaires: donc la differentielle proposée sera integrable dans ce Ier. cas par des arcs de sections coniques, soit que les racines de $a + bx + cxx$ soient réelles, ou non.

II°. Si le coëfficient de la differentielle n'est pas $= o$, alors il sera toujours possible de réduire la differentielle ....

$$\frac{du}{uV(\varphi + \frac{u}{m}) . V(\frac{\gamma^2 m^2}{bb - 4ac} + \frac{4c\delta mu - 2b\gamma mu}{bb - 4ac} + m^2)}$$

à la rectification des sections coniques, & à l'integration de la differentielle ... $\frac{dx}{(a + bx + cxx)^{\frac{q}{2}} . (e + fx + gxx)^{\frac{s}{2}}}$, $a + bx + cxx$ ayant ses racines réelles, c'est à dire, qu'on pourra toujours réduire à la rectification des sections coniques toute differentielle

$$\frac{du}{uV(\varphi + \frac{u}{m}) . V(\alpha + \beta u + uu)}$$

, α etant positif. [Il n'y auroit qu'un cas qui pût faire de la difficulté; ce seroit celuy où le coëfficient de la differentielle

$$\frac{du}{uV(\varphi + \frac{u}{m}) . V(\frac{\gamma^2 m^2}{bb - 4ac} + \frac{4c\delta mu - 2b\gamma mu}{bb - 4ac} + u^2)}$$

seroit égal à zero, en vertu d'un certain rapport entre les coëfficiens a, b, c, γ, δ:

γ, δ: mais alors on prouveroit que la differentielle se réduiroit encore à des arcs de sections coniques, par une methode parfaitement semblable à celle par laquelle on a prouvé dans l'art. 9. cy-dessus que $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(k+lu+mu^2+nu^3)}}$ se réduisoit à des arcs de sections coniques, lorsque $4ln = mm$.]

III. Si la differentielle étoit $\frac{du}{u\sqrt{(\Phi+\frac{u}{m})}.\sqrt{(\pm A+Bu-uu)}}$

on commenceroit par supposer cette differentielle

$$= -\frac{du}{m\Phi\sqrt{(\Phi+\frac{u}{m})}.\sqrt{(-A+Bu-uu)}} + \frac{du\sqrt{(\Phi+\frac{u}{m})}}{\Phi u\sqrt{(-A+Bu-u^2}};$$

dont la Ire. partie s'integre par des arcs de sections coniques, & dont la II^{de}. se réduit (en faisant $\frac{\Phi+\frac{u}{m}}{\pm A+Bu-u^2} = \frac{1}{Bz\pm\frac{A}{\Phi}}$) à des arcs de sections coniques, & à l'integration de la differentielle

$\frac{dz}{z\sqrt{(Bz+\frac{A}{\Phi})}.\sqrt{(\alpha+\beta z+zz)}}$, α étant une quantité positive

(art. 11). Or cette derniere differentielle se réduit (n. 2. art. pres.) à des arcs de sections coniques. Donc la differentielle

$\frac{du}{u\sqrt{(\Phi+\frac{u}{m})}.\sqrt{(\pm A+Bu-uu)}}$ s'y réduira aussy.

IV. Or lorsque $a+bx+cxx$ a ses racines imaginaires, c'est à dire, lorsque $bb < 4ac$, la differentielle

dx

$$\frac{dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q}{2}}.\,(e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$$ se réduit à la differentielle

$$\frac{du}{u\sqrt{(\varphi+\frac{u}{m})}.\,\sqrt{(\frac{\gamma^2\ m^2}{4ac-bb}-\frac{2b\gamma mu+4c\delta mu}{4ac-bb}-u^2)}}$$

c'est à dire $\frac{du}{u\sqrt{(\varphi+\frac{u}{m})}.\,\sqrt{(\pm A+Bu-u^2)}}$. Donc la differentielle proposée se réduira à des arcs de sections coniques, même dans le cas ou $a+bx+cxx$ aura ses racines imaginaires. C.*q.f.*D.

REMARQUE II.

XX. Nous avons fait voir dans la seconde partie que lorsque $a+bx+cxx$ a ses racines réelles, la differentielle

$$\frac{(lx+n)^p\,dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q}{2}}(e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$$ se réduit à des arcs de sections coniques, pourvuque $q+s-2-p$ ne soit pas $<o$. Or on prouvera de la même maniére que dans l'article precedent, que cette même differentielle se reduit à des arcs de sections coniques, lorsque $a+bx+cxx$ a ses racines imaginaires.

REMARQUE III.

XXI. De plus, il est bon d'observer que si le coëfficient qui affecte la differentielle

$$\frac{du}{u\sqrt{(\varphi+\frac{u}{m})}.\,\sqrt{(\frac{\gamma^2\ m^2}{bb-4ac}+\frac{4c\delta mu-2b\gamma mu}{bb-4ac}+u^2)}}$$

n'est pas égal à zero, on pourra, suivant la démonstration donnée dans

dans l'art. 19, réduire toujours à des arcs de ſections coniques la différentielle $\frac{du}{u\sqrt{(Au+C)}.\ \sqrt{(B+Gu+Huu)}}$, A, C, B, G, H etant des quantités constantes quelconques; & ainſy toutes les quantités que nous avons appris à réduire à la quadrature des courbes du III. ordre, ſe réduiroient à des arcs de ſections coniques. Mais comme on ne peut s'aſſurer que par un calcul trés penible, ſi le coëfficient dont il s'agit eſt ègal à zero, ou s'il ne l'eſt pas? nous abandonnons cette recherche à d'autres, nous contentant d'indiquer icy l'utilité qu'on en pourroit tirer.

PROBLEME IV.

XXII. *Trouver la quadrature de toutes les courbes du 3e. ordre.*

Une courbe quelconque du 3e. ordre etant donnée avec ſon équation rapportée à un axe quelconque, on commencera par changer les coordonnées, de maniére que ſon équation devienne une des quatre que M. *Newton* a aſſignées pour toutes les lignes de cet ordre; & on aura pour l'élément de l'aire, $pydx$, en ſuppoſant que p ſoit le ſinus des ordonnées y avec les abſciſſes x, en prenant y & x pour les coordonnées nouvelles. Or l'integrale de $pydx$ étant trouvée il n'y aura plus que des eſpaces rectilignes à ajouter ou à ſouſtraire pour avoir l'aire rapportée aux coordonnées primitives: toute la difficulté ſe réduit donc à trouver l'integrale de ydx dans les quatre équations de M. *Newton*. Or la Ire. de ces équations donne $ydx =$

$$-\frac{edx}{2x} \pm \frac{dx}{2x}.\sqrt{(4ax^4+4bx^3+4cx^2+4\delta x+ee)}$$

qui s'integre par l'art. 18. La IIde. & la IIIe. donnent $ydx.x = \frac{dx}{x}$ $(ax^3+bx^2+cx+\delta)$ & $ydx = (ax^3+bx^2+cx+\delta)dx$; ce qui n'a aucune difficulté.

Enfin la IV. donne ydx &c. $= dx\sqrt{(a+bx+cx^2+ex^3)}$ qui s'integre par des arcs de ſections coniques.

Donc

Donc toutes les lignes du 3e. ordre sont quarrables, ou absolument, ou par logarithmes, ou par des arcs de sections coniques, ou enfin par la quadrature de la courbe, qui a pour équation $x y' y = a + bx + cx^2 + fx^3$, le II. membre ayant toutes ses racines réelles.

COROLLAIRE.

XXIII. Si on propose d'integrer $(bx + l)^p dx (a + bx + cx^2 + ex^3)^{\frac{\pm n}{3}}$, p étant un nombre entier positif, & n un nombre entier, cette differentielle sera toujours integrable par la quadrature d'une courbe du IIIe. ordre. Car soit $x = qu + ry + a'$ & $\sqrt[3]{(a + bx + cx^2 + ex^3)} = b' + ku + my$, a', b', k, m, r, q, étant des constantes indeterminées, il est certain qu'on aura une transformée en u & en y, qu'on pourra toujours réduire à l'une des 4 équations de M. *Newton*, puisque $\sqrt[3]{(a + bx + cx^2 + ex^3)}$ est l'ordonnée d'une courbe du IIIe. ordre dont x est l'abscisse. On aura donc une valeur de x en u ou en y, qui étant substituée dans la differentielle proposée, la rendra integrable par l'art. 18.

Si l étoit $= 0$, & que p fut negatif, on pourroit encore se servir alors de la même methode, pourvuque $p - 2 \mp n$ ne fut pas plus petit que zero.

On pourra de même réduire à la quadrature d'une courbe du IIIe. ordre $(bx + l)^p dx . Y^n$, Y étant l'ordonnée d'une courbe quelconque du IIIe. ordre, & n, p, des nombres entiers positifs.

REMARQUE I.

XXIV. Il y a encore d'autres differentielles plus compliquées, qu'on peut, du moins en certains cas, réduire à la quadrature des courbes du IIIe. ordre. Par exemple si on a la differentielle $P dx$. $(a +$

$(a+bx+cxx)^{\pm\frac{n}{2}}.(e+fx+gxx)^{\pm\frac{m}{2}}$, P[redacted]nt une fonction rationelle de x, on pourra toujours, en suivan[redacted] methode de l'art. 18. réduire cette differentielle en differens termes, dont les plus compliqués seront de la forme

$$\frac{z^k\,dz}{(zz+pz+q)^r}\cdot\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{(\alpha+\beta z+\delta zz)}}.$$ Or faisant $\frac{z}{\sqrt{(\alpha+\beta z+\delta zz)}} = -\frac{1}{u}$

on aura $zz+pz+q = zu-\frac{\beta z}{\delta}+pz-\frac{\alpha}{\delta}+q$; & $z = \frac{u-\beta}{2\delta}\pm\sqrt{\left(-\frac{\alpha}{\delta}+\frac{(u-\beta)^2}{4\delta\delta}\right)}$. D'où l'on conclura aisement que si $q=\frac{\alpha}{\delta}$, la proposée est réductible à la quadrature d'une courbe du IIIe. ordre, parcequ'on peut alors réduire $zu-\frac{\beta z}{\delta}+pz$ en diviseurs simples z, & $u-\frac{\beta}{\delta}+p$.

REMARQUE II.

XXV. Toutes les differentielles que nous avons appris à integrer dans les trois differentes parties de ces recherches, soit par logarithmes, soit par des arcs de sections coniques, soit enfin par la quadrature des courbes du IIIe. ordre, pourroient encore s'integrer par les mêmes methodes, si on y substituoit $nx^{n-1}dx$ au lieu de dx, & x^n au lieu de x.

QUA-

QUATRIE'ME PARTIE

METHODES POUR INTEGRER QUELQUES E'QUATIONS DIFFERENTIELLES.

Je supposerai toujours dans les propositions suivantes $z = \frac{dx}{dy}$, $s = \frac{dz}{dy}$, ou $\frac{ddx}{dy^2}$, $k = \frac{du}{dy}$ ou $\frac{d^3x}{dy^3}$ &c.

PROBLEME I.

XXVI. *Trouver l'integrale d'une équation differentielle qui renferme telles fonctions qu'on voudra de* d x & *de* d y, *&* *dans laquelle* x & y *se trouvent, pourvu qu'ils ne soient ny multipliés ou divisés l'un par l'autre, ny elevés à aucune puissance plus grande que l'unité.*

Il est visible que ces sortes d'équations pourront toujours être représentées par la formule $x = y\,\varphi\, z + \Delta\, z$, $\varphi\, z$ & $\Delta\, z$ marquant des fonctions quelconques de z, c'est à dire de $\frac{dx}{dy}$. Or differentiant cette formule, & mettant pour dx sa valeur $z\,dy$ on aura $z\,dy = dy\,\varphi\, z + y\,d(\varphi\, z) + d(\Delta\, z)$ équation; d'où l'on tirera facilement la valeur de y en z, & par conséquent aussi celle de x, puisque $x = \int z\,dy$.

COROLL. I.

XXVII. On prouvera de la méme maniere que l'on peut integrer toute équation réductible à la forme $z = y\,\varphi\, u + \Delta\, u$, ou $u = y\,\varphi\, k + \Delta\, k$ &c. d'où il s'ensuit qu'en général toute équation qui renfermera y & $d^n x$ lineaires, avec telle fonction qu'on voudra de $d^{n+1} x$ & de $d\,y$, sera integrable par la methode du present probleme.

Coroll. I.

XXVIII. Si $x = y\varphi z$, c'eſt le cas des équations homogenes connu depuis longtems.

Si $x = yz + \Delta z$, l'équation appartient alors en même tems à une ligne droite, & à une ligne courbe. Car la differentiation donne $(y + \Gamma z)\, dz = o$, d'où l'on tire, ou bien $dz = o$ qui appartient à une ligne droite, ou $y = -\Gamma z$ qui eſt à une ligne courbe.

On peut auſſi obſerver en paſſant que l'équation $dx + \frac{ax + by + c}{gx + hy + f}\, dy = o$, ſur laquelle pluſieurs Geometres ſe ſont exercés, eſt un cas particulier de notre Problême.

Probleme II.

XXIX. *Trouver les conditions d'integrabilité de l'équation* $x^{m} y^{n} z^{r} = \varphi(x^{q} y^{s} z^{t})$ *dans laquelle* m, n, r, q, s, t, *marquent des nombres quelconques, & $\varphi(x^{q} y^{s} z^{t})$ une fonction quelconque de* $x^{q} y^{s} t^{t}$.

On ſuppoſera $x^{q} y^{s} z^{t} = u$, ce qui donnera $x = u^{\frac{1}{q}} y^{\frac{-s}{q}} z^{\frac{-t}{q}}$ & $x = (\varphi u)^{\frac{1}{m}} y^{\frac{-n}{m}} z^{\frac{-r}{m}}$; d'où l'on tire $y = (\varphi u)^{\frac{q}{qn - ms}} u^{\frac{-m}{qn - ms}} z^{\frac{-rq + tm}{nq - ms}}$ & $x = (\varphi u)^{\frac{-s}{nq - ms}} u^{\frac{n}{nq - ms}} z^{\frac{rs - nt}{nq - ms}}$: or $dx = z\, dy$. C'eſt pourquoy ſi on ſubſtituë les valeurs de dx & de dy dans cette derniére équation, on trouvera qu'elle eſt integrable dans tous les cas ſuivants, ſçavoir I°. $tm - rq = o$. II°.

II. $rs - nt = 0$. IIIe. $1 + \frac{tm - rq}{nq - ms} = \frac{rs - nt}{nq - ms}$; c'eſt àdire $nq - ms + tm - rq = rs - nt$.

SCOLIE I.

XXX. Il eſt à remarquer qu'on ne retrouveroit que les mêmes équations de condition, ſoit qu'on tirât de l'équation differentielle donnée, les valeurs de y & de z, ou de x & de z.

De plus on obſervera que la Iere. équation $tm - rq = 0$, donne $x^{m} z^{r} y^{n} = \varphi(y^{s} x^{pm} z^{pr})$ & qu'ainſi on a $x^{m} z^{r} = \Delta y^{s}$ ce qui donne une équation facile à integrer. Mais la Methode que nous propoſons icy, a cet avantage, qu'elle donne le moyen d'integrer ces ſortes d'équations differentielles, ſans chercher la valeur de $x^{m} z^{r}$ en y, ce qui ſeroit ſouvent impoſſible de trouver. Il en eſt de même du cas où $rs - nt = 0$, qui donne $y^{n} z^{r}$ égale à une fonction de x.

SCOLIE II.

XXXI. Si $nq - ms = 0$, on aura pour lors $x = u^{\frac{1}{q}} y^{\frac{-s}{q}} z^{\frac{-t}{q}}$ & $x^{\frac{m}{q}} z^{r - \frac{tm}{q}} = \varphi u$; & l'équation propoſée ſera integrable dans le cas où $-s = q$ & $n = -m$, ce qui revient au cas des équations homogenes.

SCOLIE III.

XXXII. Si on fait $t = 0$, $r = 1$, on aura au lieu de la III. équation de condition $nq - ms = q + s$. Donc toute équation de cette forme $dx = x^{p} y^{t} dy \varphi(x^{q} y^{s})$ ſera integrable ſi $-tq + ps = q + s$.

Par exemple l'équation $dx = \frac{ax}{y} dy \, \varphi(x^q y^s)$ est integrable, parceque $-tq + ps = q + t$; de même l'équation $dx = dy \frac{\varphi(xy^s)}{y^{s+1}}$; & ainsy de plusieurs autres ; le cas des équations homogenes est renfermé dans l'équation générale $-tq + qs = q + s$.

SCOLIE IV.

XXXIII. On peut déterminer par là les conditions d'integrabilité de l'équation $dx = ax^m y^n dy + px^e y^h dy + fx^g y^l dy +$ &c. car soit $x^b y^a = u$, a & b étant deux indeterminées, on aura une transformée integrable, toutes les fois que l'on aura $-\frac{a}{b} - 1 = -\frac{ma}{b} + n = -\frac{ea}{b} + h = -\frac{ga}{b} + l$ &c. c'est à dire lorsque l'on aura $\frac{n+1}{m-1} = \frac{h+1}{e-1} = \frac{l+1}{g-1}$ &c.

SCOLIE V.

XXXIV. Si dans toutes les équations précedentes, on met $\frac{d^n x}{dy^n}$ au lieu de x, & $\frac{d^{n+1} x}{dy^{n+1}}$ au lieu de z ou $\frac{dx}{dy}$, elles seront encore intégrables dans les mêmes cas qui ont été determinés art. 29 & suiv.

PRO-

PROBLEME III.

XXXV. *Trouver les conditions d'integrabilité de l'équation* $x = y^k z^r \varphi(y^p z^n) + \Delta(y^p z^n)$.

I°. Soit $y^p z^n = u$, on aura $z = u^{\frac{1}{n}} y^{\frac{-p}{n}}$ & $dx = u^{\frac{1}{n}} y^{\frac{-p}{n}} dy$; & enfin $y^k z^r = u^{\frac{r}{n}} y^{k - \frac{pr}{n}}$; d'où l'on voit que la proposée sera integrable si $-\frac{p}{n} + 1 = k - \frac{pr}{n}$.

II°. Si on fait encore $y^p z^n = v$, on aura $y = u^{\frac{1}{p}} z^{\frac{-n}{p}}$; d'où l'on voit que l'équation proposée sera integrable, si $-\frac{n}{p} + 1 = -\frac{nk}{p} + r$; ce qui revient à la condition précedente.

SCOLIE I.

XXXVI. Si l'on avoit $x = y^k z^r \varphi(y^p z^n) + y^{k'} z^{r'} \Delta(y^p z^n) + y^{k''} z^{r''} \Gamma(y^p z^n)$ &c. on trouveroit que cette équation feroit integrable, lorsque l'on auroit $\frac{p}{n} = \frac{k-1}{r-1} = \frac{k'-1}{r'-1} = \frac{k''-1}{r''-1}$ &c. ou bien lorsque k' & r', ou k'' & r'' &c. seroient égaux à zero.

SCOLIE II.

XXXVII. Si au lieu de x on met $\frac{d^n x}{dy^n}$, & au lieu de z,

d^{n+1}

$\dfrac{d^{n+1}z}{\overline{n+1}\,dy}$ dans les équations precedentes, elles feront encore inte
grables dans les mêmes conditions.

PROBLEME II.

XXXVIII. *Trouver l'integrale de l'équation* $x + Z + a = \frac{yyz\,dz}{2\,dZ} + \frac{z\,dZ}{2\,dz}$ (*a marquant une constante & Z une fonction de z*).

Je ne donne icy la solution de ce probleme, que parce qu'ell me conduira à des formules plus générales. On mettra donc l'équa tion proposée sous la forme suivante $x - yz + Z + a = (y - \frac{dZ}{dz})$ $\frac{z\,dz}{2\,dZ}$; d'où l'on tire $(y - \frac{dZ}{dz}) \cdot V\frac{z\,dz}{2\,dZ} = V(x-yz+Z+a)$ or on a $dx - z\,dy = o$ & par conséquent $dx - z\,dy - y\,dz + dZ +$ $y\,dz - dZ = o$; & par conséquent $\frac{dx - z\,dy - y\,dz + dZ}{V(x - yz + Z + a)} =$ $\frac{-dz\,(y - \frac{dZ}{dz})}{(y - \frac{dZ}{dz})\,V\frac{z\,dz}{2\,dZ}}$; dont l'integrale est $V(x - yz + Z + a) =$ $\frac{1}{2} f - dz\,V\frac{2\,dZ}{z\,dz}$: cette équation combinée avec l'équation don née, on en tirera la valeur de x ou de y en z, & ensuite l'équatio $dx = z\,dy$, donnera la valeur de y ou de x en z.

SCOLIE I.

XXXIX. Si on divise le premier membre $dx - z\,dy - y\,dz +$ dZ de l'équation differentielle par $\varphi\,(x - yz + Z + a)$, & le secon mem

membre $y\,dz - dz$ par la même quantité, on verra facilement que ce second membre, & par conséquent l'équation, est integrable, si $\frac{y\,dz - dZ}{\Phi(x - yz + Z + a)}$ est égal à $dz\,\Delta z$; donc on pourra intégrer toutes les équations dans lesquelles $x - yz + Z + a$ est égale à une fonction de $(y - \frac{dZ}{dz})$. Γz.

Si on fait $Z = o$, on aura $x - yz = \Phi(y\,\Delta z)$, équation qui renferme comme un cas particulier le probleme proposé par Mons. *Bernoulli* en 1692, qui consistoit à trouver des courbes dans lesquelles la resecte $x - yz$ fût en raison donnée avec la tangente $y\sqrt{(zz+1)}$.

SCOLIE II.

XL. Nous remarquerons icy en passant à l'occasion de ce dernier probleme, que si on proposoit de trouver des courbes, dans lesquelles la resecte fut proportionelle au produit d'une puissance quelconque de l'abscisse par une fonction quelconque de l'ordonnée & par une fonction quelconque de l'abscisse divisée par l'ordonnée, on auroit pour équation $dx - \frac{x\,dy}{y} = Y x^n\,dy \frac{x}{y}$, Y étant une fonction de y. Or cette équation peut s'integrer aisément en faisant $x = yu$. Il en est de même de l'équation

$$dx - \frac{x\,dy}{y} = \frac{dy\,\Delta\frac{x}{y}}{\Phi\frac{x}{y} + y^p\,\Gamma\frac{x}{y}}.$$

SCOLIE III.

XLI. Soit encore $dx - z\,dy = o$; on multipliera cette équation par X que je suppose être une fonction de x, & on aura $X\,dx - Xz\,dy - yX\,dz - zy\,dX + yX\,dz + zy\,dX = o$; multipliant

ensuite les quatre premiers membres par une fonction de leur intégrale $\int X\,dx - yXz$, on trouvera que l'équation est integrable, $\int X\,dx - yXz$ est égal à une fonction de $y \Delta X z$. Ainsi l'équation $\int X\,dx = pyXz + qyX^n z^n + a$, p, q, & a étant des constantes, peut être integrée par ce Theorême, ainsy que plusieurs autres.

En général tout l'artifice de la methode que nous proposons icy pour découvrir des équations integrables, consiste à préparer l'équation $dx - z\,dy = o$, de telle maniére qu'on puisse la diviser en deux parties, dont l'une soit integrable, ou puisse au moins être renduë telle, & dont l'autre soit une differentielle exacte multipliée par quelque quantité que ce soit, ou au moins soit le produit d'une quantité quelconque, par une quantité infiniment petite, qui puisse être renduë aisément une differentielle exacte; aprés cette préparation, on multipliera la prémiere partie par une fonction de son integrale; & on supposera ensuite que le produit de cette fonction par la quantité qui multiplie la differentielle dans la II^de. partie, soit égal à une fonction de l'integrale de la differentielle contenuë dans la II^de partie; par là on aura l'équation de condition, qui rend la proposée integrable.

De plus, au lieu d'écrire $dx - z\,dy = o$, on peut ecrire $dy - \frac{dx}{z} = o$, & mettant dans les équations de condition y pour x, x pour y, & $\frac{1}{z}$ pour z, on en trouvera de nouvelles. Par exemple $x - yz = \varphi(y \Delta z)$ donne $y - \frac{x}{z} = \varphi(x \Delta z)$ où $x - yz = z\varphi(x \Delta z)$ & ainsy des autres.

Enfin ces mêmes équations de condition auroient lieu, si à la place

place de x, on mettoit $\frac{d^n x}{dy^n}$ & à la place de z ou de $\frac{dx}{dy}$,

$\frac{d^{n+1} x}{(dy)^{n+1}}$.

Probleme V.

XLII. *On propose de trouver l'integrale des deux équations*

$$dx + (Cx + Dy)\,dt = o$$
$$dy + (Kx + Ly)\,dt = o.$$

On multipliera la II$^{de.}$ de ces équations par un coëfficient indéterminé v, ensuite on les ajoutera ensemble, ce qui donnera : $dx + vdy + dt\,((C + Kv)\,x + (D + Lv)\,y) = o$. Ensuite on fera en sorte que $(C + Kv)\,x + (D + Lv)\,y$ soit un multiple quelconque de $x + vy$, ce qui donnera $\frac{C + Kv}{1} = \frac{D + Lv}{v}$; équation d'où l'on tirera $v = -\frac{C + L}{2K} \pm \frac{\sqrt{((L - C)^2 + 4DK)}}{2K}$. On supposera ensuite $x + vy = u$, & l'on aura $du + (C + Kv)\,u\,dt = o$; dont l'integrale est $u = g\,e^{-(C + Kv)t}$, g étant une constante & e le nombre dont le logarithme est 1.

Cela posé soient p, p' les deux valeurs de, v, trouvées par l'équation précedente, & soit $x + py = u$, $x + p'y = u'$, on aura $u' = g'\,e^{-(C + Kp')\,t}$; $u = g\,e^{-(C + Kp)\,t}$; $y = \frac{u - u'}{p - p'}$:

$x = \frac{p'u - pu'}{p' - p}$; & on déterminera les constantes g & g' par les

 valeurs

valeurs que x & y doivent avoir, lorsque t eſt $= o$, ou eſt égal à que grandeur connuë.

SCOLIE I.

XLIII. Cette ſolution ne peut ſouffrir de difficulté que da cas où l'équation $Kvv + Cv - Lv - D = o$ ne donne point valeurs de v, ce qui arrivera ſi $K = o$ ou $D = o$, & dans le cas o deux valeurs de v ſont égales.

Or I°. ſi $D = o$, une des valeurs de v eſt $= o$, & l'autre e $\frac{L - C}{K}$, c'eſt pourquoy il n'y aura qu'à ſuppoſer dans les form précedentes $p' = o$ & l'on aura les valeurs de y & de x.

II°. Si $K = o$, au lieu de le ſuppoſer abſolument nul, on le poſera infiniment petit, ce qui revient au même, & alors une de leurs de v ſera $\frac{D}{C - L}$ & l'autre ſera $\frac{L - C}{K}$; on aura donc

$$g e^{-(C + \frac{K D}{C - L})t} = g e^{-Ct}; \; u' = g' e^{-(Lt)}$$

$$y = \frac{K(u - u')}{C - L}; \; x = u - \frac{p u'}{p'} = u + \frac{D K u'}{(C - L)^2}.$$

III°. Enfin ſi les valeurs de p & de p' ſont égales, au lieu d ſuppoſer telles, on ſuppoſera $p = a + \alpha$, $p' = a - \alpha$, α étant quantité infiniment petite, & on aura $u = g e^{-(C + K}$

$$- K g \alpha t e^{-(C + K a)t}; \; u' = g e^{-(C + K a)t} + K g' \alpha t e^{-(C + K}$$

$$y = \frac{u' - u}{2 \alpha}; \; x = \frac{a u - a u' - \alpha u - \alpha u'}{2 \alpha}; \text{ de ſorte que ſi } g =$$

on a $y = -K g t e^{-(C + K a)t}$; & $x = -K g t e^{-(C + K a)t}$.

SCOLIE II.

XLIV. Les methodes que je viens de donner dans le Scolie précedent pour trouver les valeurs de x & y, lorsque v n'a pas deux valeurs inégales, ſont principalement remarquables par l'uſage que nous en ferons dans des cas plus composés. Car on pourroit s'en paſſer icy, puisque K ou D étant $= o$, une des deux équations eſt integrable, & que l'integration de l'autre ſe reduit à l'integration de la formule $dz + bzdt + T\,dt = o$, b étant une conſtante, & T une fonction de t; & ſi les deux valeurs de v ſont égales, on prendra arbitrairement une de ces valeurs; & àpres avoir réſolu l'équation $du = -dt\,(C + Kv)u$, on tirera de l'équation $x + vy = u$, une valeur de x ou de y en u, c'eſt à dire en t, & cette valeur étant miſe dans une des deux équations données, on verra que ſon integration ſe réduit à celle de la formule $dz + bz\,dt + T\,dt = o$. On aura donc les valeurs de x & de y en t.

SCOLIE III.

XLV. Si les valeurs de v étoient imaginaires, le probleme ſe réſoudroit toujours de la même maniére. Car les exponentielles imaginaires ſe réduiroient toujours à $A + B\sqrt{-1}$, A & B étant réelles, & ſi les valeurs de y & de x devoient être réelles, les imaginaires en diſparoitroient. Voyez le Traité des Vents art. 79.

SCOLIE IV.

XLV. Si les équations propoſées étoient

$$T'\,dx + T''\,dt\,(Cx + Dy) + \theta\,dt = o$$
$$T'\,dy + T''\,dt\,(Kx + Ly) + t\,dt = o$$

le probleme n'auroit gueres plus de difficulté; car T', T'', θ, t, étant des fonctions quelconques de t, on auroit, en ſuivant la même methode que dans l'art. 42, $T'\,du + T''\,u\,dt\;(C + Kv) + (\theta + t\,v)\,dt = o$. Or cette équation s'integrera par des methodes connuës des Geometres.

Scolie V.

XLVII. Il n'est pas plus difficile de trouver l'integrale des équations

$$T' A\, dx + T' B\, dy + T'' dt (Cx + Dy) + \theta\, dt = o$$

$$T' F\, dx + T' G\, dy + T'' dt (Kx + Ly) + t\, dt = o$$

Car on peut trés aisément réduire ces équations à deux autres dont la Iere. ait $T'\, dx$ pour Ier. terme sans renfermer dy, & dont la II^de. ait $T'\, dy$ pour Ier terme, sans renfermer dx. Il est vray que cette réduction ne pourra se faire, lorsque $BF - AG$ sera $= o$, mais on remarquera que le probleme devient alors beaucoup plus simple. Car il se réduit alors à une équation finie

$$T'' dt (CFx + DFy) + F\theta\, dt = T'' dt (KAx + LAy) + t\, A\, dt$$

& à une des deux équations differentielles, qui s'integre par la formule $dz + bz\, dt + T\, dt = o$.

Probleme IV.

XLVIII. *On propose d'integrer les équations*

$$dx + (ax + by + cz)\, dt = o.$$

$$dy + (ex + fy + gz)\, dt = o.$$

$$dz + (hx + my + nz)\, dt = o.$$

On multipliera la seconde de ces équations par une indéterminée ν, la IIIe. par une indéterminée μ, & ensuite on les ajoutera ensemble, puis on supposera $a + e\nu + b\mu = \frac{b + f\nu + m\mu}{\nu} = \frac{c + g\nu + n\mu}{\mu}$, afin qu'en faisant $x + \nu y + \mu z = u$, on ait $du + (a + e\nu + b\mu)\, u\, dt = o$. Cela posé, on aura la valeur de μ en ν, & une équation du IIIe. degré, qui donnera trois valeurs de ν, que j'appelle p, p', p''. Or soient m, m', m'', les trois valeurs correspondantes de μ, on aura $x + py + mz = g\, E^{-t(a + ep + bm)}$, E étant le nombre dont le logarithme est l'unité ; $x + p'y + m'z = g'\, E^{-t(a + ep' + bm')}$; $x + p''$

$x + p'' y + m'' z = g'' E^{-t(a + ep'' + bm'')}$; de ces trois équations on tirera les valeurs de x, y, z, & on déterminera les constantes g, g', g'' par les valeurs que doivent avoir x, y, z, lorsque $t = o$, ou est égal à une constante donnée.

SCOLIE I.

XLIX. Si l'équation en v n'a pas trois racines inégales, on pourra toujours, pourvu que cette équation ait au moins une racine, réduire le probleme présent au cas de l'art. 47. car soit p la valeur de v & m la valeur de μ, on fera $x + my + pz = g E^{-(a + ep + bm)t}$, & l'on réduira les trois équations données à deux, en faisant évanouïr par le moyen de cette dérniére équation une des indéterminées, par exemple z

Mais il peut se faire que l'équation en v n'ait aucune racine, ce qui arrivera si les coëfficiens qui affectent les differentes puissances de v sont égales à zero ; en ce cas si le terme tout connu de l'équation s'en va aussy, c'est une marque que l'on peut donner à v telles valeurs qu'on voudra, & le probleme devient alors plus simple, si le terme tout connu de l'équation ne s'en va pas, on augmentera, ou on diminuera à volonté un des coëfficiens a, b, c, e, &c. d'une quantité infiniment petite pour retablir un des termes de l'équation, & on aura pour lors par la régle du Parallelogramme de Mons. *Newton* une valeur infinie de v, qui servira à résoudre le probleme.

SCOLIE II.

L. Au reste sans réduire le probleme présent au cas de l'art. 49. on peut toujours supposer que toutes les valeurs de v soient inégales. Il n'y a qu'à augmenter tous les coëfficiens a, b, c &c. d'une quantité infiniment petite α, ou seulement l'un de ces coëfficiens, alors on aura des valeurs de v, toutes inégales entr'elles, & dans lesquelles entrera la quantité α, & ces valeurs étant substituées à la place de p, p', p'' &c. on aura aprés la fin du calcul des valeurs de x, y, z. dans les-

quelles

quelles la quantité α ne se trouvera plus. Pour avoir ces valeurs de v, on se servira de la régle du Parallelogramme de Mons. *Newton*, ou de la régle pour trouver les tangentes aux points multiples des courbes. Car on peut regarder l'équation en v comme l'équation d'une courbe dont v est l'ordonnée, & dont une des constantes, par exemple a, considerée comme variable est l'abscisse ; or dans le cas présent cette courbe sera du III. degré ; & lorsque la valeur de a sera telle que pour une même abscisse on n'ait pas trois valeurs inégales de v, alors imaginant que l'abscisse a soit augmentée d'une quantité infiniment petite α, on doit trouver par les régles dont nous venons de parler trois valeurs differentes de v, répondantes à l'abscisse $a + \alpha$ ou $a - \alpha$; & il n'importe que deux ou plusieurs de ces valeurs soient imaginaires, pourvu qu'elles soient differentes entr'elles.

SCOLIE III.

LI. Il est facile d'integrer par ce probleme trois équations qui contiendront les indéterminées x, y, z, multipliées par des constantes, & par une fonction quelconque de t, avec leurs differences aussy multipliées par des constantes & par une fonction de t, & de plus un terme quelconque t dt, $\theta\, dt$, $\theta'\, dt$, qui ne renferme que des constantes avec t. Voyez les art. 46 & 47.

SCOLIE IV.

LII. Si avec les trois équations de l'art. 48, on en proposoit une IVe. il faudroit multiplier cette quatriéme par une nouvelle indéterminée π, & aprés avoir trouvé l'équation en v & l'équation qui donne la valeur de μ en v en mettant dans cette derniére π aulieu de μ, & au lieu de b, m, n, les coëfficiens qui leur répondroient dans la IV. équation, & réciproquement b, m, n, au lieu de ces coëfficiens ; aprés quoy on resoudroit le probleme par une methode entierement semblable à celle de l'art. 48.

SCOLIE V.

LII. De là & des articles précedens il est facile de conclure que si on a un nombre n d'équations differentielles qui renferment n indeter-

derminées, x, y, z, u, &c. multipliées par des constantes & par une même fonction de t, avec leurs differentielles $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{du}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, &c. aussy multipliées par des constantes & par une fonction de t, qui soit la même pour toutes, & de plus une fonction quelconque t, θ, θ' &c. de la variable t, on pourra toujours integrer ces équations par la methode que nous venons d'exposer.

Scolie VI.

LIII. Par la même raison, si on a un nombre p d'équations differentielles qui contiennent p variables x, y, z, u, &c. multipliées par des constantes & par une fonction quelconque T de t, avec leurs differences $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ &c. aussy multipliées par des constantes & par T, & les differences secondes $\frac{ddx}{dt^2}$, $\frac{ddy}{dt^2}$, $\frac{ddz}{dt^2}$ &c. aussy multipliées par des constantes, & par T, & les differences troisiémes $\frac{d^3x}{dt^3}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$ &c. aussy multipliées par T & par des constantes, & ainsy de suite, jusqu'aux differences $\frac{d^q x}{dt^q}$ &c. de tel degré q, qu'on voudra; & que de plus chacune de ces équations contienne, si l'on veut, une fonction quelconque t, θ, θ' &c. de la variable t, on pourra toujours les integrer par le scolie précedent. Car en faisant $d^{q-1}x = x' dt^{q-1}$; $d^{q-2}x = x'' dt^{q-2}$ &c. $d^{q-1}y = y' dt^{q-1}$; $d^{q-2}y = y'' dt^{q-2}$ &c. on changera les équations données en d'autres

 équa-

équations qui seront au nombre de $p + p(q-1) = pq$, & qui ne contiendront que les indéterminées x, y, z, u &c. x', x'' &c. y', y'' &c. avec leurs Ieres. differences seulement dx, dy, dz, &c. dx', dx'', &c. dy', dy'' &c. & ces équations s'integreront par l'art. 52.

SCOLIE VII.

LIV. On peut quelquefois abreger cette methode : par exemple, si les équations données étoient

$$ddx + (Cx + Dy)dt^2 = o$$

$$ddy + (Kx + Ly)dt^2 = o$$

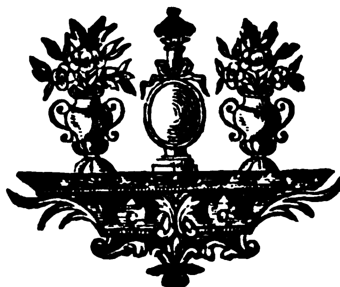
on les réduiroit, en suivant la methode de l'art. 42, à l'équation d[illegible] $+ (C + Kv)\,u\,dt = o$, qui est facile à integrer. De même si on avoit les équations $d^4x + Mx\,dt^4 = o$, $ddu + (Fx + Gu)\,dt^2 = o$, on les changeroit, en supposant $ddx = p\,dt^2$, dans les trois équations $ddx = p\,dt^2$, $ddp = -Mx\,dt^2$, & $ddu + (Fx + Gu)\,dt^2 = o$ qui par la methode de l'art. 48 se réduiroient à une équation de cette forme $ddx + Kx\,dt^2 = o$.

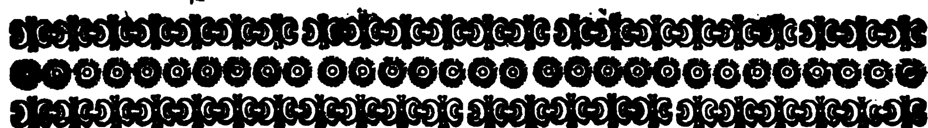
SCOLIE VIII.

LV. On pourroit aussy integrer les équations dont nous avons parlé depuis l'art. 42, par une autre methode qui revient au même dans le fond, que celle que nous avons deja exposee. Pour en donner une idée, soit supposée dans l'art. 42. $x = mu + nz$, $y = pu +$ [illegible] m & n étant deux indeterminées ainsy que p & q, on aura $m\,d$[illegible] $n\,dz + dt((Cm + Dp)u + (Cn + Dq)z) = o$. & $p\,du + q\,dz +$ [illegible]$((Km + Lp)u + (Kn + Lq)z) = o$. Or faisant $m = 1$ & $p =$ [illegible] supposant deplus $\frac{Cn + Dq}{n} = \frac{C + D}{1}$; & $\frac{Kn + Lq}{q} = \frac{K +}{}$ [illegible] on determinera n & q à être telles que les deux transformées se [illegible] duisent chacune à une differentielle de cette forme $ds + Ns\,dt =$ [illegible] mais la methode que j'ay donnée dans les articles précedens par[illegible] encore plus simple, & j'ai cru devoir l'expliquer le plus succinctement qu'il m'a été possible, à cause de l'utilité dont elle peut être non se[illegible]

lement dans l'Analyse, mais encore dans plusieurs problemes Physico-mathematiques. J'en avois même deja donné quelque idée dans l'art. 101. de mon Traité de Dynamique, que dans l'art. 79 de mon Traité des vents: j'espere donc que les Geometres pourront tirer quelque utilité de mon travail, & que les differentes branches de cette methode seront même applicables à d'autres Problemes. Je me contenterai d'en donner un exemple; on sçait que l'integrale de $\frac{dx}{(x+a).(x+b)}$ est $\frac{1}{b-a}$ Log. $\frac{x+a}{x+b}$; & lorsque $x+a=x+b$, c'est à dire lorsque $b=a$, cette integrale devient $\frac{0}{0}$. Pour la déterminer je suppose $b=a+\alpha$; & j'ay $\frac{1}{\alpha}$ Log. $\left(1-\frac{\alpha(x+a)}{(x+a)^2}\right)$ $=-\frac{1}{x+a}$, comme elle est en effet. C'est encore par une methode à peu prés semblable que j'ay déterminé cy-dessus l'integrale de $\frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{(k+lx+mx^2+nx^3)}}$ dans le cas où $4ln=mm$.

ce 13 Avril 1747.





OBSERVATION DE L'ECLIPSE PARTIALE DE LA LUNE 1748 LE 8me Août

PAR M. KIES.

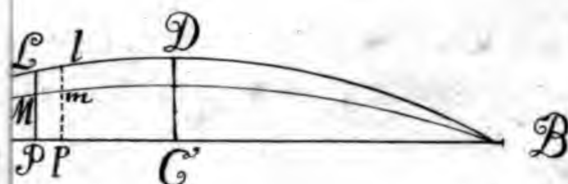
		Tems vrai		
Suite des Observations: Le commencement étoit	à	11h	6'	56"
L'ombre touche *mare humorum*			11	59
Tycbo			19	59
Grimald			24	5
Ricciol.			27	26
Alpetragius			41	0
Sinus maris nubium			44	36
Fracaſtorius			55	29
mare Nectaris			58	34
emerſion de *Grimald*		12	6	56
Alpetrag.			33	48
Bulliald			37	38
Fracaſtor.			56	8
Tycbo.			57	34
La fin arrivoit.		13	19	42

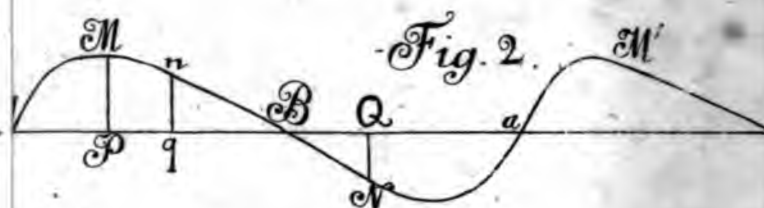
La pendule étoit corrigée par pluſieurs hauteurs correſpondantes que je pris le 9 Août.

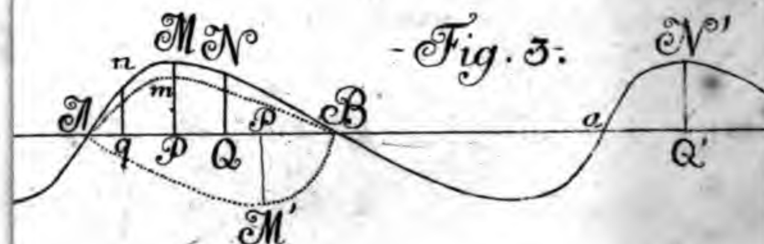
ME-

TAB. I. ad p. 292

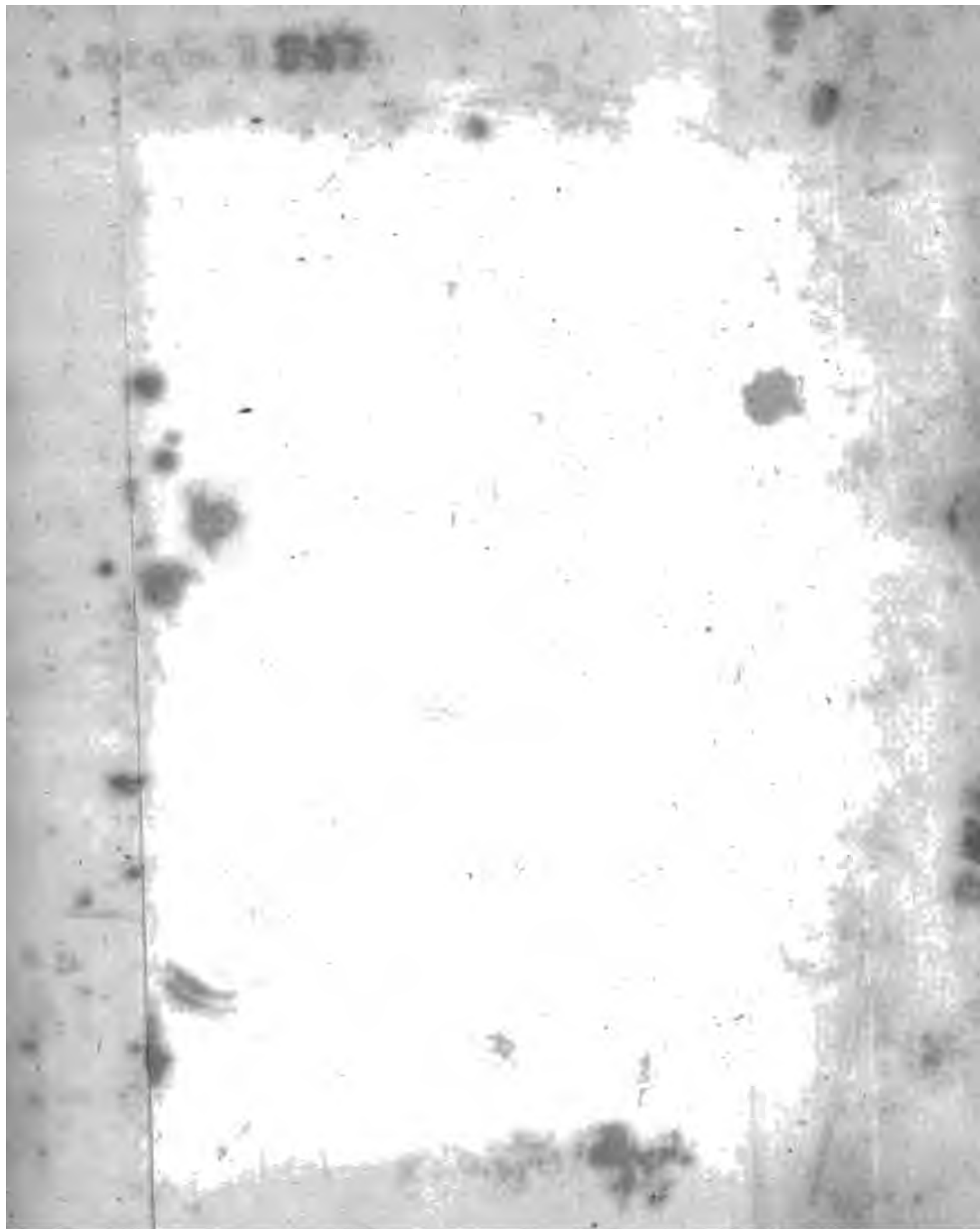
Fig: 1.







IV. ad p. 71



TAB. II. ad p. 292.

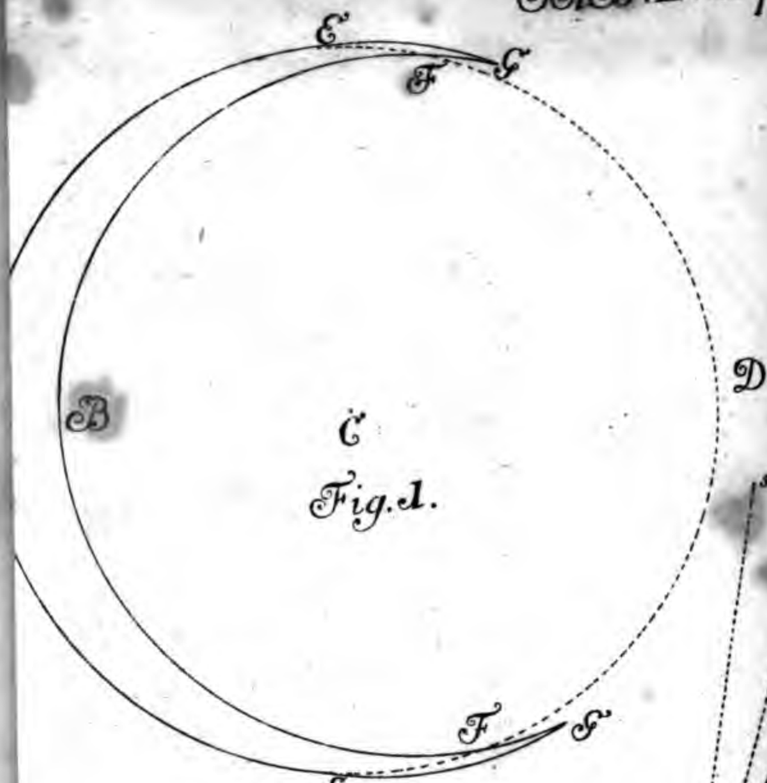
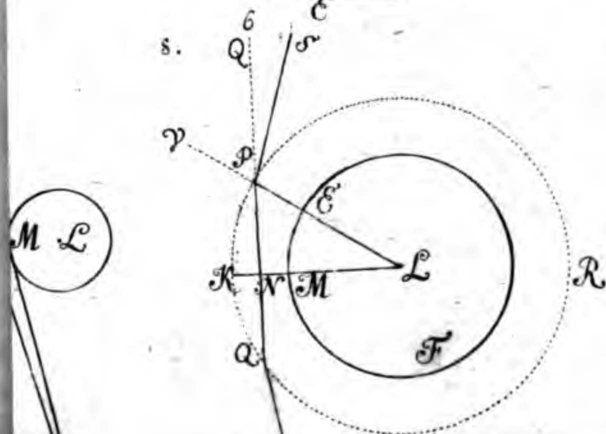


Fig. 1.



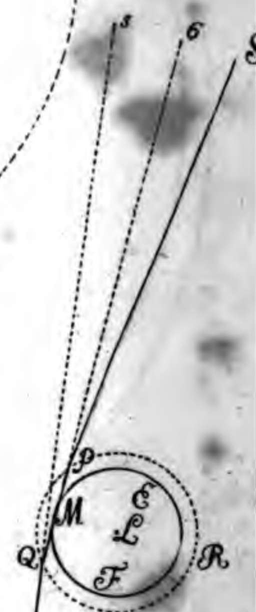


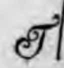
Fig. 4.



Fig. 5.









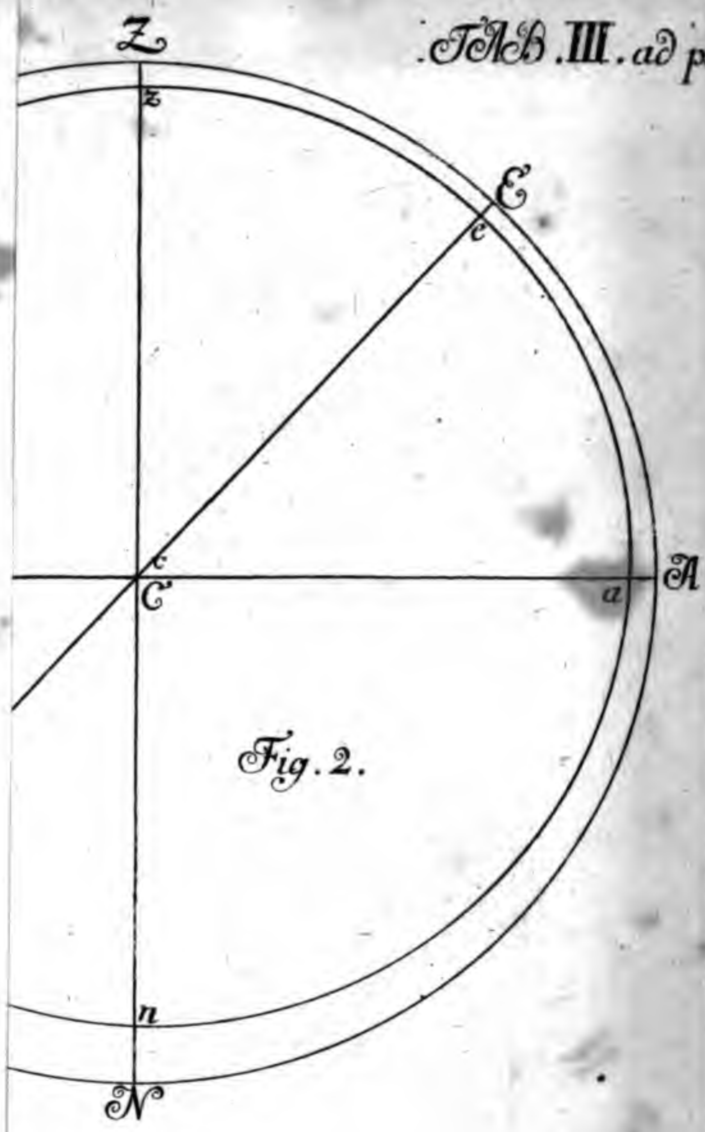


Fig. 2.



Fig. 6



TAB. IV. ad p. 292

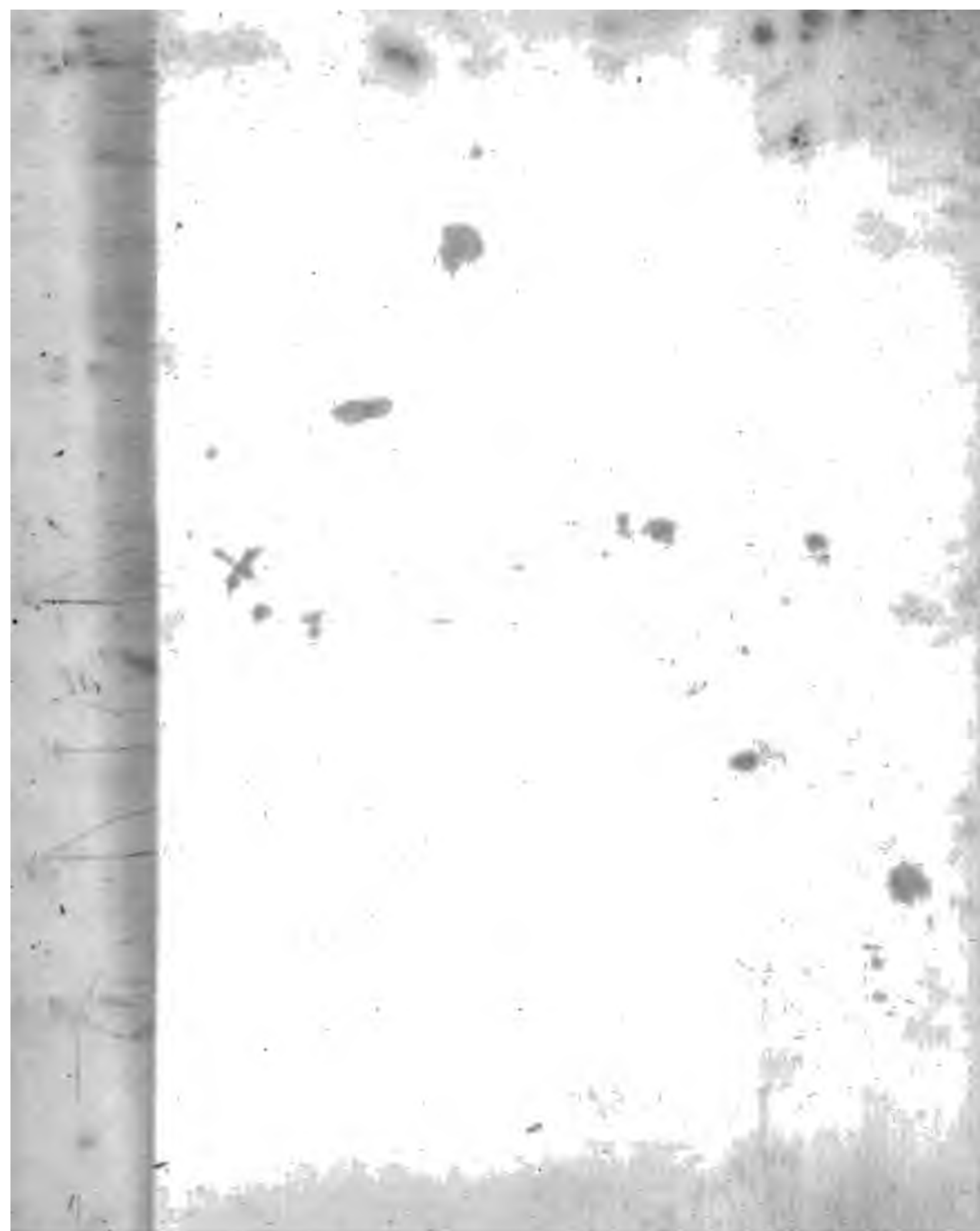
.7.

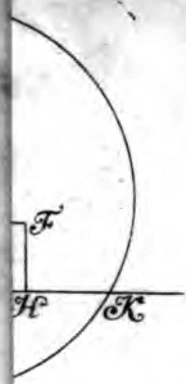
TAB. V. ad p.

.1.

Fig. 2.

Fig. 4.




F
H
K

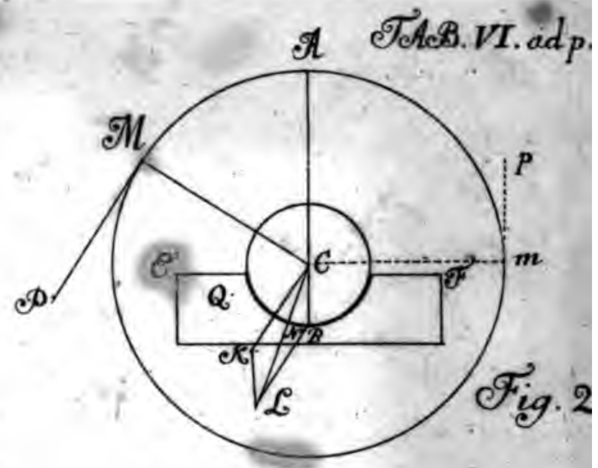
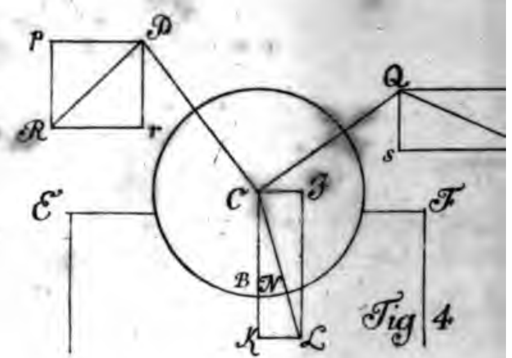
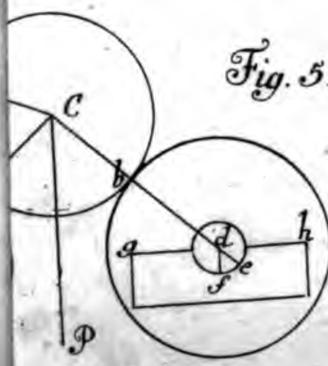
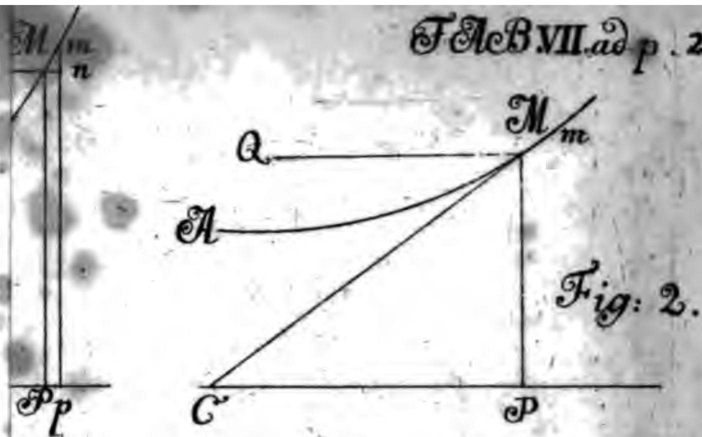
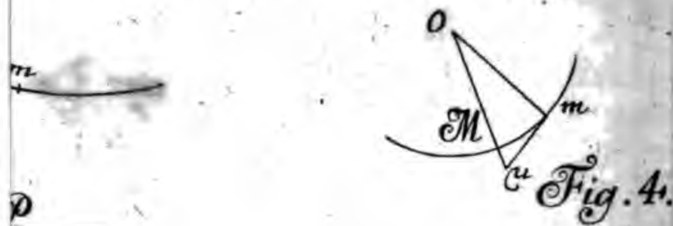

A
M
P
C
m
E
Q
F
D
N B
K
L
Fig. 2


Fig. 3.
F


P
D
R
r
Q
s
E
C
I
F
B
N
K
L
Fig 4


Fig. 5.
C
b
a
d
h
e
f
P

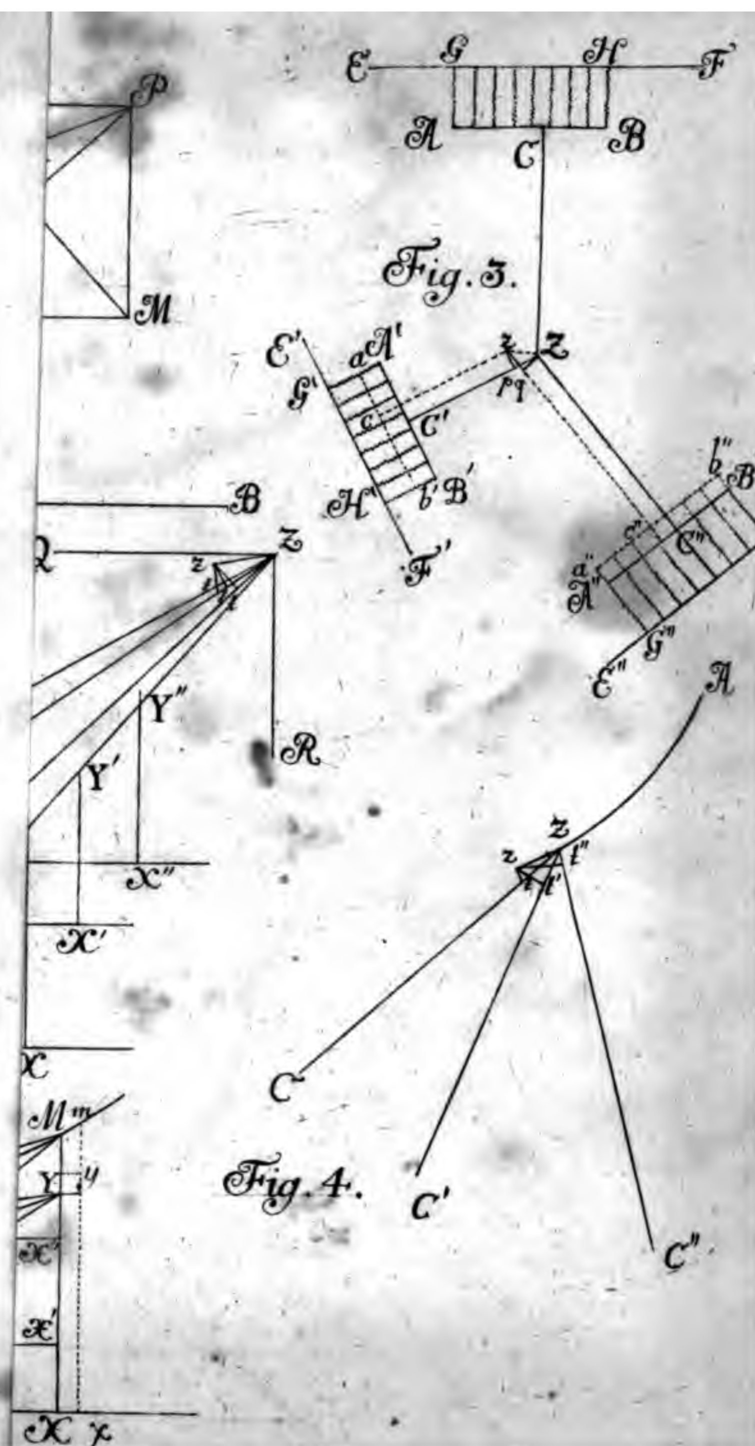




p'

p''




Fig. 3.
Fig. 4.

TAB. IX ad p. 292.

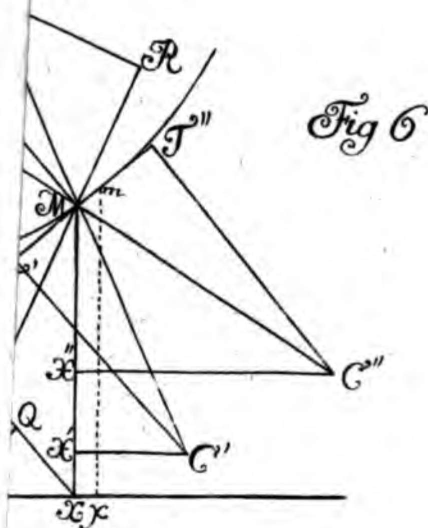


Fig 6



Fig. 7.

MEMOIRES
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES.

CLASSE DE PHILOSOPHIE SPECULATIVE.





DISSERTATION
SUR LE PHILOSOPHE CLITOMACHUS, SUCCESSEUR DE CARNEADE DANS L'ACADEMIE,
PAR M. HEINIUS.

Traduit du Latin.

I.



CLITOMACHUS, un des plus célébres Maitres de l'Ecole Académique, a rendu de si grands services à la Philosophie, qu'il nous a paru digne de la peine que nous allons prendre pour le tirer en quelque sorte de la poussiere, & le faire connoitre au Monde savant, en rapportant à cette illustre Assemblée tout ce qui le concerne. Il résulte une grande utilite des travaux que l'on consacre à l'examen de la vie & des actions des anciens Philosophes. Cela fournit l'occasion de démasquer diverses erreurs, de peser les differentes opinions de dissiper les doutes, & de tirer la lumiere de la verité du consentement des plus savans hommes, dont le témoignage se reünit en sa faveur. On auroit tort de s'imaginer que cette occupation est une peine superfluë, depuis que tant d'habiles Critiques s'y sont livrés, & en particulier, depuis la publication de l'excellente Histoire de la Philosophie, dont nous sommes redevables à Mr. *Brucker*. Malgré l'abondante moisson que ce docte Ecrivain a faite, il reste toujours à glaner. En con-

construisant un si vaste édifice, il n'a pû prendre garde à tout; & enfin, les méprises mêmes sont inévitables dans un aussi vaste travail. Les bornes que nous nous sommes prescrites dans cette Dissertation, sont telles qu'en nous y renfermant, nous n'omettrons rien de tout ce qu'il y a d'interessant à savoir au sujet de Clitomachus.

II. Commençons par rechercher dans quel tems il a vêcu. Il n'y a point d'Auteur qui soit exact là dessus que *Jonsius* *. Personne ne conteste que Clitomachus ait succedé à Carneade dans l'Ecole Academique. Et pour la mort de Carneade, voici ce qu'en dit *Diogene Laërce ;* „ *Apollodore* rapporte dans ses Chroniques, que Car„neade mourut la quatrieme année de la CLXII Olympiade, à l'age „de LXXXV ans.„ La *Description des Olympiades*, qui se trouve dans l'Ouvrage Chronologique de Scaliger, remarque sur cette année; *qu'il arriva une Eclipse de Lune, & que le Philosophe Carneade mourut le même jour.* (*) *Suidas* & *Hesychius* rapportent la même Eclipse d'aprés Diogene Laërce. Voilà donc trois témoins, Apollodore, l'Auteur Anonyme de la Description des Olympiades, & Diogene Laërce, qui déposent l'année de la mort de Carneade, & par conséquent celle où Clitomachus lui succeda. Il est vrai que *Petau*, & quelques autres Savans, ont formé sur cette année une controverse, dans laquelle nous n'entrons point ici, parce qu'elle est tout à fait étrangére à notre but. Ceux qui veulent en savoir davantage là dessus, peuvent recourir aux Ouvrages de *Jonsius*, & de Monsieur *Brucker.* † La quatrieme année de la CLXII Olympiade répond à l'an 625. de Rome, & 127. avant N. S.

* *De Script. Hist. Phil.* 219. & 599.

† *Hist. Phil.* T. I. p. 760.

III. Ainsi Clitomachus fleurissoit vers la fin du VI. Siecle, depuis la fondation de Rome, & au commencement du VII. Cet espace de tems est le plus beau & le plus heureux, dont ait joüi la République : & le seul mot de Scipion Emilien le prouve assez evidemment. Comme il étoit Censeur un peu avant l'année 625. & que faisant un sacrifice solemnel, le Greffier marchant suivant la coutume

(*) Ε'κλείψις σελήνης, καὶ ἓν τῆ ἄυτῇ ἡμέρᾳ Καρνέαδες ὁ Φιλόσοφος τὸν βίον μετήλλαξε.

me devant lui avec les Régiſtres publics, faiſoit le voeu, par lequel on prioit les Dieux, *d'augmenter la proſperité du Peuple Romain; Notre proſperité*, dit-il, *eſt aſſez grande; je prie ſeulement les Dieux qu'ils nous y maintiennent.* Et il ordonna ſur le champ que les Régiſtres publics fuſſent corrigés ſuivant cette formule. C'eſt dans ce tems-là que Rome a été le plus féconde en grands hommes; on y vit tant de beaux génies, d'Orateurs, de Philoſophes, de Juriſconſultes, de Poëtes, d'Hiſtoriens, qu'il y a lieu de s'etonner avec *Velleius Paterculus* (*) qu'un même Siecle ait raſſemblé tant de génies propres, & aux Sciences ſpeculatives, & aux Arts utiles.

IV. Carthage etoit la Patrie de Clitomachus; nous en avons pour garans *Diogene Laërce*, *Denys Periegetes*, *Plutarque* & *Etienne de Byzance.* C'eſt ce qui a engagé *Maxime de Tyr* à l'appeller Libyen, Λίβυς, dans ſa XXIX. Diſſertation, où il en parle avec éloge, & le met à coté d' *Ariſtote* & de *Chryſippe.* Etant donc Phénicien d'origine & de Nation, il reçut auſſi le nom Phénicien d'*Asdrubal*, ou ſi vous prononcez comme les Grecs, *Asdrubas.* C'eſt ce que nous liſons dans *Plutarque*; „Nous admirons, dit-il, la force perſuaſive de Car„neade, qui fit embraſſer les moeurs & les coutumes des Grecs (**) à „Clitomachus, Carthaginois de naiſſance, & qui avoit porté aupara„vant le nom d'*Asdrubal.*" Lorsqu'il arrivoit aux Anciens de changer de Nation & de moeurs, ils avoient auſſi coutume de changer de nom. Les Ecrivains Sacrés nous en fourniſſent des exemples, que *Grotius*, *Huet*, *Le Clerc*, & d'autres Savans ont raſſemblés. Nous ne nous engagerons pas plus avant dans cette diſcuſſion. Soit donc par attachement pour Carneade, ſoit pour ſe rendre plus agréable aux Grecs, il quitta ſon nom barbare d'Asdrubal, pour prendre celui de Clitomachus. Là deſſus on demande, comment le nom Grec répond au nom Phenicien? Nous ne copierons point ici tout ce que *Bochart*, ce

(*) . . . . *Sæculi ingeniorum ſimilitudines congregantis, & in ſtudium par, & in emolumentum.* Lib. I.

(**) Ἑλληνίζειν ἐποίησε. Orat. I. *de fortuna Alexandri.* Cap. VI.

ce grand appui de la Litterature Phenicienne, a dit dans son Canaan pour répandre du jour sur cette question. Il suffira d'indiquer en peu de mots notre propre sentiment. *Clitomachus*, en Grec Κλειτόμαχος, veut dire *illustre à la guerre*. Or *Asdrubal*, chez les Hebreux, ou si vous l'aimez mieux, chez les Pheniciens, אזריבעל, est un *Soldat armé, & prêt pour le combat*. Car *Baal* signifie également un Seigneur legitime, & un possesseur quelconque, qui est pourvû d'une certaine chose, & qui en fait un usage, soit bon, soit mauvais. Ainsi le mot Grec *Clitomachus* rend exactement le sens du mot Phenicien *Asdrubal*. *Bochart* fait aussi une Observation remarquable * sur le Pére de Clitomachus, qu' *Etienne de Byzance* nomme *Diognete*, ce que l'on peut fort bien exprimer en Phenicien par *Mabar-bal*, c'est à dire, *fils de Jupiter*.

* Geogr. S. p. 744.

V. Rapportons à présent ce qu' *Etienne* dit de Clitomachus, au mot, Καρχηδών: „ Clitomachus etoit aussi de Carthage; c'etoit „un Sage distingué, fils de Diognete, & qui avoit porté auparavant „le nom d'Asdrubas. Etant ensuite devenu Philosophe de la Secte „Academique, il succeda dans l'Ecole à Carneade de Cyrene. Etant „déjà âgé de XXVIII. ans, il alla à Athenes, sans avoir aucune teinture „des Lettres; & pour s'instruire, il devint Auditeur de Carneade.„ (*) *Eustathius* dit la même chose dans son Commentaire sur Denys Periegete. Si nous en croyons donc *Etienne*, & aprés lui *Jonsius*, Clitomachus vint à Athenes dans l'ignorance des premiers Elémens, ἄμοιρος τῶν πρώτων στοιχείων. Ce témoignage heurte de front celui de *Diogene Laërce*, qui dit; „que Clitomachus avoit déjà étudié la „Philosophie dans sa Patrie, & dans sa langue maternelle.„ (**) *Stanley* s'est conformé là dessus à *Diogene Laërce*. Dans cette opposition de ré-

(*) Καρχηδόνιος ἦν, σόφος μέγας, Κλειτόμαχος ὁ Διογνήτου, ὃς (καὶ) ἐκαλεῖτο Ἀσδρούβας, φιλόσοφος Ακαδημικὸς, διάδοχος Καρνεάδου τοῦ Κυρηναίου σχολῆς, ὃς κή ἔτει ἐλθὼν Ἀθηνάζε, ἄμοιρος ἦν τῶν πρώτων στοιχείων· καὶ ταῦτα μανθάνων, ἠκροάσατο Καρνεάδου.

(**) Τῇ ἰδίᾳ φωνῇ κατὰ τὴν πατρίδα ἐφιλοσόφει.

de récits, il faut voir, s'il n'y a point quelque moyen de conciliation. Mr. *Brucker* en a essayé un. „ Etudier la Philosophie, dit-il, φιλοσο„φεῖν, signifioit chez les Barbares s'attacher à tous les genres de litte„rature, qui peuvent préparer l'esprit à la Philosophie; & c'est dans „ce sens que Diogene Laërce peut avoir dit de Clitomachus, qu'a„vant que de venir à Athenes, il s'etoit imbu dans sa Patrie des „principes de la Philosophie. Assurément on a tout sujet de croire „qu'il n'etoit pas entiérement sans lettres, si l'on fait attention que „dans ces tems-là l'erudition Greque fleurissoit généralement en Asie." Cela ne leve pourtant pas la difficulté, fondée sur ce qu' *Etienne* dit positivement, qu' *Asdrubal* n'avoit aucune teinture des Lettres. Examinons donc la chose de plus prés. Un homme dénué de toutes connoissances, ne doit pas se mettre fort en peine des Academies, des Savans & de leurs disputes. Le vulgaire de nos Artisans s'inquiete-t-il de ce qu'ont pensé *Descartes*, ou *Leibnitz*, demande-t-il quelles matieres on agite dans l'Université de Leyde, ou quels sont les Professeurs les plus renommés de celle de Göttingen? Sur ce principe nous sommes persuadés, que si les Lettres avoient été entierement inconnuës a Clitomachus, il n'auroit jamais pensé à faire le Voyage d'Athenes. On ne desire point ce qu'on ne connoit point. Dans cet état le bruit de l'Academie, ni le renom de Carneade, n'auroient jamais frappé ses oreilles. Je crois donc que l'expression d'*Etienne* ne signifie autre chose, sinon que Clitomachus n'avoit pas encore les élémens de la Langue Grecque; c'est ce qu'il entend par πρῶτα στοιχεῖα. Mais d'ailleurs τῇ ἰδίᾳ φωνῇ ἐφιλοσόφει, il s'etoit appliqué dans sa langue aux Lettres & à la Philosophie, & il avoit eu des Maitres Pheniciens.

VI. L'esprit ne manquoit point aux Pheniciens, & l'Afrique pleine de la renommée des Philosophes Grecs, avoit elle-même produit des Savans, qui lui faisoient honneur. Ciceron dit, „ que Cli„tomachus, comme Phenicien, avoit beaucoup de pénétration, & „qu'il étoit avec cela fort studieux & appliqué. (*) *Eustathius* le

 „con-

(*) *Et acutum, ut Poenum, & valde studiosum ac diligentem.* Acad. Quæst. IV. 31.

„confirme, en assurant que, par sa pénétration naturelle, ὀξύτητι φύσεως, & par l'assiduité de son travail, il parvint à une grande connoissance de la Philosophie." Mais écoutons le témoignage avantageux que Strabon * rend aux Pheniciens. „Les Sidoniens, dit-il „passent pour les Auteurs de la plupart des Arts, & des plus beaux, „comme Homere l'a insinué. Ils sont de plus fort versés dans l'Astronomie & dans l'Arithmetique . . . . qu'ils croyent certainement „être passées d'eux aux Grecs. A' présent on peut puiser avec abondance dans ces Villes, (*Tyr & Sidon*) la connoissance de tout le reste „de la Philosophie. Si nous en croyons même Posidonius, l'ancien „dogme des Atomes est de Moschus Sidonien, qui a vêcu avant la „guerre de Troye. Mais laissons l'Antiquité. Sidon a eu de nos „jours des Philosophes distingués. Tels etoient Boëthus, qui s'est associé au travail de mes Commentaires sur la Philosophie d'Aristote, „& Diodote son frere. Antipater etoit Tyrien, aussi bien qu' Apollonius, qui vivoit un peu avant nous, & duquel nous avons une „Table des Ecrits de Zenon, & une liste des Philosophes qu'il a formés." Ainsi s'exprime Strabon. Or personne n'ignore que Carthage étoit une Colonie, & pour ainsi dire, une Fille de Tyr.

* Lib. XVI. p. 777.

VII. Au reste, il n'etoit pas possible que la Litterature Greque fût inconnuë dans l'Afrique, ni à Carthage, depuis que Battus avoit fondé Cyrene, qu' Alexandre avoit poussé ses victoires dans ces contrées, & que le Royaume des Ptolemées s'y étoit établi; d'où avoient résulté des liaisons, & un commerce perpetuel, entre les Africains & les Grecs. On peut rapporter ici ce passage de Justin: † Du tems de „Denys l'Ancien, Tyran de Syracuse, un Phenicien découvrit en trahison aux Siciliens l'arrivée de l'armée Phénicienne, qu'il leur écrivit en Grec; mais les Lettres ayant été interceptées, le traître fût „condamné, & le Senat rendit un arrêt, portant défense à tout Carthaginois, d'apprendre à l'avenir la Langue, ou l'Ecriture Grecque, „afin que désormais personne ne pût avoir commerce avec l'ennemi, „soit de bouche, soit par écrit, sans interprête." Mais cette Loi paroît avoir été bientot abolie par l'utilité, ou même par la necessité. Car,

† L. XX. 5.

pendant

pendant la premiere Guerre Punique, Regulus ayant vaincu les Pheniciens en Afrique au pied des murs de Carthage, les Carthaginois envoyerent en Grece, pour y lever des troupes à leur solde. Et Annibal, ce foudre de guerre, la terreur des Romains, eut pour Maître dans les Lettres Grecques *Sosile* de Lacedemone; ce qui fait dire à *Cornelius Nepos*. „Ce grand homme, continuellement occu„pé du mêtier de la guerre, ne laissoit pas de donner quelque tems aux „Lettres. Car on a quelques Livres de sa façon, écrits en Grec.„ *Plutarque*, dans la Vie de *Romulus*, fait mention d'un Savant Carthaginois, & rapporte; „que Sextius Sylla, Carthaginois, favorisé par „les Muses & par les Graces, lui avoit dit, qu'à l'enlevement des Sabi„nes le mot que Romulus avoit donné à ses soldats, étoit celui de „*Talassius*.„ Je laisse à d'autres à examiner, si ce *Sextius* est le même que *Sextus Empiricus*, qu'on a coutume d'appeller *Libyen*, & *Africain*. Au reste, tant que l'Afrique fut sous la domination des Romains, elle abonda en hommes doctes, parmi lesquels on compte d'illustres défenseurs de l'Eglise, les *Tertulliens*, les *Minutius*, les *Cypriens*, & d'autres.

VIII. Le desir d'apprendre, dont l'esprit de Clitomachus étoit tout rempli, ne lui permettant donc pas de se borner aux Maîtres Carthaginois, il se rendit à Athenes, qui étoit comme une Foire des beaux Arts; & nous pouvons inferer d'un endroit de Ciceron, * qu'il ne revit plus sa Patrie. Son principal but étoit de devenir Auditeur de Carneade, qui jouïssoit dans ce tems-la d'une haute réputation, & d'un grand crédit, dans les Lettres. Il y a une dispute au sujet de l'année de son départ. *Diogene Laërce* dit, qu'il vint à „Athenes étant déjà âgé de 40. ans, & qu'il y fut auditeur de Car„neade.„ (*) *Etienne*, & *Eusthatbius* qui n'a fait que le copier, s'expriment autrement, & ne lui donnent que vint huit ans, lorsqu'il vint fréquenter à Athenes l'Ecole de Carneade. (**) Quel est ici le témoin

* *Tusc. Quæst.* V. 37.

(*) Ἐλθὼν εἰς Ἀθήνας ἤδη τετταράκοντα ἔτη γεγονὼς, ἤκουσε Καρνεάδου

(**) Ὃς κη ἔτει ἐλθὼν Ἀθήναζε . . . . ἠκροάσατο Καρνεάδου.

moin le plus digne de foi, & à qui donnerons-nous la préference ? Casaubon dit, que le Texte d'*Etienne* est fautif; tandis que *Vossius* soutient, qu'il faut corriger *Diogene Laërce* sur *Etienne* & *Eustathius*. *Jonsius* se range à ce dernier avis. Pour nous, à dire vrai, nous trouvons la chose tout à fait incertaine, & impossible à décider, puisque nous ne savons, ni l'année de la naissance de Clitomachus, ni combien de tems il fut Auditeur de Carneade. Je serois pourtant plus disposé à m'en fier à *Diogene Laërce*, parce qu'il a écrit tout du long τετῃαράκοντα ἔτη, au lieu qu' Etienne a mis vint-huit en chiffres κη, & que le μ qui marque 40, étant mal écrit, peut fort bien avoir été changé dans ces deux lettres.

IX. Aussi-tot qu' *Asdrubal* fut arrivé, il alla trouver Carneade. „Celui-ci, dit *Diogene Laërce*, remarquant son ardeur pour le travail, „le reçut fort bien, il prit soin de le faire instruire dans la Langue „Grecque, & ensuite de l'exercer dans toutes les Sciences.„ (*) Il répondit si bien à ces soins, qu'il devint *le plus illustre*, ἐλλογιμώτατος, des disciples de Carneade, comme *Diogene Laërce* le remarque ailleurs. * Ciceron, qui fait souvent mention de Clitomachus, nous instruit là-dessus avec plus d'etenduë. „Ceux, dit-il, qui fréquenterent l'Ecole de Carneade, se distinguerent beaucop, & Clitomachus „fut un de ceux qui montra le plus de génie, qualité par où il excel„loit, comme Carneade par l'Eloquence, & Melanthius de Rhodes „par la douceur.„ (**) Les leçons des meilleurs Maîtres peuvent demeurer sans effet, si l'application & les talens des Disciples ne les secondent. *Eustathius* remarque que Clitomachus ne manqua point de

* Lib. IV. §. 66.

(*) Κακεῖνος ἀποδεξάμενος αὐτῦ τὸ φιλόπονον, γράμματά τε ἐποίησε μαθεῖν, καὶ συνήσκει τὸν ἄνδρα.

(**) *Qui Carneadem audierunt, admodum floruerunt; e quibus industria plurimum in Clitomacho fuit, ingenii non minus in hoc, quam in Carneade eloquentia, in Melanthio Rhodio suavitatis.* Quæst, Acad. IV. 6.

: coté là, &„ qu'il atteignit le comble de la Philosophie par la
iétration de son génie, & par la force de son application.„ (*)

X. Quoique personne ne contestât à Athenes le premier rang à
ieade, qui se l'etoit acquis par la beauté de son génie, & par la
: de son éloquence, qui le mettoient en état de se faire écouter,
que matiere qu'il traittât; Clitomachus, en s'attachant princi-
nent à lui, ne méprisoit pourtant, ni le Portique, ni l'Ecole Pe-
eticienne, où enseignoient alors *Diogene*, & *Critolaus*, deux
sophes trés célébres. Il se proposoit par là d'etre mieux instruit
pinions des autres Sectes, ce qui contribuë beaucoup à la solidité
voir. *Diogene Laërce* s'en exprime ainsi: „ Il s'attacha princi-
ment à trois sectes, savoir des Academiciens, des Peripateticiens,
ès Stoïciens.„ (**) Cependant il suivoit surtout Carneade, avec
el il fut *jusqu'à la vieillesse*, comme le dit Ciceron. Cette expres-
étant équivoque, il y en a qui la rapportent à Clitomachus, mais
Brucker l'entend avec plus de raison de Carneade, qu'on peut
re au nombre des Vieillards célébres, puisqu'il n'est mort qu'à
ns. Comme Carneade ne mettoit rien par écrit, Clitomachus
usieurs Ouvrages, où il donnoit l'exposition de sa doctrine, &
ribua beaucoup par là, comme le témoigne Diogene Laërce, à
ndre fameuse. (***)

XI. Sa renommée prenant ainsi tous les jours de nouveaux ac-
semens, les Atheniens lui donnerent le droit de Bourgeoisie,
ne ils l'avoient donné à son Maître Carneade. Nous tenons cet-
rticularité de *Symmachus*, Consul, & l'un des Orateurs les plus
s de son Siecle, qui la rapporte dans une de ses Lettres en ces
es. „*L'assemblée* des Atheniens jugea Carneade le Cyrenien, &
„Clito-

) Ὀξύτητι φύσεως καὶ ἄκρᾳ μελέτῃ εἰς πολὺ σοφίας ἐληλακώς.

*) Ἀνὴρ ἐν ταῖς τρισὶν αἱρέσεσι διατρίψας, ἐν δὲ τῇ Ἀκαδημαϊκῇ, καὶ Περιπατητικῇ, καὶ Στωικῇ.

**) Καὶ τὰ Καρνεάδου μάλιστα διὰ τῶν συγγραμμάτων ἐφώτισεν.

„Clitomachus le Phenicien, dignes du droit de Bourgeoisie; honneur
„que les Romains ont fait de même à Zaleucus, Legislateur des Lo-
„criens.„ (*) *Diogene Laërce* remarque expressément, qu' aprés la
mort de Carneade, Clitomachus lui succeda dans l'Ecole, qui fut
trés florissante sous lui. (**) *Crassus* dit dans l'*Orateur* de Ciceron:
„En revenant de ma Questure de Macedoine je passai à Athenes, où
j'entendis de trés grands hommes, l'Academie étant alors florissante,
„ce qu'on attribuoit à ce qu'elle étoit sous Charmides, Clitomachus
„& Eschine.„ (***) *L. Licinius Crassus*, l'homme le plus éloquent de
son tems, exerça sa Questure l'an de Rome IↃCL, longtems aprés la
mort de Carneade. C'est donc par erreur, qu'on trouve dans quel-
ques Exemplaires *Carneades*, au lieu de *Charmides*. Ce dernier, aussi
bien qu'Eschine, avoit été disciple avec Clitomachus. Au reste,
s'il est vrai, comme d'habiles gens le pensent, que *Philon* ait succedé
à Clitomachus dans l'Academie, l'an de Rome IↃCLIII, cela prou-
ve que celui-ci a gouverné l'Ecole pendant trente ans. En effet Car-
neade mourut l'an IↃCXXIII, & Clitomachus l'ayant aussi tot rem-
placé, il s'est écoulé trente ans jusqu'à l'an IↃCLIII. *Stobée* va
nous apprendre, de quelle maniere il termina sa vie. „Clitomachus,
„dit-il, étant devenu malade, tomba en léthargie; & ensuite ayant
[illegible]re.

(*) *Nam & Carneadem Cyrenaeum, & Poenum Clitomachum Atheniensis* Curia So-
cietate dignata est: itidem ut nostri Zaleucum, Legum Locrensium conditorem,
civitate donarunt. Symm. Epist. 65. Lib. X. Par *Curia*, Mr. *Fabricius*
entend l'*Ecole*, dans sa *Bibl. Græc.* Lib. III. p. 56. Il a tort, ce me semble. Curia,
Κυρία, ἡ κυρία Ἐκκλησία, c'est l'assemblée Républicaine du peuple Athe-
nien, où l'on traittoit de l'election des Magistrats, du droit de Bourgeoisie &c.
L'expression de Symmachus ne peut signifier autre chose.

(**) *Numenius* dit, dans *Euseb. Præpar.* L. XIV. p. 739. Διάδοχος Καρνεάδου τῆς
διατριβῆς καθίσαται Κλειτόμαχος. *Eusebe* avoit dit plus haut p. 726. qu'a-
prés Arcesilas, avoient paru Carneade & Clitomachus, qui rejettant les opinions
de leurs predécesseurs, avoient fondé la troisieme Academie.

(***) *Audivi summos homines, cum Quæstor ex Macedonia venissem Athenas, florente Aca-
demia, ut temporibus illis ferebatur, quod eam Charmides, & Clitomachus, & Æschi-
nes obtinebant.*

recouvré l'usage de ses sens, il dit: *Je ne serai pas la dupe de l'amour de la vie.* Et là dessus il se procura une mort volontaire. „ (*) Il voit puisé ces principes dans la doctrine des Stoïciens. *Diogene* le Cynique, & les Philosophes des autres Sectes, ont aussi donné de grands loges au meurtre de soi-même; & c'est ainsi que *Democrite* & *Isocrate* ont fini leurs jours. Les Chrêtiens ont pensé tout autremenr, émoin ces paroles de Lactance: „Il ne sauroit y avoir une action plus criminelle. Car si un homicide est coupable, parce qu'il fait périr un homme, celui qui se tuë lui même, commet un crime égal, puisqu'il détruit un homme.„ (**)

XII. Passons présentement aux Ecrits de Clitomachus, ou plu ot aux fragmens, & aux petites piéces détachées de sa doctrine, qu nt échapé à l'injure des tems. *Diogene Laërce* témoigne qu'il peut tre mis à juste titre au rang des Auteurs *Polygraphes.* „ Il étoit si aborieux, dit-il, qu'il a écrit plus de quatre cens Volumes." (***) Ciceron appuye ce témoignage du sien. „Clitomachus avoit beaucoup de talent. C'est ce que prouve la multitude de ses Livres.„ (****) Il parle entr'autres d'un Ouvrage de Consolation, dont il étoit auteur. „J'ai lû, ce sont ses termes, le livre, qu' écrivit autrefois Clitomachus aux Carthaginois ses Coneitoyens, pour les consoler. tant sur la ruïne de leur commune patrie, que sur leur captivité. On y trouve une Dissertation entiere de son Maitre Carneade, contre cette Proposition: *Que le Sage peut être touché d'affliction après la*

(*) Κλειτόμαχος νοσήσας, καὶ ληθάργῳ περιπεσὼν, ὡς ἀνένηψεν, οὐδέν με, ἔφη, ἐξαπατήσει ἡ φιλοζωΐα, καὶ ἐξήγαγεν ἑαυτὸν τοῦ βίου. *Stob. Florileg.* Cap VII.

(**) *Nihil hoc sceleratius fieri potest. Nam si homicida nefarius est, quia hominis exstinctor est; eidem sceleri obstrictus est, qui se necat, quia hominem necat.* Instit. L III. Cap. 18.

(***) Οὐδὲ εἷς τοσοῦτον ἤλασεν ἐπιμελείας, ὥστε ὑπὲρ τὰ τετρακόσια βιβλία συνέγραψε.

(****) *Industria plurimum fuit in Clitomacho. Declarat multitudo librorum.*

la destruction de sa Patrie.„ (*) Diogene Laërce nous a appris c
dessus, que Carneade n'avoit rien laissé par ecrit. Clitomachus l
avoit donc rendu le même service, que *Platon* & *Xenophon* ont rendu
à Socrate, en réduisant ses discours en Livres. Il est constant que
Carthage fut détruite par Scipion, l'an de Rome IↃCVIII. dix-huit
ans avant la mort de Carneade. Il faut donc que Clitomachus ait
quitté Carthage pour aller à Athenes avant la troisieme Guerre Punique.
On ne sauroit douter que la ruïne de Carthage, cette Ville si florissante, si superbe, rivale de Rome, n'ait causé une douleur incroyable à ceux de ses Citoyens, qui lui ont survêcu, & en particulier à ceux qui ont essuyé la honte, & les rigueurs de la captivité. C'est pour relever un peu leurs esprits accablés par ce terrible choc, que Carneade écrivit le Traitté de Consolation, dont nous venons de parler. Il y a bien lieu de regretter, que Ciceron, qui l'avoit entre les mains, ne nous en ait donné aucun extrait. Pour ce qui regarde le fonds même de la Question, Ciceron soutient au III. Livre des Tusculanes; *Que le Sage n'est pas susceptible de chagrin.* Elle etoit proposée dans l'Ouvrage de Clitomachus en ces termes: *Que le Sage peut être touché d'affliction, aprés la destruction de sa Patrie.* Carneade avoit avancé le contraire. Clitomachus permet l'affliction, comme une espece de remede à de tels malheurs, mais Ciceron la désaprouve. „Or, continuë-t-il au même endroit, par les belles choses qu'y dit „ce grand Philosophe, pour fortifier les affligés contre une calamité „présente, on juge qu'elles ne sont pas même nécessaires contre une „calamité inveterée; & que si ce même livre avoit été envoyé aux „Carthaginois quelques années aprés, il auroit trouvé dans leurs coeurs „moins de playes à guérir, que de cicatrices à effacer. Car on sait „assez, que par un décroissement insensible, & imperceptible, la dou„leur s'affoiblit d'elle-même en vieillissant. Non qu'il arrive aucun chan-

(*) *Legimus librum Clitomachi, quem ille eversa Carthagine misit consolandi gratia ad captivos cives suos. In eo est disputatio scripta Carneadis, quam se ait in Commentarium retulisse. Cum ita positum esset, videri fore in ægritudine sapientem, patria capta: quæ Carneades contra dixerit, scripta sunt.* Tusc. III. 22 Je me suis servi de la Traduction de l'Abbé d'*Olivet.* Tom. II. p. 60.

„changement à la chose qui en a fait le sujet. Mais c'est que l'expe-„rience nous enseigne ce que la raison auroit dû nous apprendre; „savoir, que les malheurs de la vie sont en effet beaucoup moins „grands, qu'il ne le paroissent d'abord." * Le dogme de la secte Cyrenaïque étoit: *Que l'on pouvoit se laisser aller au chagrin, lorsqu'il survenoit quelque accident inopiné.* A cela Ciceron répondoit: *Qu'il ne faloit pas que rien parut inopiné au Sage.* Et en parlant ainsi, il avoit devant les yeux l'image de Socrate, dont *Elien* rapporte ces belles particularités: „Xantippe avoit coutume de dire, que dans ce nom-„bre presque infini de révolutions, auxquelles la République fut ex-„posée, on vit toujours Socrate conserver le même visage, soit qu'il „sortit de la maison, soit qu'il y rentrât. Car il envisageoit tout du „même oeil, & conservoit même l'enjoüement de son humeur, tant „il étoit au dessus de tous les sujets de tristesse & de crainte.

* *Tuscul.* de l'Abbé d'*Olivet.* ub. sup. p. 60. 61.

XIII. Clitomachus écrivit quatre Livres, *sur la suspension du jugement*, περὶ ἐποχῆς. C'est Ciceron qui nous en instruit en ces termes. „Je n'avancerai rien qu'on puisse soupconner être de mon in-„vention; j'aurai pour garant Clitomachus, qui a vêcu jusqu'à „la vieillesse avec Carneade, & qui avoit beaucoup d'esprit, „comme en ont les Pheniciens, & beaucoup d'application à l'e-„tude. On a quatre Livres de lui, *sur la suspension du jugement.* Ce „que je vais rapporter, est tiré du premier." (*) Nous verrons plus bas le passage que Ciceron tire de ce Livre premier, & nous l'examinerons. Clitomachus a encore traitté la même matiere dans deux autres Ouvrages, adressés l'un au Poëte *Lucilius*, & l'autre au Consul *Censorinus.* Recourons encore à Ciceron. „J'ai expliqué, dit-il, „peu auparavant, en suivant Clitomachus, comment Carneades s'ex-„primoit là dessus; écoutez ce que Clitomachus lui même en dit, „dans le Livre qu'il a adressé au Poëte Lucile. Il avoit déjà écrit sur „le même sujet dans un Ouvrage adressé à L. Censorinus, celui qui a

(*) *Nec vero quicquam ita dicam, ut quisquam id fingi suspicetur: a Clitomacho sumam, qui usque ad senectutem cum Carneade fuit, homo & acutus, ut Pœnus, & valde studiosus & diligens. Et quatuor ejus libri sunt,* de sustinendis assensionibus. *Hæc autem quæ jam dicam sunt sumta de primo.* Acad. IV. 31.

„été Consul avec M. Manilius. Voici donc à peu prés ses propres ter-„mes. “ (*) Nous rapporterons ailleurs les paroles mêmes dont il s'agit, & nous les éclaircirons.

L. Marcius Censorinus, & *M. Manilius*, furent Consuls l'an de Rome ıↄcv. aprés qu'on eut résolu la troisieme guerre Punique, pour la conduite de laquelle les deux Consuls furent envoyés en ıↄcvı. Le Poëte Lucile, qui tient le premier rang parmi les Satyriques, avoit seize ans en ıↄcxxı. & servoit alors comme Cavalier sous Scipion, dans la guerre de Numance. Mais on ne sauroit déterminer l'année dans laquelle Clitomachus dédia ses Livres au Poëte, ou aux Consuls. La *Chronique de S. Jerome* met la mort de Lucile à l'an ıↄcl. Ces Observations répandent sur l'age de Clitomachus un jour, dont *Jonsius* s'est déjà apperçu.

XIV. Peu s'en faut qu'on n'ait mis notre Philosophe dans le Catalogue des Athées *; mais il faut le laver de cette tache, que *Theophile*, Evêque d'Antioche a voulu lui imprimer. Voici l'endroit où il en parle. „Pythagore affirme que les Dieux ne prennent aucun „soin des hommes ; & combien de choses l'Academicien Clitoma-„chus n'a-t-il pas avancées en faveur de l'Atheisme? “ (**) Le savant *Reinesius* a examiné ce passage †, & sa Critique merite de trouver place ici. „Nous ne nous arrêterons point, dit-il, à discuter si ce que „Theophile dit de Pythagore est vrai. Il y a une infinité de témoins „qui déposent que ce Philosophe avoit de tout autres sentimens au „sujet de la Divinité. . . . . . Vient ensuite la proposition interro-„gative concernant Clitomachus, qui est équivalente à une proposi-„tion affirmative : *Combien de choses l'Academicien Clitomachus n'a*

* Voy. *Reimann. Hist. Atheism.* p. 171.

† *Var. Lect.* Lib. III. Cap. 6.

(*) *Explicavi paulo ante Clitomacho autore, quomodo ista Carneades diceret ; accipe quomodo eadem dicantur a Clitomacho in eo libro quem ad Caium Lucilium scripsit Poetam, cum scripsisset iisdem de rebus ad L. Censorinum, eum qui Consul cum M. Manilio fuit. Scripsit igitur his fere verbis.* ubi sup. 32.

(**) Φησί τε (ὁ Πυθαγόρας) τῶν πάντων θεὲς ἀνθρώπων μηδὲν φροντίζειν· ὁπόσα τε Κλιτόμαχος ὁ Ακαδημικὸς περὶ ἀθεότητος εἰσηγήσατο. *Theop. ad Autolyc.* Lib. III.

„*n'a-t-il pas avancées en faveur de l'Atheisme?* 'A Pythagore Athée „il joint Clitomachus, comme ayant pareillement douté de l'exi„ſtence des Dieux, & bientot aprés il aſſocie à Clitomachus Critias, „Protagoras, & Euemerus de Tegée, ou de Meſſene, ſur l'impieté „duquel on peut conſulter Plutarque. Au reſte on ſait aſſez ce que „c'etoit que les ἀποφατικοὶ λόγοι, *negantes ſermones*, au ſujet des „Dieux. Mais, (continuë *Reineſius*, dans le Texte Latin duquel il „y a ici une faute d'impreſſion à corriger,) mais, à l'egard de Clito„machus Carthaginois, diſciple de Carneade, & le plus diſtingué des „Philoſophes de la nouvelle Academie, au jugement d'Athenée, j'ai „été longtems en ſuſpens, s'il faloit lui imputer la même héréſie, jus„qu'à ce qu'à la fin j'ai trouvé dans Sextus Empiricus, l'argument en „forme de Sorites, dont il ſe ſervoit pour nier l'exiſtence des Dieux. „C'eſt celui que Theophile a en vüe dans ce paſſage, & j'ai admiré le „laborieux aſſortiment d'impieté & de folie, que ce raiſonnement „raſſemble.“ J'admire la précipitation de Reineſius à condamner Clitomachus, lui qui a été ſi facile à excuſer Pythagore. Le *Sorites* de Clitomachus ne m'a point épouvanté ; & bien loin d'y voir l'Atheïſme, il m'a paru uniquement propre à détruire de fond en comble le Polytheïſme, & à renverſer la gloire des fauſſes Divinités. Mais rapportons l'endroit même de *Sextus Empiricus*.* „Carneade, dit-il, „avoit auſſi propoſé quelques Argumens en forme de Sorites. Son „Ami Clitomachus les a mis par écrit, comme étant d'une trés grande „force ; & voici comment ils ſont conſtruits. Si Jupiter eſt Dieu, „Neptune, entant que ſon frere, eſt auſſi Dieu. Si Neptune eſt „Dieu, Achelous l'eſt auſſi. Si Achelous l'eſt, le Nil l'eſt auſſi. Si le „Nil l'eſt, chaque fleuve le ſera. Si les fleuves le ſont, il en ſera de „même des ruiſſeaux ; ſi les ruiſſeaux, cela nous mene aux torrens. Or „les torrens ne ſont par des Divinités, donc Jupiter n'eſt pas Dieu.“ Tout va bien juſqu'ici ; & perſonne d'entre nous ne penſe autrement. Mais ce qu'il ajoute, cloche furieuſement. *Si ces choſes étoient des Divinités, Jupiter ſeroit auſſi Dieu. Ce ne ſont donc pas des Divinités.* Raiſonnement indigne d'un Philoſophe ! Mais allons plus loin, afin de mieux approfondir ſon ſentiment. L'Academicien *Cotta* preſſe le

* Liv. IX Ch. 182.

le même Argument contre le Stoïcien *Balbus*, dans le Traitté de Ciceron *de la Nature des Dieux*. „Si la Lune est une Divinite, il faut „que l'Etoile du matin, que les autres Planetes, que toutes les Etoiles „fixes soient de la même condition. Et pourquoi n'en sera pas l'Arc-„en-Ciel. . . . . . les Nuées. . . . les Tempêtes. . . . . . Vous en „ferez part (de cet honneur) aux Pluyes, aux Ondées, aux Orages, „aux Tourbillons." * Mais toute cette longue & fatiguante dispute est terminée d'un seul coup par cette sentence de Ciceron. „Ainsi „raisonnoit Carneade, non dans la vuë de sapper l'existence des Dieux, „(car qu'y auroit-il de moins convenable à un Philosophe?) mais „pour montrer avec évidence que sur cette matiere les Stoïciens ne „disent rien de plausible." † C'est ce qui engage *Cotta* à terminer son discours par cette exclamation. „Pour apprendre donc l'existen-„ce des Dieux, & quels ils sont, je dois m'adresser à d'autres qu'à „vous, Stoïciens." * Au reste ce n'est point ici le lieu d'examiner les erreurs des Stoïciens sur la Divinité. Il y a un Traitté de Jacobus *Thomasius*, qui peut suffire à ceux qui voudront en savoir davantage là dessus. (*)

* *Entr. de Cicer. sur la nat. des Dieux.* Trad. de l'Abbé *d'Olivet* Tom. II. p. 185. 186.

† *ibid.* p. 178.

* *ibid.* p. 196.

XV. *Sextus Empiricus* nous apprend que Clitomachus étoit ennemi de la Rhetorique, comme les autres Academiciens. „Critolaus, „dit cet Auteur, & les Academiciens, entr'autres Clitomachus & „Charmidas, font ordinairement beaucoup d'objections contre la „Rhetorique. Ils ne bannissent pas les Arts des Villes, reconnoissant „qu'ils sont fort utiles à la vie; tout comme nous ne chassons pas les „Fermiers de nos métairies, ni les Bergers de nos troupeaux. Mais „pour l'Art de parler (Ῥητορικὴν) ils en sont les ennemis declarés, ils „le poursuivent en tous lieux; & le chassent de par tout, comme le „Legislateur de Crete, qui a defendu l'entrée de son Ile à tous ceux „qui se vantent d'eloquence, & sont arrogamment enflés de ce talent. „Lycurgue Legislateur de Sparte, & émule de Thales Legislateur de „Crete, a donné aux Lacédemoniens la même Loi." On peut lire le reste dans *Sextus*. Le passage suivant de *Stobée* doit peut-être se rappor-

(*) C'est celui *de Exustione Mundi Stoica.*

rapporter à ceci. „Clitomachus, dit-il, comparoit la Dialecti„que à la Lune, parce que, comme cet Astre, elle a des accroif„femens & des decroiffemens perpetuels." (*) Mr. *Brucker*, aprés avoir éxaminé le fens de ces mots, décide ainfi. * „Il femble avoir „voulu défigner par cette comparaifon la fortune de l'Academie, qui „aprés avoir été fort brillante fous Arcefilas, dont les difciples furent „en grand nombre, décrut, & reprit enfuite un nouvel éclat fous „Carneade. Comme donc la Dialectique eft ornée par les fecours du „génie & l'eloquence, de même l'Academie reçut fes accroiffemens & „fes décroiffemens." Mais avec la permiffion de cet Auteur fi verfé dans l'Hiftoire Philofophique, nous fommes d'un tout autre avis. Il ne s'agit là, ni de l'état floriffant de l'Academie, ni de fa décadence; il eft uniquement queftion de la Dialectique, cet Art de difputer, & de juger du vrai & du faux; Art, dont les Philofophes de ce tems-là faifoient un trés fréquent abus par le moyen de la Rhétorique. Cela l'expofoit presque à un mépris univerfel; & *Stobée*, dans l'endroit que nous avons cité, allégue les temoignages de plufieurs Auteurs, qui jugeoient fort défavantageufement de la Dialectique. „Arcefilas avoit „dit, que les Dialecticiens étoient femblables à ceux, qui jouënt aux „jeux de hazard, en ce que les tromperies font fort de leur goût; & „qu'ainfi on doit fuïr la Dialectique, comme n'etant propre qu'à mettre „tout en confufion. Carneade difoit que la Dialectique reffemble à „un Polype, qui dévore fes pieds, lorsqu'ils fe font accrus; les Dia„lecticiens, quand ils fe font fortifiés dans leur Art, réfutant de même „leurs propres opinions." Clitomachus ne s'ecarta pas de la doctrine de fon Maitre, en comparant la Dialectique à la Lune. En effet comme la fplendeur de cet Aftre, va tantôt en augmentant, tantôt en diminuant, de même il y a des tems où la Dialectique eft confiderée, d'autres où elle eft plongée dans l'obfcurité; des tems où on l'admire, d'autres où on la méprife; des tems d'elévation & d'abaiffement; des tems

* *Hift. Ph* Tom. I. p. 77

(*) Κλειτόμαχος εἴκαζε τὴν Διαλεκτικὴν τῇ Σελήνῃ. καὶ γὰρ ταύτην ἐ παύεσθαι φθίνεσαν καὶ αὐξαμένην. *Stob.* Serm. LXXX. p. 473.

tems enfin où elle produit des fruits, & d'autres où elle les dévore. Carneade lui même en fournit un exemple, lorsqu'etant à Rome, il y déclama avec une force égale pour & contre la justice. C'est de Lactance que nous tenons cette Histoire. „Carneade, dit-il, ayant été „envoyé à Rome par les Atheniéns, fit un discours fort étendu sur „la justice, en présence de Galba, & de Caton le Censeur, le plus „grands Orateurs de ce tems-là. Mais le lendemain il détruisit tout ce „qu'il avoit dit par un discours contraire, & fit main basse sur cette „justice à la quelle il avoit donné de grands éloges; en quoi il ne „montra pas la gravité d'un Philosophe, qui doit être d'un jugement „rassis, & ferme dans ses opinions. Mais c'étoit plutot un simple „exercice Oratoire, qui lui laissoit la liberté de soutenir le pour & le
* VII. 30. „contre.“ Caton, au rapport de Pline, * fut d'avis qu'il faloit congedier sur le champ un pareil homme, avec les raisonnemens duquel *il étoit si difficile de parvenir à la connoissance de la Vérité.*

XVI. *Diogene Laërce*, dans sa Vie d'*Aristippe*, cite les Livres de Clitomachus *sur les Sectes*, en ces termes. „*Meleagre*, dans son „second Livre *des Opinions*, & Clitomachus dans le premier qu'il a „écrit des *Sectes*, leur attribüent (aux Philosophes Cyrenaïques) d'a„voir également méprisé la Physique & la Dialectique.“ (*) Sur quoi *Menage* remarque fort bien; „qu'on ne sait qui étoit ce Meleagre, ni „quand il a vêcu, & que les Livres de Clitomachus sur les Sectes ne „se trouvent cités en aucun autre endroit.“ *Athenée* introduit aussi notre Philosophe sur la Scéne, en lui donnant de pompeux éloges. „C'est pourquoi, dit-il, Clitomachus Carthaginois, l'un des plus „profonds dans la spéculation que la nouvelle Academie ait produit, „a dit d'un Athlete Thebain de son tems, qui surpassoit tous les au„tres hommes en force, que c'etoit parce qu'il se nourrissoit de vian-

„de

(*) Μελέαγρος δὲ ἐν τῷ δευτέρῳ περὶ δόξων, καὶ Κλειτόμαχος ἐν τῷ πρώτῳ περὶ τῶν αἱρέσεων, φάσιν, αὐτὺς (τὺς Κυρηναικὺς) ἄχρηστα ἡγεῖσθαι τόδε φυσικὸν μέρος καὶ το διαλεκτικόν. Lib. II. § 92.

„de de chevre.“ C'eſt encore de Clitomachus que Stobée a tiré les vers ſuivans :

Dans le ſein des plaiſirs la fortune perfide
Détruit notre bonheur par un ſouffle rapide ;
Et les rafinemens de notre volupté
Sont, helas ! le joüet de ſa legereté. (*)

XVII. Tout ce qui nous reſte à préſent de la Philoſophie de Clitomachus, eſt dû aux ſoins de Ciceron, qui rapporte ce paſſage remarquable, tiré des Livres adreſſés au Poëte Lucile, & au Conſulaire Cenſorin, *ſur la Suſpenſion du jugement.* „Voici à peu prés, dit „Ciceron, ce qu'a écrit Clitomachus. Car ſes paroles me ſont bien „connuës, parce que ce Livre renferme les premiers Elémens, & com„me toute la doctrine des mêmes matieres dont nous traittons à pré„ſent. Mais revenons à ce qu'il a écrit, &c.“ (**) Mettons ici ſous les yeux du Lecteur l'état de la Queſtion, dont il s'agiſſoit. Le quatrieme Livre des Queſtions Academiques contient une diſpute de Ciceron avec Lucullus. Celui ci avoit affirmé, qu'il y a des choſes d'une verité inconteſtable. Il en appelle d'abord à l'experience des ſens. Il dit que les idées, ou les choſes apperçuës par les ſens, ſont

(*) Τοῖς εὖ παθοῦσιν ἀντιπνεύσασ' ἡ τύχη,
Τὰ πάντα συγχεῖ, πάντα ναυαγεῖν ποιεῖ,
Τά τῇ Φρονήσει καὶ λογισμοῖς ὄρθια
Εκπεπονῆσθαι δοκοῦντα πρὸς τὸ ζῆν καλῶς.

Ce que Grotius a rendu par ces Vers *Latins :*

Fortuna reflans proſpere viventibus
Conturbat, afflictatque naufragio omnia,
Quæcunque vitæ condiendæ ſuaviter
Prudens repererat ingenî ſolertia.

(**) *Scripſit Clitomachus his ferè verbis. Sunt enim mihi nota, propterea quod ipſarum earum rerum, de quibus agimus, prima inſtitutio, & quaſi diſciplina illo libro continetur. Sed ſcriptum eſt ita.* On trouvera plus bas la ſuite du paſſage, qui renferme la doctrine de Clitomachus, § XX.

ſont claires & certaines : Qu'il n'eſt pas poſſible, que celui qui reſſent de la douleur, n'ait point de douleur ; & qu'il n'y ait aucune difference entre un homme qui ſouffre, & un autre qui eſt dans la Volupté ; Que des perceptions des ſens naiſſent & ſe forment les notions, *ἔννοιαι*, & de là les Arts, les Sciences, la Sageſſe, la Vertu, qui par conſéquent ne ſont pas des choſes fauſſes, mais doivent au contraire être regardées comme fixes & immuables. Ciceron prend le parti oppoſé, & ſoutenant le ſentiment des Academiciens, il s'efforce de répondre à Lucullus. Il prétend que celui qui donne ſon aſſentiment aux choſes, qui lui paroiſſent veritables, tombe ſouvent dans l'erreur ; qu'il ne faut point ſe fier aux ſens ; que la plupart des choſes ſont probables, mais qu'il n'y en a aucune de certaine : Que la probabilité ſuffit pour la vie humaine. Ciceron, qui étoit un grand partiſan du doute, ſe ſert donc ici de tout ce qui lui paroit propre à établir la doctrine des Academiciens, & il en appelle principalement au témoignage de Clitomachus. C'eſt ce qui nous oblige à y répandre encore quelque jour.

XVIII. C'eſt de Socrate que la plûpart des Sectes Philoſophiques, mais ſurtout l'Academie, tirent leur origine. Avant ce pére de la Philoſophie Morale, les études des Sages avoient principalement pour objet la Phyſique. Ciceron exprime avec beaucoup d'elégance les ſervices que Socrate rendit à la Philoſophie. „C'eſt lui, dit-il, comme „tout le monde le reconnoit, qui a retiré la Philoſophie de l'étude „des profondeurs & des myſteres de la Nature, à laquelle tous les „Philoſophes s'occupoient avant lui, & qui l'a appliquée à la vie „commune, en s'attachant à l'examen des vertus & des vices, & de „tout ce qui concerne le bien & le mal. Il croyoit que la recherche „des choſes, qui ſe paſſent au Ciel, étoit trop élevée au deſſus de nos connoiſſances, & que, quand même nous y atteindrions, elle ſeroit inu„tile pour bien vivre. Dans tous les diſcours de Socrate, ajoute Ci„ceron, il n'affirmoit rien lui-même, mais il ſe bornoit à réfuter les „autres.“ (*) *Turnebus* remarque fort bien à l'occaſion de ce paſſage ; qu'il

(*) *Socrates mihi videtur, id quod conſtat inter omnes, primus a rebus occultis, & ab ipſa*

qu'il y avoit dans ce tems-là une prodigieuse quantité de Sophistes, qui se vantoient de tout savoir, & qui gâtoient l'esprit de la jeunesse par la persuasion d'une fausse science. C'est ce qui jetta Socrate dans la route opposée, & lui fit faire profession de ne rien savoir, afin de délivrer les hommes de leurs erreurs. Les Academiciens qui vinrent aprés Socrate, sous la conduite de Platon, réduisirent la Philosophie en art, ce que Socrate n'avoit point approuvé. Ciceron continuë donc au Chapitre suivant en ces termes. „On tient de Platon trois „manieres differentes de philosopher; la premiere a pour objet la vie „& les moeurs; la seconde traitte des secrets de la nature; la troi„sieme s'occupe à la dispute, & sert à juger du vrai & de faux, de ce „qui est bon, ou mauvais dans le discours, de ce qui s'accorde avec „nos idées, & de ce qui y répugne.“ (*) Cela nous apprend que la Philosophie de Platon étoit divisée en trois parties, la Morale, la Physique & la Dialectique.

XIX. Or le but de la Dialectique chez les premiers & les principaux Philosophes, tant de l'Academie, que de l'Ecole Peripateticienne, n'etoit pas de remplir l'esprit de doutes, & de le faire flotter dans l'incertitude; au contraire ils la regardoient comme un moyen de déterminer avec plus de certitude le vrai & le faux. Ciceron nous le dit en termes exprés. „La troisieme partie de la Philosophie (la „Dialectique) étoit traittée par les uns & les autres suivant ce princi„pe; c'est que le discernement de la verité, bien qu'il tire son origi„ne des sens, n'appartient pourtant pas aux sens. Ils vouloient que „l'Ame (*Mens*) soit le juge des choses, & croyoient qu'on ne pou-

 „voit

ipsa natura involutis, in quibus omnes ante eum Philosophi occupati fuerunt, avocavisse Philosophiam, & ad vitam communem adduxisse, ut de virtutibus & vitiis, omninoque de rebus bonis & malis quæreret: cœlestia autem vel procul esse a nostra cognitione censeret, vel si maxime cognita essent, nihil tamen ad recte vivendum. Hic in omnibus fere sermonibus ita disputat, ut nihil affirmet ipse, refellat alios. Acad. Quæst. I. 4.

(*) *Fuit ergo jam accepta a Platone philosophandi ratio triplex: una de vita & moribus; altera, de natura & rebus occultis; tertia de disserendo, & quid verum, quid falsum, quid rectum in oratione pravumque, quid consentiens, quid repugnet judicando.* lib. 5.

„voit s'en rapporter qu'à elle, parce qu'il n'y a qu'elle qui apperçoi-
„ve les choses d'une maniere simple, unique, & telles qu'elles sont
„. . . . . Ils ne plaçoient la *Science* nulle part que dans les *notions* de
„l'Ame, & dans les raisonnemens.“ (*) Qui est-ce qui ne s'apperçoit pas que cette Dialectique est la même chose que la Logique de notre Philosophie moderne. Dans toutes les idées que nous formons par le secours des sens, il demeure quelque chose de confus, qui nous empêche de les bien distinguer, ou définir. C'est ce qui fait que les Corps eux-mêmes avec toutes leurs qualités & proprietés, sont si profondément cachés, qu'il faut se borner aux seules conjectures & aux opinions. Il en est tout autrement des notions, que nous acquerons par la voye de l'Entendement: il n'y reste aucun doute, tout y est clair & distinct. Mais revenons à notre sujet. De savans hommes ont remarqué que Platon a marché à cet égard sur les traces de Socrate; que, pour confondre l'arrogance des Sophistes, il a souvent envelopé ses Dogmes, qu'il n'est pas aisé de demêler dans les disputes, où il les place, & qu'il n'a jamais rien decidé avec autorité en public, surtout à l'egard des choses, dont les sens nous procurent seuls la connoissance; en sorte qu'il ne levoit le voile que dans ses entretiens particuliers, & en faveur des Disciples, auxquels il vouloit bien révéler les mysteres de sa doctrine. Depuis, lorsque le credit des Stoïciens se fut accrû, & que les Dialecticiens abusant de plus en plus de leur art, eurent commencé à tenir une conduite tout à fait insolente, *Arcesilaüs*, pour confondre les uns & les autres, changea le plan de la Philosophie Academique, & enseigna à douter de tout. Mr. *Brucker* ayant recherché & dévelopé avec beaucoup d'exactitude les causes de cette espece de révolution, c'est à lui que nous renvoyons.* Après la mort d'*Arcesilaus*, qui joignoit beaucoup d'esprit à beaucoup de savoir, l'Academie devint décriée, sous prétexte qu'el-

* *Hist. Phil.* T. I. p. 752.

(*) *Tertia Philosophiæ pars* (Dialectica) *sic tractabatur ab utrisque: quanquam oriretur a* sensibus, *tamen non esse judicium veritatis in sensibus.* Mentem *volebant rerum esse judicem: solam censebant idoneam, cui crederetur, quia sola cerneret id, quod semper esset simplex & unius modi, & tale quale esset.* . . . . Scientiam *autem nusquam esse credebant, nisi in animi* notionibus *ac* rationibus. Ac. Qu. IV. 8.

qu'elle détruisoit toute Science, & qu'elle étoit ennemie de la Religion & du culte des Dieux. C'est ce qui engagea Carneade, successeur d'Arcesilaus, à adoucir ce que son prédecesseur avoit avancé de trop dur, pour ne pas encourir l'indignation du peuple & des Magistrats. Ciceron nous apprend comment il s'y prit; ce fut, en avoüant qu'il y avoit des choses certaines dans la Nature, mais en ajoutant que la foiblesse de l'entendement humain ne permettoit pas d'appercevoir & de comprendre les essences des choses; qu'ainsi il n'y avoit point à la verité de *Science*; mais qu'il restoit *l'opinion*, dont les *probabilités* étoient l'objet. D'où il concluoit, *qu'il ne faloit rien affirmer, ou nier à la legére; que le Sage suivoit les ressemblances, & les probabilités, en se réglant sur leurs degrés, & que c'est là dessus qu'il se gouvernoit dans tout les cours de sa vie* *.

XX. Aprés ces éclaircissemens, il sera facile de parvenir à l'intelligence du fragment de Clitomachus, que Ciceron nous a conservé, & dont voici les termes: „Que le sentiment des Academiciens „consiste à dire, que les choses different entr'elles de maniere qu'il y „en a qui paroissent plus probables, & d'autres moins: mais que cela „ne suffit pas, pour qu'on puisse dire des unes qu'elles peuvent être „apperçües, & des autres qu'elles ne peuvent l'etre, ou qu'il y a plu„sieurs choses probables qui se trouvent fausses; & que rien de ce „qui a été une fois apperçu & connu, ne peut être faux. *Il dit* donc, „que ceux-là se trompent beaucoup, qui prétendent, que *l'Aca„demie détruit le temoignage des sens*, puisqu'elle n'a jamais avancé „qu'il n'y ait, ni couleur, ni saveur, ni son: Que tout s'est réduit „à soutenir, que les sens ne renfermoient point un caractere propre „de verité & de certitude, qui ne se trouvât nulle part ailleurs. *A quoi „Clitomachus ajoute*; qu'il y a deux sens dans lesquels on affirme que „le Sage *suspend son jugement*; l'un, par où l'on entend qu'il ne don„ne en effet son assentiment à rien; l'autre, qui lui attribüe seule„ment de s'abstenir de répondre, & de prononcer sur quoique ce soit, „pour approuver ou pour condamner, pour nier ou pour affirmer. „Que cela étant ainsi, le premier jugeoit à propos de n'acquiescer „jamais à rien; au lieu que l'autre se déclaroit pour la probabilité, la

* Acad. IV. 31.

„ſuivant partout où elle ſe trouvoit, & diſant, *Oui*, ou *Non*, ſui„vant qu'elle exiſtoit, ou qu'elle manquoit. Mais, comme il faut „que celui-là même, qui refuſe ſon acquiescement à tout, agiſſe pour„tant, & ſe mette en mouvement, il laiſſe ſubſiſter les répreſentations „des choſes, qui nous excitent à l'action; qu'il admet pareillement „les cas, où étant interrogés, nous pouvons répondre pour & con„tre, en ſuivant uniquement pour régle que les choſes nous parois„ſent ainſi, pourvu que nous nous gardions bien *d'acquieſcer* en effet: „& il pouſſe les précautions jusqu'à ne pas permettre qu'on ſe confor„me en général aux idées ſous lesquelles les choſes ſe préſentent à „nous, mais ſeulement à celles qui ne ſouffrent aucune difficulté." (*) C'eſt là le précis de le doctrine de Clitomachus; aprés quoi Ciceron rapporte une hiſtoire de Carneade *, qui a moins de rapport à notre ſujet. Il faut ſe rappeller encore ici un paſſage de *Sextus Empiricus*, où il s'efforce de faire ſentir la difference qu'il y a entre la Philoſophie Sceptique, & celle de l'Academie. Il y attribüe à Carneade, & à Clitomachus d'enſeigner: *que la probabilité nous entraîne à l'acquieſcement par une* pente extrémement forte. (**)

* *Academic. Quæſt.* IV. 45.

XXI.

(*) *ACADEMICIS placere; eſſe rerum ejusmodi diſſimilitudines, ut alia probabiles videantur, alia contra. Id autem non eſſe ſatis, cur alia percipi poſſe dicas, alia non poſſe; propterea quod multa falſa probabilia ſint, nihil autem falſi perceptum & cognitum poſſit eſſe. Itaque AIT, vehementer errare eos, qui dicant* ab Academia ſenſus eripi, *a quibus nunquam dictum ſit, aut colorem, aut ſaporem aut ſonum nullum eſſe. Illud ſit diſputatum, non ineſſe in his propriam, quæ nusquam alibi eſſet, veri ac certi notam: ADJUNGIT CLITOMACHUS: dupliciter dici ASSENSUS SUSTINERE Sapientem: uno modo, cum hoc intelligatur, omnino eum rei nulli aſſentiri: altero, cum ſe a reſpondendo, ut aut approbet quidpiam, aut improbet, ſuſtineat, neque negat aliquid, neque ajat. Id cum ita ſit: alterum placere, ut nunquam aſſentiatur; alterum tenere, ut ſequens probabilitatem, ubicunque hæc occurrat, aut deficiat, aut ETIAM, aut NON, reſpondere poſſit; nec ut placeat, eum qui de omnibus rebus contineat ſe ab aſſentiendo, moveri tamen, & agere aliquid, reliquit ejusmodi viſa approbari, quibus ad actionem excitamur; item ea quæ interrogati in utramque partem reſpondere poſſumus, ſequentes tantum modo quod ita viſum ſit, dum SINE ASSENSU: neque tamen omnia ejusmodi viſa approbari, ſed ea quæ nulla re impedirentur.* Acad. Qu. IV. 32.

(**) Πείθεσθαι καὶ πιθανὸν εἶναι μετὰ προσκλίσεως σφοδρᾶς, *Hypotyp.* Lib. I. c. 33.

XXI. Je ne ſçai ſi en examinant bien tout ce raiſonnement de Clitomachus, & même toutes les *Queſtions Academiques* de Ciceron, on ne ſe convaincra pas que ce ſont de pures Logomachies. Les Academiciens ne détruiſent pas le témoignage des ſens. Ils ne nient point qu'en regardant la craye, nous ne voyons la couleur blanche. Mais ils ne veulent pas qu'on donne à cela le nom de certain & de vrai, ils aiment mieux celui de probable. Pourquoi ? C'eſt parce qu'il pourroit être, que la blancheur, quoiqu'elle paroiſſe, n'exiſtât pas. Mais on peut éviter le même écueil par la ſimple circonſpection dans nos jugemens ; & ce moyen ſeul ſuffit pour nous guider dans la connoiſſance des choſes à un degré d'evidence, qui faſſe ſucceder la certitude à la probabilité. Il y a plus ; les choſes que nous comprenons, non par les ſens, mais par l'entendement, en les déduiſant des principes inébranlables de l'Ontologie & de la Métaphyſique, du principe de Contradiction, & de celui de la Raiſon ſuffiſante, des définitions exactes, & des propoſitions identiques ; ces choſes, dis-je, peuvent atteindre à un ſi haut degré de verité, qu'il ne reſte plus aucun lieu à l'equivoque & au doute. C'eſt ce que paroit avoir reconnu S. Auguſtin, qui ſe déclare redevable de pluſieurs connoiſſances à la Dialectique. „Par elle, *dit-il*, je connois nombre d'autres veri„tés. Mais qu'il eſt grand ce nombre ; comptez-les, ſi vous le pou„vez. S'il n'y a que quatre Elémens dans le monde, il n'y en a pas „cinq. S'il n'y a qu'un Soleil, il n'y en a pas deux. La même Ame „ne ſauroit être mortelle, & immortelle. L'homme ne ſauroit être „tout à la fois heureux & miſérable. Le Soleil n'eclaire pas le même „endroit, où la Nuit régne. Ou nous ſommes éveillés préſentement, „ou nous dormons. Ce que je crois voir eſt un corps, ou n'en eſt „pas un. C'eſt la Dialectique qui m'a appris que toutes ces choſes, „& bien d'autres qu'il ſeroit trop long de rapporter ici, ſont des Ve„rites, de quelque maniere que nos ſens ſoient diſpoſés. C'eſt d'elle „que je tiens, qu'en poſant l'antecedent de l'une des choſes, dont je „viens de montrer la liaiſon, le conſéquent en découle d'une manie-

„re

„re néceſſaire. “ (*) Ainſi raiſonne avec verité ce ſaint Docteur, en qui ſe trouvoient au même degré la pénétration de l'eſprit, & l'etenduë du ſavoir.

XXII. Mais, pour mieux nous aſſurer qu'il n'y avoit que Logomachie dans tout cela, écoutons encore Ciceron, qui porte ſon jugement en ces termes. „Pour moi, quoique je regarde comme un
„trés grand effort, de ne pas tomber d'accord des choſes qui s'offren[t]
„à nos ſens, de reſiſter aux opinions, & de ſuſpendre un acquieſce[ment]
„ment auquel nous ſommes ſi portés; quoique je convienne ave[c]
„Clitomachus, que les travaux de Carneade peuvent être comparés à
„ceux d'Hercule, en ce qu'il a delivré nos eſprits de l'acquieſcemen[t],
„c'eſt à dire, de celui qui eſt téméraire, & fonde ſur la ſimple opinio[n],
„comme d'une bête feroce & cruelle : cependant, pour dire quelq[ue]
„choſe en faveur du ſentiment oppoſé, qu'eſt-ce qui pourroit emp[ê]-
„cher la détermination de celui qui ſuit les probabilités, lorsqu' aucu[n]e
„difficulté ne les combat? Donc, de l'aveu de Clitomachus, Car-
„neade condamnoit, non l'acquieſcement même, mais la temérité de
„cet acquieſcement: il permettoit de ſuivre la probabilité, quand
„rien n'y mettoit obſtacle. Et qui empêche encore que de tel les
„probabilités ne portent le nom de certitude & de verité? “ (**) On

(*) *Per iſtam novi alia multa vera. Sed quam multa ſint, numerate ſi potestis. Si quatuor in mundo elementa ſunt, non ſunt quinque. Si Sol unus eſt, non ſunt duo. Non poteſt una anima & mori, & eſſe immortalis. Non poteſt homo ſi[mul] & beatus & miſer eſſe. Non hic & Sol lucet, & nox eſt. Aut vigilamus nunc, aut dormimus. Aut corpus eſt quod videre videor, aut non eſt corpus. Hæc & alia multa, quæ commemorare longiſſimum eſt, per Dialecticam didici vera eſſe, quomodo ſeſe habeant ſenſus noſtri. Ipſa porro docuit me, ſi cujus eorum quæ per connexionem modo propoſui pars antecedens aſſumta fuerit, trahere neceſſario id quod connexum eſt.* Aug[uſt]. L. III. contr. Acad. §. 29.

(**) *Ego enim, etſi maximam actionem puto, repugnare viſis, obſiſtere opinionibus, aſſenſus lubricos ſuſtinere, credoque Clitomacho ita ſcribenti, Herculis quendam laborem exlatum a Carneade, quod ut feram & immanem belluam, ſic ex animis noſtris aſſenſionem, id eſt, opinationem & temeritatem extraxiſſet: tamen ut ea pars defenſionis relinquatur, quid impedit actionem ejus qui probabilia ſequitur, nulla re impediente? Ergo, Clitomacho fatente, temeritatem aſſenſus ſuſtulerat Carneades, non aſſenſionem ipſam:*
aſſen-

On trouve les mêmes idées dans ce passage des *Offices*. „Il y a des „gens doctes & éclairés; qui nous arrêtent ici pour nous demander, „si nous sommes assez consequens, lors qu'en avancant d'un coté, que „rien ne peut être connu, nous ne laissons pas de l'autre de traiter „diverses matieres, & de donner même des préceptes sur nos devoirs. „Je voudrois que ces gens-là fussent bien au fait de notre sentiment. „Nous ne sommes assurément pas de ceux dont l'esprit se repaît vo„lontairement d'erreur, & n'a jamais aucun principe qu'il daigne sui„vre. Quel étrange caractere n'est-ce pas que celui-là, & quelle vie „qu'une vie passée sans raisonnement, & même sans principes de con„duite? Pour nous, au lieu de dire avec les autres, qu'il y a des cho„ses certaines, & qu'il y en a d'incertaines, nous nous en éloignons, „en nous bornant à reconnoitre des choses qui sont probables, & „d'autres qui ne le sont pas. Qu'est-ce donc qui pourroit m'empêcher „de suivre les choses, qui me paroissent probables, & de désaprouver „celles qui leur sont contraires. Par ce moyen j'evite également l'or„gueil des décisions, & cette temerité legere, qui est fort differente „de la sagesse.“ (*)

XXIII, Au reste Clitomachus, bien qu' Auditeur assidu de Carneade, ne paroit pas avoir suivi son Maitre en tout; & cela paroit évidem-

assentiendum erat probabili, nulla re impediente. Quid autem obstat quominus quomodo probabile nomine certi ac veri appellatur. Acad. Quæst. IV. 34.

(*) *Occurritur autem nobis, & quidem a doctis & eruditis quærentibus, satisne constanter facere videamur, qui cum percipi nihil posse dicamus, tamen & aliis de rebus disserere soleamus, & hoc ipso tempore præcepta officii persequamur. Quibus vellem satis cognita esset nostra sententia. Non enim sumus ii, quorum vagetur animus errore, nec habeat unquam quid sequatur. Quæ enim esset ista mens, vel quæ vita potius, non modo disputandi, sed vivendi ratione sublata? Nos autem ut cæteri alia certa, alia incerta esse dicunt, sic ab his dissentientes, alia probabilia, contra alia non probabilia esse dicimus. Quid est igitur quod me impediat, ea quæ mihi probabilia videantur sequi, quæ contra improbare, atque affirmandi arrogantiam vitantem, fugere temeritatem, quæ a sapiente dissidet plurimum.* De Offic. II. 2.

xemment par ce passage de Ciceron : „Il étoit permis de former des „opinions, sans les fonder sur aucune connoissance ; & l'on dit que „Carneade l'a prouvé. Pour moi, je m'en rapporte plus à Clitoma„chus, qu'à Philon & à Métrodore, & je crois que Carneade a plutot „discouru sur ce sujet, qu'il ne l'a prouvé." (*) Et ailleurs ; „Du„quel (il s'agit de *Calliphon*, qui regardoit * l'agreable & l'honnête „comme la derniere fin) Carneade apportoit tant de soin à „défendre le sentiment, qu'il sembloit le prouver. Malgré cela „Clitomachus assuroit, qu'il n'avoit jamais bien pu découvrir, quelles „étoient les veritables idées de Carneade." (**) Mais, pour mettre des bornes à ce Memoire, nous croyons avoir suffisament montré, qu'il y avoit plusieurs raisons de cette *incertitude*, dans laquelle les Academiciens sembloient se plaire à flotter. Car, ou bien ils soutenoient le pour & le contre, pour cacher leur sentiment ; ou ils se proposoient de confondre la vanité des Sophistes & des Stoïciens ; ou ils vouloient faire parade de leur érudition & de leur esprit ; ou enfin ils étoient tombés dans cette incertitude, pour avoir négligé les veritables régles de la Dialectique & de la Logique, pour n'avoir pas assez observé la difference qu'il y a entre les divers objets de nos connoissances, & pour avoir surtout ignoré ces grands Principes de Metaphysique, qui donnent une force irrésistible à la verité. A moins qu'on n'aime mieux faire de toute cette dispute Philosophique une simple Logomachie, ou aussi la prendre dans un sens favorable, & lui donner la meilleure interprétation, dont elle soit susceptible. Quoiqu'il en soit, c'est en vain que la cohorte des Sceptiques, ou amis du doute, provoque à l'Academie ; & les efforts de savant Evêque d'Avranches, dans son Traitté *de la foiblesse de l'esprit humain*, sont

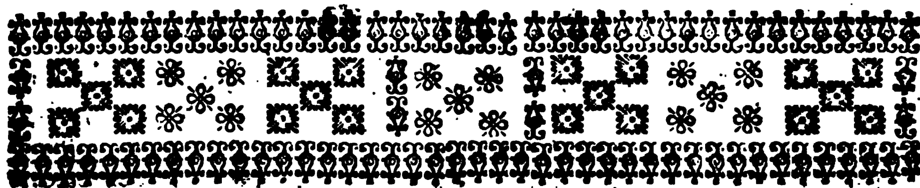
* *Acad. Qu.* IV. 42.

(*) *Licebat nihil percipere, & tamen opinari : quod a Carneade dicitur probatum. Equidem Clitomacho, plusquam Philoni, aut Metrodoro credens, hoc magis ab eo disputatum quam probatum puto.* Acad. Qu. IV. 24.

(**) *Cujus* (Calliphontis) *sententiam Carneades ita studiose defensitabat, ut eam probare etiam videretur. Quanquam Clitomachus affirmabat, nunquam intelligere se potuisse, quid Carneadi probaretur.* Ibid. 45.

nutiles, pour établir, comme il le prétend, que la seule Rai-
: sauroit donner une connoissance certaine de la verité, s'ap-
s sur le témoignage de notre *Clitomachus*, & regrettant la perte
Ouvrage sur la suspension du jugement. Nous le regrettons
bien persuadés qu'il serviroit de preuve à notre doctrine, &
celle de Mr. *Huet*. Le savant Professeur de Zurich, Mr. *Zim-
man*, a d'ailleurs pleinement satisfait à toutes les difficultés de Mr.
dans sa troisieme Dissertation contre les Incredules, publiée
1.





REFLEXIONS
SUR L'ESPACE ET LE TEMS,

PAR M. EULER.



I.

Les principes de la Mecanique sont déjà si solidement établis, qu'on auroit grand tort, si l'on vouloit encore douter de leur verité. Quand même on ne seroit pas en état de les démontrer par les principes généraux de la Metaphysique, le merveilleux accord de toutes les conclusions, qu'on en tire par le moyen du calcul, avec tous les mouvemens des corps tant solides que fluides sur la terre, & même avec les mouvemens des corps celestes, seroit suffisant pour mettre leur verité hors de doute. C'est donc une verité incontestable, qu'un corps étant une fois en repos restera perpetuellement en repos, à moins qu'il ne soit troublé dans cet état par quelques forces étrangéres. Il sera de même certain, qu'un corps étant une fois mis en mouvement, le continuera perpetuellement avec la même vitesse & selon la même direction, pourvuqu'il ne rencontre des obstacles contraires à la conservation de cet état.

II. Ces deux verités étant si indubitablement constatées, il faut absolument qu'elles soient fondées dans la nature des corps : & comme c'est la Metaphysique, qui s'occupe à rechercher la nature & les proprietés des corps, la connoissance de ces verités pourra servir de guide dans ces recherches épineuses. Car on sera en droit de rejetter

ter dans cette ſcience tous les raiſonnemens & toutes les idées, quelques fondées qu'elles puiſſent paroitre d'ailleurs, qui conduiſent à des concluſions contraires à ces verités; & on ſera autoriſé de n'y admettre, que de tels principes, qui pourront ſubſiſter avec ces mêmes verités. Les premieres idées, que nous nous formons des choſes, qui ſe trouvent hors de nous, ſont ordinairement ſi obſcures & ſi peu déterminées, qu'il eſt extrémement dangereux d'en tirer des conſéquences, dont on puiſſe être aſſeuré. C'eſt donc toujours une grande avance, quand on connoit déjà d'ailleurs quelques concluſions, auxquelles les premiers principes de la Metaphyſique doivent aboutir: & ce ſera ſur ces concluſions, qu'il faudra régler & déterminer les premieres idées de la Metaphyſique.

III. Auſſi les Metaphyſiciens, bien loin de nier ces principes, de la verité deſquels la Mecanique nous aſſure, ils tâchent plutot de les déduire & de les démontrer par leurs idées. Mais ils reprochent aux Mathematiciens, qu'ils attachent ces principes mal à propos à des idées de l'eſpace & du tems, qui n'etoient qu' imaginaires & deſtituées de toute realité. Il eſt bien poſſible, qu'un vrai principe, ſans qu'il perde rien de ſa verité, peut être enoncé d'une maniére incommode, & qui ne répond pas aux idées préciſes qu'on doit avoir des choſes; mais alors le Metaphyſicien ſera obligé de remedier à ce defaut, & de ſubſtituer dans l'enonciation de ces principes des idées réélles au lieu des imaginaires.

IV. Ce ſera donc le cas de ces principes de la Mecanique, qui ſe trouvent enveloppés dans les idées de l'eſpace & du tems, qui ſuivant les Metaphyſiciens n'ont aucune realité: donc il faudra voir, s'il eſt poſſible d'en retrancher ces idées imaginaires, & de ſubſtituer à leurs places les idées réélles, dont nous nous ſommes formés par voie d'abſtraction ces idées imaginaires: de ſorte pourtant que le ſens & la force de ces principes n'en ſoit point alterée. Car il n'y a aucun doute, que les corps, en ſe réglant ſur ces principes, ne ſe réglent point ſur des choſes, qui ne ſubſiſtent que dans notre imagination: il eſt plutôt certain, que ce ſont des choſes bien réélles,

auxquelles ſe rapportent les loix, que les corps ſuivent dans la conſervation de leur état.

V. Il eſt donc certain, que s'il n'etoit pas poſſible de concevoir les deux principes allegués de la Mecanique, ſans y mêler les idées de l'eſpace & du tems, ce ſeroit une marque ſure, que ces idées n'étoient pas purement imaginaires, comme les Metaphyſiciens le prétendent. On en devroit plutot conclure, que tant l'eſpace abſolu, que le tems, tels que les Mathematiciens ſe les figurent, étoient des choſes réélles, qui ſubſiſtent même hors de notre imagination; puiſqu'il ſeroit abſurde de ſoutenir, que des pures imaginations pouvoient ſervir de fondement à des principes réels de la Mecanique.

VI. Pour entrer dans cette recherche, je commencerai par le premier principe qui régarde l'etat de repos des corps. Dans la Mecanique on regarde l'eſpace & le lieu comme des choſes réélles, & par ce principe on ſoutient, qu'un corps, qui ſe trouve en quelque lieu ſans mouvement, y demeurera perpetuellement, à moins qu'il n'en ſoit chaſſé par quelque force étrangére : dans ce cas donc ce corps demeurera toujours dans le même lieu par rapport à l'eſpace abſolu. Je veux bien que les idées de l'espace & du lieu ne ſoient que des notions imaginaires ; mais qu'on m'indique les realités, ſur lesquelles les corps ſe réglent en obeïſſant à cette loi ; & au lieu desquelles les Mathematiciens ſe contentent de ſe ſervir des idées imaginaires de l'eſpace & du lieu.

VII. On me dira d'abord, que le lieu n'eſt autre choſe que la rélation d'un corps par rapport aux autres qui l'environnent. Subſtituons donc cette idée à la place de celle du lieu, & on ſera obligé de dire, qu'en vertu de ce principe un corps ſe trouvant une fois dans une certaine rélation avec les autres corps, qui l'environnent, il s'obſtinera de demeurer toujours dans cette même rélation. C'eſt à dire, on doit ſoutenir qu'un corps A étant environné des corps B, C, D, E &c. tâchera de ſe conſerver perpetuellement dans ce même voiſinage. Et partant quand le Mathematicien dit, qu'un corps en repos reſte dans le même lieu, par rapport à l'eſpace abſolu : le Metaphyſicien dira, que ce corps

corps se conserve dans la même relation par rapport aux autres corps qui l'environnent.

VIII. Voyons si ces deux manieres de s'exprimer sont équivalentes, & si l'on peut toujours, sans tomber en erreur, substituer l'expression metaphysique au lieu de la mathematique, de la verité de laquelle nous sommes déja convaincus. Supposons donc, pour mettre d'accord ces deux expressions, que tant le corps A, que ses voisins B, C, D, E &c. soient en repos ; & dans ce cas le corps A en se conservant dans le même voisinage des corps B, C, D, E &c. selon la régle metaphysique, demeurera aussi dans le même lieu selon la régle mathematique ; & dans ce cas on ne se trompera pas en substituant celle-là au lieu de celle-cy.

IX. Supposons, pour mieux fixer nos idées, que le corps A est dans une eau dormante, & pendant qu'il demeure au même lieu, il demeurera aussi dans le même voisinage des particules d'eau, qui l'environnent, & ce corps se réglera également sur la régle de mathematique que sur celle de metaphysique. Mais supposons à présent, que l'eau commence à couler, & selon la régle de mathematique le corps restera neantmoins dans le même lieu, à moins qu'il ne soit entrainé peu à peu par la force de l'eau. Or selon la régle metaphysique ce corps devroit d'abord suivre parfaitement le mouvement de l'eau, pour se conserver dans le voisinage des mêmes particules de l'eau, qui l'avoient environné auparavant. Dans ce cas donc la régle tirée de la Methaphysique ne sera plus conforme à la verité.

X. Consultons là-dessus l'experience, laquelle nous apprendra, qu'un corps ayant été en repos dans une eau dormante, sera mis en mouvement, dés que l'eau commence à couler, ce qui semble favoriser la régle conçue metaphysiquement. Mais la Mecanique nous fait voir trés clairement, que le corps ne suit pas le courant d'eau, qu'entant qu'il est frappé par les particules de l'eau ; & que c'est par consequent une force étrangere qui met ce corps en mouvement. Donc sans cette force le corps resteroit aussi bien en repos, dans l'eau courante, que dans la dormante, & partant le corps dans la conservation de son état de repos ne se régle point sur les corps, qui l'environ-

vironnent immediatement. De là il s'ensuit, que ce qui est nomm é *lieu* dans la Mecanique ne souffre pas l'explication de la Metaphysiqu e, par laquelle on veut, que le lieu ne soit autre chose, que la rélati on du corps par rapport aux autres corps, qui l'environnent.

XI. A cette qualité des corps, en vertu de laquelle ils tâche nt de se conserver dans leur état, tant de repos que de mouvement, on donne le nom *d'Inertie*. Donc cette *Inertie*, comme nous veno ns de voir, ne se régle point sur les corps voisins; mais il est bien s ur, qu'elle se régle sur l'idée du lieu, que les Mathematiciens regarde nt comme réelle, & les Metaphysiciens comme imaginaire. N'éta nt donc pas permis de substituer à la place de cette idée du *lieu*, la ré la- tion du corps aux corps circonvoisins, il ne reste que les corps élo ig- nés, par rapport auxquels on puisse juger de ce principe général de l'inertie. Mais je doute fort, que les Metaphysiciens voudront haz ar- der de soutenir, que les corps en vertu de leur inertie soient dispo és de conserver la même rélation par rapport aux corps, qui en sont é- loignés à quelque distance: car il seroit aisé de faire voir la fauss té de cette explication par de semblables réflexions, que je viens de f i- re sur les corps immediatement voisins.

XII. S'ils disoient que c'etoit par rapport aux étoiles fixes, qu il faloit expliquer le principe de l'inertie: il seroit bien difficile de l s réfuter, vuque les étoiles fixes, étant elles mêmes en repos, sont éloignées de nous, que les corps qui se trouvent en répos par rappo rt à l'espace absolu, comm'on le regarde dans la Mathematique, le se- roient aussi par rapport aux étoiles fixes. Mais outre cela que ce se- roit une proposition bien étrange & contraire à quantité d'autres dog mes de la Metaphysique, de dire, que les étoiles fixes dirigent les corp s dans leur inertie; cette régle se trouveroit également fausse, s'il nou s étoit permis d'en faire l'application aux corps qui sont proches de quel- que étoile fixe. Ces choses remarquées, il ne reste plus des idées réelles, qu'on pourroit substituer à la place de ces idées prétendues imaginai- res de l'espace & du lieu, dans l'explication de l'*Inertie*.

XIII. Nous voyons donc que l'idée du lieu, telle que les Ma- thematiciens la conçoivent, ne peut être expliquée par aucune rélation

aux

aux autres corps ni voisins, ni eloignés, & partant les notions metaphysiques, qu'on croit répondre à l'idée mathematique du lieu, ne sont pas propres pour être introduites dans l'explication du principe mecanique dont il s'agit. C. à d. la conservation de l'état des corps se régle sur le lieu, tel qu'on le conçoit dans la Mathematique, & point du tout sur le rapport aux autres corps. Or on ne sauroit dire, que ce principe de Mecanique soit fondé sur une chose, qui ne subsiste que dans notre imagination: & de là il faut conclure absolument, que l'idée mathematique du lieu n'est pas imaginaire, mais qu'il y a quelque chose de réel au monde, qui répond à cette idée. Il y a donc au monde, outre les corps qui le constituent, quelque réalité, que nous nous representons par l'idée du lieu.

XIV. Les Metaphysiciens ont donc tort, quand ils veulent bannir entierement du monde l'espace & le lieu, en soutenant que ce ne sont que des idées abstraites & imaginaires. Par consequent les preuves qu'ils apportent pour maintenir leur sentiment, quelques fortes qu'elles puissent paroitre, seront en effet mal fondées, & il faut qu'il y soit caché quelque paralogisme. Il est vrai que les sens ne sont pas capables de nous fournir les idées de l'espace & du lieu, & que ce n'est que par réflexion, que nous nous formons ces idées. De là ils concluënt que ce ne sont que des idées abstraites, semblables aux idées des genres & des especes, qui n'existent que dans notre entendement, & auxquelles il ne répond aucun objet réel. Mais il me semble que cette conclusion est précipitée: car pour peu qu'on réfléchisse à soi même, on s'appercevra aisement, que la maniere, dont on parvient à l'idée de l'espace & du lieu, est bien differente de celle, dont nous nous formons les idées des genres & des especes. Et on se tromperoit fort, si l'on vouloit soutenir, qu'il n'existe pas des choses, dont nous n'avons d'autres idées que par réflexion.

XV. Je suis d'accord que toutes les choses qui existent, sont parfaitement déterminées; &, si nous retranchons de l'idée d'un tel objet, une ou quelques déterminations, qu'il en nait une idée générique, à laquelle il ne répond plus d'objet existant. C'est ainsi que nous nous formons l'idée de l'étenduë en général, en retranchant des

 idées

idées des corps toutes les déterminations, hormis l'etenduë. Mais l'idée du lieu qu'un corps occupe, ne se forme pas en retranchant quelques déterminations du corps; elle résulte en ôtant le corps tout entier; de sorte que le lieu n'ait pas été une détermination du corps, puisqu'il reste encore, aprés avoir enlevé le corps tout entier avec toutes ses quantités. Car il faut remarquer, que le lieu qu'un corps occupe est bien different de son étenduë, parce que l'étenduë apartient au corps, & passe avec lui par le mouvement d'un lieu à l'autre; au lieu que le lieu & l'espace ne sont susceptibles d'aucun mouvement.

XVI. Je ne veux pas entrer dans la discussion des objections, qu'on fait contre la réalité de l'espace & du lieu; car ayant démontré, que cette réalité ne peut plus être revoquée en doute, il s'ensuit nécessairement, que toutes ces objections doivent être peu solides; quand même nous ne serions pas en état d'y répondre. Si l'on croit absurde, que tous les differents lieux, ou parties de l'espace, soient semblables entr'eux, ce qui seroit contraire au principe des indiscernibles; je ne sai pas si ce principe est si général, qu'on pense; peut-être qu'il n'est applicable qu' aux corps & aux esprits; généralité, dont on pourroit bien être content: mais comme l'espace & le lieu sont des choses si essentiellement differentes des esprits & des corps, on n'en sauroit juger par les mêmes principes.

XVII. La réalité de l'espace se trouvera encore établie par l'autre principe de la Mecanique, qui renferme la conservation du mouvement uniforme selon la même direction. Car si l'espace & le lieu n'étoient que le rapport des corps coëxistans, qu'est-ce que seroit la même direction? On sera bien embarrassé d'en donner une idée, par la seule rélation mutuelle des corps coëxistans, sans y faire entrer celle de l'espace immobile. Car de quelque maniere, que les corps se meuvent & changent de situation entr'eux, cela n'empeche pas, qu'on ne conserve une idée assés claire d'une direction fixe que les corps tâchent de suivre dans leur mouvement, malgré tous les changemens, que les autres corps subissent. D'où il est evident, que l'identité de direction, qui est une circonstance fort essentielle dans les principes généraux du mouvement, ne sauroit absolument être ex-

pliquée par la rélation, ou l'ordre des corps coëxistans. Donc il faut qu'il y ait encore quelque autre chose de réel, outre les corps, à laquelle se rapporte l'idée d'une même direction; & il n'y a aucun doute, que ce ne soit l'espace, dont nous venons d'etablir la réalité.

XVIII. Les idées de l'espace & du tems ont presque toujours eu le même sort, de sorte que ceux qui ont nié la réalité de l'un, ont aussi nié celle de l'autre, & réciproquement. On ne sera pas donc surpris, qu'en établissant la réalité de l'espace, nous reconnoissons aussi le tems, comme quelque chose de réel, qui ne subsiste pas seulement dans notre esprit, mais qui coule réellement en servant de mesure à la durée des choses. Nous avons une idée trés claire du tems, & je conviens, que nous nous la formons des successions des changemens, que nous remarquons: dans cette vuë je tombe d'accord, que l'idée du tems n'existe que dans notre imagination. Mais on a lieu de demander, si l'idée du tems, & le tems même, ne sont pas des choses differentes entr'elles? & il me semble, que les Metaphysiciens, en détruisant la réalité du tems, ont confondu le tems même avec l'idée que nous en avons.

XIX. Le Principe du mouvement des corps, en vertu duquel un corps mis en mouvement le doit continuër avec la même vitesse selon la même direction, ce principe, dis-je, nous fournit de nouvelles preuves, non seulement pour la réalité de l'espace, mais aussi pour celle du tems. Car, puisque le mouvement uniforme décrit des espaces égaux en tems égaux, je demande premierement, qu'est-ce que c'est des espaces égaux, suivant le sentiment de ceux qui nient la réalité de l'espace? Je doute fort, que les Metaphysiciens se hazarderont de dire, que l'egalité des espaces se doit juger par l'egalité du nombre des monades, qui les remplissent: car ils devroient soutenir, que les monades fussent également dispersées par tous les corps. Mais quand même ils voudroient se tenir à cette explication; elle seroit renversée dés le moment, qu'on

considéreroit en mouvement les corps, par rapport auxquels on voudroit déterminer l'egalitédes espaces. Car nous concevons, & le principe du mouvement nous apprend, que lorqu'un corps parcourt des espaces égaux, l'egalité des espaces ne dépend nullement des autres corps, qui l'environnent, & qu'elle demeure la même, à quelques changemens que soient exposés les autres corps.

XX. Il en est de même de l'égalité des tems; car si le tems n'est autre chose, comme on veut dans la Metaphysique, que l'ordre des successions; de quelle maniere rendra-t-on intelligible l'égalité des tems? On prétend que chaque être du monde est assujetti à des changemens continuels, & que c'est la succession de ces changemens, qui cause le tems. Suivant cette explication deux tems devroient être égaux, pendant lesquels arriveroit le même nombre de successions. Mais si l'on considére un corps, qui parcourt des espaces égaux en tems égaux, de quels changemens, ou de quel corps, faut-il juger de l'égalité de ces deux tems là? Ou veut on, que tous les corps soient assujettis à des changemens également fréquents, de sorte qu'il reviendroit au même quel corps qu'on voudroit choisir, pour mesurer l'égalité des tems sur le nombre des changemens, qui y arrivent. Mais je suis sûr, que pour peu qu'on pesera cette explication, on y trouvera tant d'autres inconvenients, qu'on s'avisera aisément de l'abandonner.

XXI. Il ne s'agit pas ici de notre estime de l'egalité des tems, qui dépend sans doute de l'etat de notre ame; il s'agit de l'égalité des tems, pendant lesquels un corps qui se meut d'un mouvement uniforme parcourt des espaces égaux. Comme cette égalité ne sauroit être expliquée par l'ordre des successions, aussi peu que l'égalité des espaces par l'ordre des coëxistants, & qu'elle entre essentiellement dans le principe du mouvement; on ne pourra pas dire, que les corps, en poursuivant leur mouvement se réglent sur une chose, qui

qui ne subsiste que dans notre imagination. On sera donc obligé d'avouër, comme on l'a été par rapport à l'espace, que le tems est quelque chose, qui subsiste hors de notre esprit, ou que le tems est quelque chose de réel, aussi bien que l'espace. Je m'adresse ici à ces Metaphysiciens qui reconnoissent encore quelque réalité dans les corps & dans le mouvement; car pour ceux qui nient absolument cette réalité, & qui n'accordent que des phenomenes, puisqu' ils regardent, tant le mouvement même, que les loix du mouvement, comme des chimeres, je ne me flatte pas que ces réfléxions fassent la moindre impression sur leur esprit.



REFLEXIONS SUR LA LIBERTÉ,

PAR M. FORMEY.

es matieres les plus rebattuës ne sont pas toujours celles qui ont été dévelopées avec le plus de précision. Les mêmes preuves passent souvent de bouche en bouche, se répetent & s'écrivent une infinité de fois, sans aquerir plus de distinction & de force. Et lors qu'il s'agit de questions sur lesquelles on est partagé, chaque parti se sert des raisonnemens qui sont une fois en usage, sans penser à les examiner, à les rectifier, s'ils en ont besoin, ou du moins à en augmenter la force, en poussant plus loin l'analyse des idées qu'ils renferment, & des principes sur lesquels ils se fondent. De là l'impossibilité de terminer les Disputes; l'erreur s'envelopant toujours dans ses obscurités, & la bonne cause n'étant pas accompagnée d'un éclat assez vif pour les dissiper.

Les remarques que je viens de faire me sont venuës dans l'esprit en méditant sur la liberté, & en passant en revüe le nombre infini de discussions, qui ont eu pour objet cette fameuse Question. Je n'ai pas dessein de la traitter dans toute son etenduë; un de nos dignes Confréres s'etoit proposé cette tâche, * & si les circonstances lui avoient permis de la remplir, il auroit été superflu de vous entretenir de mes Réfléxions. Leur principal but, pour vous le faire connoitre

* Voy. *Hist.* de l'Année 1745. pag. 91.

noitre d'avance, sera de justifier la necessité indispensable de l'existence des motifs dans toutes les déterminations de notre Liberté, & d'expliquer, avec toute la netteté dont je suis capable, leur influence & leur efficace.

Que l'Homme ait le pouvoir de faire, ou de ne pas faire, certaines actions dans certaines occasions, c'est ce qui est généralement avoüé. Cette notion commune sert de fondement au plan de la Societé. Les Legislateurs de toutes les Nations n'ont rien statué que conséquemment à ce Principe. Il n'est aucune Loi ancienne ou moderne, qui inflige des peines à un homme qui commet un meurtre dans un accés de délire, dans un transport de fievre chaude, tandis qu'il n'est point de Loi, qui ne condamne sévérement tout meurtrier, qui a eu l'usage des sens & de la Raison.

Il n'en faut pas davantage pour faire abjurer le sentiment de *Collins*, & de tous ceux qui croyent avec lui que la détermination de nos actions est d'une necessité absoluë; que, quand nous prenons un parti, il étoit impossible, dans toute la force de ce terme, que nous en prissions un autre, & que notre apparence de liberté consiste en ce que nous portons quelquefois de bon gré les fers dont la Fatalite nous charge. Dans cette Hypothese, il faut renoncer aux notions les plus évidentes de notre esprit. Il faut trouver aussi valables les raisons d'un détestable parricide, qui aura volontairement trempé ses mains dans le sang de son Pére, que celle d'un phrénetique, qui aura commis le même crime dans l'état d'alienation. Il faut, comme nous le ferons voir dans la suite, sapper tous les Axiomes, sur lesquels les Philosophes & les Geometres ont établi leurs Démonstrations. Il faut regarder comme illusoires ces idées que tous ceux qui pensent, les savans aussi bien que les ignorans, ont constamment adoptées; c'est que telle personne qui s'est attiré le blâme universel, qui s'est même couvert d'opprobre & d'infamie, auroit pu suivre une autre route, faire usage de ses talens, & aquerir les suffrages de ceux qui la détestent. Oui: si la necessité absolüe régne sur nos actions, le tissu de celles qui forment la vie de *Cartouche* étoit aussi essentiel à ce fameux Voleur, que l'egalité des trois angles à deux droits l'est à un triangle.

angle. En un mot, il faut nous désavouër nous mêmes, pour acquiescer à cette supposition.

Voulez-vous que laissant les Philosophes, qui ont peut-être l'esprit imbu de préjugés, & qui seront suspects pour s'être passionnés dans cette querelle, nous interrogions quelque témoin impartial, qui n'ait surement jamais ouï parler de *Collins*, ou de *Spinosa*, ni de leurs Réfutateurs. Qu'on interroge un enfant de sept à huit ans, qui vaincu par quelque petite tentation proportionnée à son age, ait fait une action qu'il sait lui avoir été défendüe, & dont il craint le châtiment? Lui viendra-t-il jamais dans l'esprit d'alleguer pour sa défense qu'il n'a pas pu faire autrement, qu'il lui étoit impossible d'eviter cette action. Il se gardera bien d'employer une défaite, dont il sent que la foiblesse & la fausseté redoubleroient la colere de ses parens, & aggraveroient sa peine. Mais, essayez de menacer cet enfant qu'il sera puni pour n'avoir pas lu & appris sa leçon, pendant que vous l'aviez renfermé dans l'obscurité, ou pour n'avoir pas pris une leçon de Danse, dans l'extrême accablement d'une maladie qui le prive de toutes ses forces; vos menaces lui paroitront souverainement injustes, & si elles étoient suivies de l'effet, il vous regarderoit comme un vrai Tyran.

C'est en faisant ces Observations, fondées sur une Experience journaliere, que les anciens Philosophes eux-mêmes se sont fait les idées suivantes sur la Liberté. L'Homme, en qualité d'animal raisonnable, agit avec connoissance de cause, il a des vües, des desseins. Quoique les objets qui frappent ses sens, occasionnent souvent les déterminations de sa volonté, elles partent pourtant d'un principe qui est en lui-même. Il n'est aucune force majeure qui puisse obliger l'homme à envisager comme bonne, une chose que le *dictamen* de son Entendement déclare mauvaise. L'Entendement présente donc les motifs à la Volonté, mais ces motifs ne lui font aucune violence, ils ne l'assujettissent à aucune contrainte. Preuve de cela, c'est qu'on peut résister aux motifs les plus puissants, & qu'on y résiste effectivement, qu'on change de vües & de desseins, qu'on se détermine en diverses manieres, & qu'en un mot, de tous les êtres bornés, l'homme

est

eſt le plus ſujet aux variations & aux changemens. Donc les motifs ne font pas ſur l'ame l'effet que produit ſur le corps l'impulſion, cauſe étrangere qui agit aveuglement, & à laquelle le corps n'a pas le choix de ceder ou de réſiſter.

On parvient par le moyen de ces raiſonnemens à ſaiſir la difference réelle qui ſe trouve entre les diverſes ſortes de neceſſités. La *Neceſſité abſoluë*, Metaphyſique, Geometrique, c'eſt celle qui découle de l'idée, de l'eſſence, de la poſſibilité intrinſeque du ſujet auquel elle convient. La *Neceſſité hypothetique*, eſt celle qui ſuppoſe d'autres déterminations, que celle de l'eſſence, des déterminations, qui pourroient être, ou ne pas être, ſans que le ſujet ceſſât de conſerver ſon eſſence. On peut la conſiderer ſous deux faces. La premiere ſe nomme *Neceſſité Phyſique*, & conſiſte dans l'invariabilité des effets que produiſent les Corps par leurs actions, & par leurs réactions, conformément au plan du Monde actuel. L'autre, qui eſt dite *Neceſſité Morale*, convient aux Etres intelligens, & procede de l'impreſſion que font ſur eux les motifs, par leſquels ils ſont déterminés.

Tous les hommes du Monde peuvent être pris à témoin de ce que nous avançons : ils ont tous les ſemences, pour ainſi dire, de ces notions & de ces diſtinctions. Mais comme l'Ontologie naturelle ne va jamais fort loin, ils retombent aiſément dans la confuſion entre ces diverſes ſortes de Neceſſité, & ſur tout entre les deux principales, la Neceſſité abſoluë, & la Néceſſité relative, ou conditionelle, quoiqu'elles different autant entr'elles que le jour & la nuit.

Comme il importe infiniment de bien connoitre cette difference, pour juger des queſtions qui ont été mües ſur la matiere que je traitte, je vais m'arrêter un moment à la déveloper. Il n'y a que deux manieres de conſiderer les choſes, *abſolument*, & *hypothetiquement*. La premiere a lieu, lorsque nous nous bornons à enviſager leur eſſence, ou leur définition, qui en tient la place; & qu'ainſi n'affirmant que ce qui eſt contenu dans cette eſſence, ou dans cette définition, nous n'y ſuppoſons rien au delà. La ſecon-

ſeconde maniere exiſte, dés que nous ajoutons à l'eſſence d'autres déterminations, qui n'en ſont pas partie, & qui n'en ſont pas même une ſuite néceſſaire, mais dans lesquelles ſeulement il n'y a aucune répugnance avec l'eſſence du ſujet. Ces déterminations n'exiſtent qu' hypothetiquement, & ſous une condition donnée. De là vient la difference qu'on fait en Logique entre *prædicata abſoluta, & conditionata.*

Or c'eſt dans cette diſtinction que ſe trouve la ſource des deux ſortes de Néceſſités. Ce qui, conſideré abſolument & en ſoi, eſt tel que le contraire eſt impoſſible, & implique contradiction, s'appelle *abſolument néceſſaire:* au lieu que ce dont le contraire n'eſt impoſſible & contradictoire qu'à cauſe d'une condition donnée, a ſimplement une *neceſſité hypothetique.* Cela poſé, il eſt evident que la néceſſité abſoluë n'appartient qu'aux eſſences des choſes, & aux attributs qui ont leur raiſon ſuffiſante dans cette eſſence. De là vient l'immutabilité & l'eternité qu'on leur attribuë avec raiſon. Ceux qui ont cru cette doctrine dangereuſe, étoient encore imbus de l'ancienne doctrine Scolaſtique, ſuivant laquelle l'exiſtence appartient à l'eſſence, & entre dans ſa notion. Ces deux choſes ſont néanmoins tout à fait differentes, & il faut ſoigneuſement les diſtinguer. L'eſſence ne va pas au delà dela poſſibilité, où plutot, c'eſt la poſſibilité même. Or cette poſſibilité ſéparée de l'exiſtence eſt abſolument néceſſaire: ce qui eſt une fois poſſible, l'a été, & le ſera toujours, dans ſa notion abſtraite. Mais, pour faire paſſer ce poſſible à l'exiſtence, il faut quelque choſe de plus que la poſſibilité, il faut ſuppoſer un principe, une cauſe, une raiſon ſuffiſante; & par conſéquent cette exiſtence eſt purement hypothetique, ou contingente.

Les exemples les plus familiers peuvent répandre du jour ſur la doctrine de la double Neceſſité. Dans l'idée que je me fais d'un animal quelconque, il entre celle de quelques organes, per lesquels cet Animal eſt tellement caracteriſé, qu'il ne peut être confondu, ni avec les êtres inanimés, ni avec les plantes, mi même avec les Animaux, dont l'eſpece differe de la ſienne. Ces organes appartiennent tellement à l'idée que vous vous en faites, qu'en les ôtant, l'idée

dée même s'evanouït. C'est donc en cela que consiste son essence, & c'est de là que découle la nécessité absolüe de cette essence. Par la même raison tout ce qu'on démontre des nombres en Arithmetique, & des figures en Geometrie, leur convient absolument, & dans la plus rigoureuse nécessité ; parce que n'y ayant rien dans ces notions abstraites qui soit hypothetique & modal, tout y est essence & attribut, tout ce qui y a eté une fois apperçu & connu, demeurera immuablement & éternellement tel.

Je ne sais apres cela, s'il faut un grand degré de pénétration, ou un effort considerable d'attention, pour saisir la difference qui se trouve entre les deux sortes de Necessité. Les confondre c'est pécher contre les premieres régles de la Logique, attribuer au genre ce qui ne convient qu'a une espece, ou passer d'une espece à l'autre ; à peu prés comme feroit celui qui attribueroit au Ciron toutes les proprietes de l'Elephant, sous prétexte que l'un & l'autre sont des animaux doüés des organes nécessaires à la vie. A la verité, on ne seroit peut-être pas tombé dans cette équivoque, si Aristote & ses Sectateurs n'avoit pas employé le mot de *necessité* dans les cas hypothetiques, & qu'ils y eussent substitué celui de *certitude*, de *convenance*, ou tel autre. Mais pouvoient-ils prévoir, qu'en dépit de toute Dialectique, on s'obstineroit à confondre dans cette matiere le genre & l'espece ?

J'avoüe que c'est à la preuve de sentiment qu'il faut recourir, pour se convaincre de la difference que nous venons d'établir. Comme on voudroit rendre cette preuve suspecte, & faire soupconner qu'elle pourroit bien n'être qu'une pure illusion, donnons quelques Réfléxions à en établir la force. Quand vous distinguez, dit-on, les genres & les especes des Animaux, l'Oiseau du Quadrupede, la Fourmi du Lion, vous avez un garant incontestable de ces distinctions, vous voyez de vos propres yeux ce qui differencie ces Animaux. Mais quand vous faites diverses Classes de nécessités, & que vous avancez qu'il y en a une dont le contraire est impossible, & une autre qui n'emporte pas l'impossibilité de son contraire, où sont vos preuves, & vos temoins? Où voyez-vous le principe de ces differen-

ces, & qui vous assûre que vous ne les forgez pas gratuitement? Vous vous repaissez donc de la flateuse idée d'une Liberté, qui n'est fondée que sur la supposition de la possibilité des déterminations contraires à celles que vous suivez ; mais encore une fois cette possibilité n'est qu'une fiction. Voilà la difficulté ; travaillons à la lever.

Que la vûe, ou même l'accord complet de tous les sens, soit plus propre à nous conduire à la conviction que le sentiment interieur, c'est ce qu'il n'est pas aussi aisé de prouver que d'avancer. Tout au contraire nous affirmons qu'il n'y a point de comparaison à faire entre la force du sentiment & le témoignage des sens, la premiere se soutenant en tout tems & en tout lieu, au lieu que les sens sont sujets à mille variations & à mille erreurs, dont on trouve l'enumeration par tout. Aussi l'existence des objets externes, qui ne nous sont connus que par leurs images, a-t-elle été contestée ; au lieu que personne n'a jamais osé former de doute contre l'argument de Des Cartes ; *Je pense : Donc je suis.* Or en examinant attentivement les notions evidentes renfermées dans l'argument de Descartes, on s'appercevra bientôt qu'elles sont aussi concluantes pour la liberté que pour l'existence.

La Pensée dans l'homme n'est autre chose que le témoignage intime, ou le sentiment qu'il a de ses idées par la réfléxion. Ce témoignage le persuade qu'il existe, parce qu'il lui est impossible de concevoir qu'une même chose soit, & ne soit pas en même tems. C'est le néant tout pur qu'une pareille supposition, & il ne sauroit s'en former aucune idée. Au contraire il conçoit trés bien toutes les choses qui ne sont point en contradiction, ni avec l'experience, ni avec les premieres notions de son esprit. Les Philosophes & le vulgaire entendent également par le mot de *possible*, ce qui ne répugne point à la pensée humaine ; ils reconnoissent également que l'existence est incompatible avec tout ce qui implique manifestement, & qu'elle ne convient qu'à ce qui n'est point contradictoire. Cette notion du possible & de l'impossible établit l'ancien Axiome ; *Rien ne se fait des rien ;* & conduit à l'argument de Des-Cartes, dont la force consiste à dire ; Je pense ; c'est un fait & un sentiment inconteſtable.

Donc

Donc il eſt impoſſible, qu'en penſant je ne penſe pas. Donc j'exiſte. Appliquons ces idées à la Liberté.

Les mêmes raiſons qui viennent de me prouver que je penſe, m'engagent à affirmer, que je puis m'aſſeoir ou être debout, parler ou me taire, me tourner à droite ou à gauche, en un mot faire telle ou telle autre action, qui dépend de l'exercice des facultés de mon corps ou de mon ame. L'experience & le ſentiment ſe réüniſſent, pour me faire connoitre, & mes facultés, & leurs differens uſages. L'idée du poſſible inſéparable de ma penſée me dicte, qu'au lieu d'écrire actuellement, je pourrois m'occuper à autre choſe. Cette même idée eſt la ſource des reproches que je me fais, quand je m'impute les mauvaiſes ſuites d'une action, qu'aucune neceſſite, ou force majeure, ne m'a engagé à faire. Le témoignage de ma penſée, bien loin de me diſculper, m'accuſe ; il me convainc avec toute l'evidence poſſible, que je pouvois ne pas agir, ou agir d'une maniere diamétralement oppoſée. C'eſt par cette raiſon que les Philoſophes ont donné le nom de *conſcience* au ſentiment de la penſée. Sans lui en effet l'homme n'auroit pas la faculté de juger de la moralité de ſes actions, de s'appercevoir, ſi elles ſont bonnes ou mauvaiſes, & de s'aſſurer, s'il lui convient de les commettre ou de s'en abſtenir. Ainſi ce qu'on appelle communément *conſcience* eſt inſéparable de la liberté, & n'eſt pas moins réel que la penſée même. L'une & l'autre ont pour baſe notre ſentiment, & les notions evidentes qui en ſont une ſuite. Ce qui fait dire à l'homme qu'il penſe, lui fait dire également que c'eſt lui qui ſe determine à agir, ou à ne pas agir. Lui conteſter ſa ſpontaneïté, c'eſt détruire ſa penſée. Quand une pierre tombe du toit par un accident qu'il ne pouvoit prévoir, & qu'elle lui meurtrit le bras, il ne s'impute point cette action ; mais il s'attribüe toutes celles qu'il a faites de deſſein prémedité, & avec choix ; il s'en applaudit, ou s'en repent, ſuivant qu'elles lui ſont avantageuſes ou nuiſibles.

Mais nos adverſaires prétendent que cela ne ſuffit point encore, & qu'il y a des exemples d'illuſions auſſi fortes que celles là, & qui rempliſſent ceux qui y ſont livrés d'une perſuaſion auſſi intime. Telle

 eſt,

eſt, par exemple, l'illuſion d'un Païſan, qui s'imagine que ſa volonté eſt la cauſe efficiente des mouvemens de ſon corps, qu'elle remüe immédiatement ſes bras & ſes pieds, toutes les fois qu'il le juge à propos. Cet homme a par devers lui le fait & l'experience, qui dépoſent d'une maniere inconteſtable. Il n'y a point d'inſtant où il ne puiſſe donner des preuves authentiques de la faculté qu'il a de ſe mouvoir dans un ſens plutot que dans un autre. Tout cela eſt vrai; mais voyons quels ſont les fondemens de l'opinion de ce Païſan, & s'ils ſont à comparer avec ceux ſur lesquels s'appuye la Liberté.

Je demande donc, où eſt la preuve de ſentiment, à laquelle tout homme, Païſan, ou Philoſophe, qui voudra admettre l'influence réelle & phyſique de l'Ame ſur le Corps puiſſe en appeller? Que ſent-il? Qu'il veut, & que ſes organes agiſſent, aprés qu'il a voulu. Mais oſeroit-on dire que qui que ce ſoit voye & ſente ce paſſage, ce noeud entre la détermination de l'Ame & le mouvement du Corps. Je fais un mouvement, que j'avois conçu comme poſſible, avant que de le commencer. Je comprens, & je puis aſſûrer, qu'il eſt une infinité de mouvemens, dont l'un n'eſt pas moins faiſable que l'autre. Je ſais de maniere à n'en pouvoir douter, que quand je veux marcher je marche, & que pluſieurs mouvemens de mon corps répondent parfaitement aux déterminations de ma volonte. Mais je ne ſaurois aller plus loin, ſans paſſer les bornes de l'experience. Elle garde un profond ſilence ſur la maniere dont la choſe ſe paſſe, elle ne me fait appercevoir en aucune maniere que ma volonté pouſſe mon bras. Quand je m'imagine donc qu'elle produit cet effet, de la même maniere que mes doits dirigent ma plume, je ne fais que m'embaraſſer d'une opinion trés confuſe, qui a plutot l'air d'un inſtinct groſſier que d'un raiſonnement.

Qu'on juge aprés cela, de quel droit les Philoſophes auxquels nous avons à faire, décident que comme le Païſan croit mouvoir ſon bras, quoiqu'il ne le meuve pas, il croit de même agir librement, quoiqu'il n'ait effectivement aucune liberté? La choſe n'eſt point égale. En croyant mouvoir ſes membres par l'action de ſa volonté, il croit ce qu'il ne ſent point, il met une conjecture à la place d'un fait.

fait. Mais quand il se juge libre, il en a la preuve de fait en main; car en faisant un pas à droite, il a une certitude égale qu'il fait ce pas, & qu'il pourroit le faire à gauche. Ainsi, qu'on admette ou qu'on rejette l'influence de l'ame sur le corps, les verités de sentiment, telles que la Liberté, n'en sauroient souffrir aucune atteinte.

Faisons une Remarque à cette occasion. C'est qu'en général toute Theorie, toute Hypothese, doit expliquer ce que nous connoissons par l'expérience, & que si elle est démentie par un seule verité, cela suffit pour demontrer sa fausseté. C'est ainsi qu'on a rejetté les Systemes de *Ptolomée*, & de *Tycho-Brahé*, parce qu'il n'est pas possible de les concilier avec les Observations Astronomiques. Il en est de même dans la Metaphysique. Le Philosophe qui entreprend quelque édifice sur la nature & sur les opérations de l'Ame, doit commencer sa marche, comme le Physicien, par s'appuyer sur des Observations, & sur des Experiences faites avec toute la précision imaginable. Or le sentiment, la reflexion, l'experience interieure, sont les moyens que nous avons de découvrir la nature de l'Ame, comme nous nous servons des sens pour examiner celle des Corps. Ceux qui croyent que les secours que nous avons dans la recherche des facultés de l'Ame, sont plus foibles & plus incertains que ceux qui nous guident dans les Observations sensibles, se trompent beaucoup. La différence est toute à l'avantage des premiers. Mille causes peuvent déranger l'action des sens, & des instrumens materiels, au lieu que le sentiment interne est fixe & invariable. C'est ce qui a fait soutenir à Des-Cartes, & à d'autres grands Philosophes, qu'il est plus aisé de connoitre l'esprit humain que le corps.

Ajoutons que le Metaphysicien trouve dans la Science même dont il fait son objet, un préservatif contre toute Hypothese fondée sur de fausses notions. Ce n'est que la confusion de nos idées, qui engendre cette foule de Sophismes dont toutes les Sciences fourmillent. Or l'Ontologie, comme premiere partie de la Metaphysique, & source unique des connoissances dont nous sommes capables, dévelope & met dans tout leur jour les notions qui sont communes à tous les hommes. On les a fort bien nommé *directrices*; leur fonction

ction est en effet de guider le Philosophe par l'application perpetuelle qu'il en peut faire à quelque sujet qu'il traitte. En ramenant ainsi toutes les connoissances de l'esprit humain à des notions claires & distinctes, il est impossible de former jamais aucun Systeme combattu par l'Experience. La verité ne sauroit être en contradiction avec elle-même, ou avec des faits incontestables.

Pour revenir donc au sujet de nos Réfléxions, c'est sans aucun fondement qu'on a objecté, que le sentiment n'est pas une preuve suffisante de la liberté, parce que nous ne connoissons pas intimément la nature & l'essence du Corps & de l'Ame. On pourroit se servir des mêmes armes pour combattre les démonstrations de *Newton* à l'egard des Loix du mouvement; les mêmes raisonnemens prouvent qu'on ne sauroit y faire aucun fonds. En effet toutes ces preuves, comme nous l'avons fait voir ailleurs, * sont établies sur une Proposition tirée de l'experience; & cette experience est moins incontestable que celle qui constituë le sentiment de la Liberté. Mais une pareille route mene au Pyrrhonisme le plus outré. Il n'en coutera gueres plus d'avancer, que ne connoissant pas la cause qui produit notre pensée, cette cause se plaît à nous repaitre de vaines chimeres, & qu' ainsi notre existence n'est pas plus réelle que notre pensée. Il n'y a pas plus d'absurdité à affirmer qu'en croyant penser, on ne pense pas, qu'à soutenir qu'en croyant être libre, on ne l'est pas. Impugner la contingence des déterminations de la volonté, c'est donc combattre le principe même de contradiction, & détruire par là même la certitude de toutes nos connoissances, Les Elémens d'Euclide peuvent alors aller de pair avec les Contes des Fées, puisque les fictions extravagantes de ceux-ci ne répugnent pas plus à la possibilité, que les principes evidens & les consequences demontrées des premiers. N'est-il pas bien surprenant après cela d'entendre *Spinosa*, qui bannit de son Systeme toute contingence, & par conséquent toute liberté, avertir presque à chaque page ses Lecteurs d'être en garde contre les idées grossieres que nous présentent les sens & l'imagination, & d'observer religieusement le précepte de Des Cartes, qui veut qu'on n'admette que des idées claires & distinctes, caracteres essentiels

* Voy. Memoir de 1747. p. 370.

ſentiels de la Verité ? Eſt-il donc dans notre eſprit des notions plus evidentes que celles du principe de contradiction, du poſſible & de l'impoſſible ? Pourquoi Spinoſa n'y a-t-il aucun égard ? C'eſt, comme l'a dit quelque part * Mr. de *Voltaire*, en parlant d'Epicure & de „Des-Cartes, c'eſt que les hommes dans leurs ſentimens, comme dans „leur conduite, ſuivent rarement leurs principes, & que leurs Sy„ſtemes, ainſi que leurs vies, ſont des contradictions.“ Dés que le Philoſophe, au lieu de commencer ſa marche, en s'appuyant ſur les notions du ſens commun, prend un vol hardi pour aller brusquement à la ſource du vrai, il ſe trouve bientot placé à celle des ſubtilités & des Sophiſmes.

* *Precis de la Metaph.* Ch. II.

Le combat n'eſt pas encore fini; mais il faut changer les batteries; & faire face à d'autres combattans. Il n'y a gueres d'excés qui n'ait ſon éxcés contraire. Celui auquel nous nous ſommes oppoſés jusqu'à preſent, pouſſe la neceſſité des actions morales jusqu' à la transformer en une vraye Fatalité. Effrayés des conſéquences qui réſultent de ce Dogme, d'autres Philoſophes ont crû ne pouvoir s'en débaraſſer, à moins qu'ils n'abjuraſſent toute ſorte de Néceſſité, & qu'ils ne laiſſaſſent notre Ame flottante, indéterminée, & ne recevant aucune impreſſion de la part des motifs. Selon eux, Dieu a donné à l'Homme la faculté de choiſir entre deux ou pluſieurs objets, à l'egard desquels il a le pouvoir phyſique néceſſaire, de ſorte qu'il peut déterminer ſa volonté, en mettant à part toutes les raiſons & toutes les cauſes externes, qui pourroient le porter à préferer un de ces objets aux autres.

Ce Dogme de la Liberté d'Indifference eſt inſoutenable. *Collins* & ſes partiſans n'ont pas eu de peine à en triompher, & les déffenſeurs de la Neceſſité morale ſe ſont joints à eux dans cette occaſion. „Vouloir, dit Mr. *de Leibnitz*, qu'une détermination vienne d'une „pleine indifference, abſolument indéterminée ; c'eſt vouloir qu'elle „vienne abſolument de rien. L'on ſuppoſe que Dieu ne donne pas cette „détermination. Elle n'a point de ſource dans l'Ame, ni dans le Corps, „ni dans les circonſtances, puisque tout eſt ſuppoſé indeterminé, & la „voilà pourtant qui paroit, & qui exiſte ſans préparation, ſans que rien s'y

„s'y dispose, sans qu'un Ange, sans que Dieu même puisse voir, „ou faire voir, comment elle existe.“ *

Nous ne prétendons pas néanmoins que les Philosophes, qui établissent la Necessité morale, ayant fait cause commune avec *Collins*. S'il leur est arrivé de proposer les mêmes argumens, ils les ont appliqués fort differemment. Le plus fameux de tous est celui de deux bassins en équilibre, dont l'un ne peut faire remuer l'autre, de sorte que pour changer leur état, il faut qu'il survienne quelque poids dans l'un de ces bassins. Ceux qui poussent trop loin la force de ce raisonnement, en perdent tout le fruit & l'honneur. Faute de faire attention à l'ancienne régle, qui défend aux Philosophes de presser trop les comparaisons, ils s'egarent dans un Labyrinthe sans issüe. Tâchons de dire quelque chose de plus précis, & d'entrer dans une route où nous soyons à l'abri de tous les écueils.

S'il y a quelque chose de palpable pour un esprit attentif, c'est la liaison indissoluble entre le Principe de la Raison suffisante, & la Contingence. Outre ces qualités essentielles des choses, dont nous avons parlé ci-dessus, & qui constituënt l'immutabilité des Essences, j'apperçois dans les Etres des changemens, des rélations, des manieres d'être en un mot, qui ne sont point constantes, mais variables. 'A quoi faut-il que j'en rapporte l'origine ? 'A l'aveugle hazard. Mais la Raison & l'Experience s'y opposent avec une égale force. La Raison me dit que le hazard est un néant, & que le Néant ne sauroit produire aucun effet. L'Experience m'apprend invariablement que toutes les fois qu'il arrive quelque changement dans un être, il est intelligible & explicable par l'action de quelque autre être, qui est intervenu pour la production de cet effet. Voilà la Raison suffisante. Si je la rejette, ce Monde devient un païs de chimeres, une région où tout est fabuleux, & plus fabuleux encore que dans les Fables, où la volonté de quelque Enchanteur, la baguette de quelque Fée, tiennent au moins la place de la Raison suffisante, & présentent aux Enfans & aux idiots l'idée de je ne sai quelle puissance, à laquelle la Nature obeït. Le hazard au contraire étant un rien décidé, tout ce

qu'on

qu'on lui rapporte est un effet du rien ; c'est un nombre, dont les unités sont des zéros.

Est-il possible qu'on aime mieux donner dans de pareilles extravagances que d'admettre un Principe aussi simple & aussi évident que celui de la Raison suffisante? Et quel est le prétexte qu'on allegue? C'est que ce Principe conduit à la nécessité. J'en conviens; mais à quelle nécessité? A la nécessité hypothetique, qui bien loin d'etre destructive de la contingence, & de la Liberté, est au contraire la source de leurs notions, & ne peut absolument s'en passer. Pour prétendre que la Raison suffisante est le principe d'une nécessité absolüe, il faut la confondre avec l'essence des choses; mais on peut dire que ceux qui le font, s'obstinent à le faire de gayeté de coeur, aprés la netteté & la précision que d'habiles Philosophes ont employées à l'exposition de cette Doctrine. Ce vain épouvantail de Fatalisme qu'ils ne cessent d'etaler, a été réduit à sa juste valeur, & ne peut plus en imposer qu'à ceux qui se plaisent dans l'erreur volontaire.

Je ferai même à cette occasion une Remarque que je crois neuve, & importante, pour montrer comment les idées des grands Hommes s'accordent souvent dans le fonds, quoiqu'elles different par rapport à l'expression. *Des-Cartes*, l'immortel *Des-Cartes*, n'a point ignoré, ni négligé, la difference qu'il y a entre les déterminations casuelles, ou arbitraires, & celles qui naissent du Principe de la Raison suffisante. C'est ce qui l'a engagé à rejetter les qualités occultes des Scolastiques; il proscrivit, par exemple, la force attractive de l'Aiman, parce qu'elle determine les phénomenes de l'aiman d'une maniere qui n'a rien d'intelligible, & qui n'en est point une vraye explication ; & il proposa l'hypothese des corpuscules Magnetiques, qui forment une espece d'Atmosphere, afin d'alleguer une cause manifeste, par laquelle on put rendre une raison suffisante de ce qui se passe dans l'approche de l'Aiman & du Fer. Sa grande régle même, si on y prend bien garde, son précepte fondamental, *de n'admettre que ce dont nous avons des idées claires & distinctes*, n'est autre chose que la raison suffisante, qu'il vouloit introduire dans la Philosophie. La notion claire & distincte qu'il exigeoit, c'est celle qui fait comprendre

la chose & qui la rend explicable, en dévelopant la notion du sujet d'une maniere qui fasse voir, que l'attribut lui convient, & pourquoi. Je suis même persuadé que *Leibnitz* n'est parvenu à la Raison suffisante, & n'a conçu le dessein d'en faire un principe de nos connoissances, qu'en réfléchissant sur la difference qu'il y avoit entre les explications des Phenomenes, qu'on trouvoit dans les Scolastiques, & celles que *Des-Cartes* avoit fournies; il y vit quelque chose de plus que ce qu'on appelloit vulgairement *Cause*, & il lui donna le nom de *Raison*. Et l'on a tout lieu de croire que *Des-Cartes* lui-même auroit donné le dernier degré de perfection à sa découverte, sans l'extreme dégout qu'il avoit pour l'Ontologie de son siecle, toute herissée effectivement des épines de la barbarie. Ce dégout l'empêcha de pousser plus loin l'analyse des notions, & d'en abstraire d'Universelles, c'est à dire, des Principes, des notions speciales que la force de son Génie lui avoit présentées. Mais il ne s'agit aprés tout, ni de l'Époque de ce Principe, ni de ses Auteurs; je dois seulement justifier son usage, & proposer la preuve de la Liberté, qui en résulte d'une maniere qui, en détruisant les prétentions des Indifferentistes, ne donne aucun droit aux conclusions des Fatalistes.

L'exemple de deux choses en équilibre prouve par le principe de la raison suffisante qu'il renferme, & qu'Archimede y a déjà découvert, que comme il faut quelque cause qui trouble cet équilibre, & fasse pencher l'un des cotés; de même l'homme ne sauroit être déterminé à choisir un parti plutôt que l'autre, sans que quelque motif y intervienne. A cet égard la ressemblance est sensible, la comparaison est juste. Mais elle cloche, dés qu'on va plus loin. Pour faire pencher la balance qui est en équilibre, il faut qu'une cause étrangére mette un poids dans l'un des bassins. Il n'en est pas de même des motifs qui nous déterminent. Quoique les objets externes occasionnent souvent nos pensées, nous n'en sommes pas moins assurés que c'est nous qui pensons. C'est ce sentiment qui établit notre existence, comme nous l'avons vu ci-dessus. Quand donc les causes externes agissent sur nous, nous en dépendons, il est vrai, par rapport à l'action, mais l'effet de cette action dépend à son tour de la détermination

nation de notre volonté. Un verre de vin excite mon désir, mais il ne le force pas; c'est moi qui me détermine. Quand je considére les objets que mes sens me présentent, je sais par le sentiment de ma pensée que je puis les comparer ensemble, delibérer intérieurement, faire usage de ma raison & de mes réfléxions, & me déterminer à choisir un de ces objets préférablement à l'autre. C'est là l'indifference de l'exercice, qu'il faut bien se garder de confondre avec l'indifference des motifs, & qui jointe à l'exemtion de contrainte, constitüe la liberté. Or je ne puis attribuër cette faculté, ni aux corps qui inclinent & se meuvent, sans savoir ce qu'ils font, ni aux bêtes, qui ont bien comme nous les sens, l'imagination & les desirs charnels, mais qui ne sont pas doüées d'entendement, de raison & de volonté.

Il n'est donc pas besoin de recourir à l'indifference, pour eviter la nécessité. Tous les cas dans lesquels on prétend se fortifier du témoignage de l'Experience, & où les partisans de l'Indifference croyent être dans leur fort, ne conclüent point en faveur de leur These, puisque le Principe même est faux, c'est qu'il y ait des cas de cette nature. En effet, si l'on veut bien approfondir les choses, il se trouvera que dans les occasions même qui paroissent les plus indifférentes, il y a toujours eu quelque raison prévalente en faveur du parti qu'on a pris. Quand il s'agit de choisir une chose entre plusieurs autres où l'on ne remarque point de difference, il y a toujours une de ces choses qui est dans une situation plus commode par rapport à la main qui doit la saisir; & alors l'Ame n'ayant point d'autre raison, aura égard, même sans y faire attention, à cette commodité, ou peut être que par une opinion confuse, & dont on ne sauroit rendre raison, on croira un objet meilleur que les autres. On en peut dire autant de quelque cas que ce soit. Une infinité de petites perceptions qui nous rendent quelque fois joyeux, chagrins, & différemment disposés, nous font quelquefois plus goûter une chose que l'autre, sans que nous puissions dire pourquoi. L'on ne doit donc pas trouver étrange que nous supposions en nous des motifs qui nous déterminent, sans que nous soyons capables d'en rendre raison.

Mais il y a plus, & l'on peut démontrer directement que le cas du parfait équilibre est impossible. Car les objets n'etant jamais parfaitement semblables, & differant au moins, de l'aveu de tout le monde, par leur situation à notre égard, ils ne peuvent point être representés par des perceptions entierement semblables ; & dés là les appetits qui naissent des perceptions, ne sauroient être semblables ; car les effets sont égaux à leurs causes. Donc les appetits n'etant point semblables, il ne peut y avoir de parfait équilibre. Il n'y a qu'a jetter les yeux sur la maniere dont Mr. *de Leibnitz* réfute la Fable de l'Ane de Buridan dans sa *Theodicée* *. C'est ainsi qu'on détruit le Principe de l'Indifference ; mais en le laissant même subsister, on feroit également en droit de nier la conséquence. Quand le cas du parfait équilibre seroit possible, il seroit alors contradictoire que la volonté se determine ; & les Principes de la Raison suffisante & de la disposition de la Cause à produire l'effet, ne sont pas moins vrais & indispensables dans les cas les moins importans que dans les plus intéressans. S'il étoit possible que l'Ame se déterminât une seule fois sans raison, pourquoi ne le feroit elle pas en toute rencontre ? L'erreur où l'on tombe sur les choses de petite importance, vient de ce que nous n'appercevons pas toujours les raisons qui concourent à y déterminer. Cela n'arriveroit pas, si nous n'avions que des idées distinctes. Mais nous avons encore des idées confuses, des sensations, des appetits, des passions & une infinité de perceptions obscures, que nous ne distinguons point, & qui cependant contribuënt à nos déterminations. Comme il y a dans notre Corps plusieurs mouvemens insensibles, dont nous ne nous appercevons pas, il est de même dans notre esprit plusieurs idées qui ne sont pas accompagnées du témoignage. Combien de fois n'arrive t-il pas aux Philosophes eux - mêmes de dire qu'ils ne pensent à rien, quand l'esprit dans des momens d'inaction ne réflêchit pas sur ses idées, ou quand se promenant dans les espaces imaginaires, les objets qu'il y rencontre, n'ont pas la force de faire sentir leurs impressions? Cet état ressemble parfaitement à celui d'un homme, qui en dormant parle & rêve sans s'en appercevoir. Ainsi, quand on me propose de me tourner à droite ou à gauche, ou de faire quelque autre action, qui paroit

* § 49.

roit absolument indifferente, je ne puis jamais assurer qu'il n'y ait aucune disposition présente, ou antécedente, dans mon esprit ou dans mon corps, qui me fasse pancher d'un coté plutot que de l'autre.

Pour porter un dernier coup à la liberté d'indifference, réfléchissons encore sur ceci. Une experience indubitable m'apprend que je puis résister à des motifs pressans, dont j'ai le sentiment & la réfléxion, & malgré leur poids faire pencher la balance du coté opposé. A plus forte raison pourrai-je exercer cette puissance, quand il n'y a dans l'un des bassins de la balance que quelques menües poussieres, qui l'empêchent d'être parfaitement en équilibre. Voilà à quoi se réduit la réalité de la liberté d'indifference; elle ne nous paroit absolüe que faute de connoître ce qui la détermine. *Des-Cartes* l'a fort bien compris & expliqué. „L'indifference, dit-il, que „je sens, lorsque je ne suis point emporté vers un coté plutot que „vers un autre par le poids d'aucune raison, est le plus bas dégré de la „liberté, & fait plutot paroître un defaut dans la connoissance qu'une „perfection dans la volonté. Car si je connoissois toujours clairemen ce qui est vrai & ce qui est bon, je ne serois jamais en peine „de déliberer quel jugement & quel choix je devrois faire, & ainsi je „serois entierement libre, sans jamais être indifferent."

Concluons donc que l'indifference n'a lieu qu'à l'égard de l'Ame, qui dans mille cas qui se présentent n'est pas plus déterminée par sa nature d'un coté que de l'autre, de même que le corps n'est point déterminé par soi-même à occuper la place où il se trouve. S'il y a une raison suffisante qui ait mis le corps dans la situation où il est, & qu'ainsi sa détermination soit trés certaine, il n'est pas moins evident que sa détermination est contingente, ou, ce qui revient au même, qu'elle n'est pas immuable, qu'elle pouvoit être autrement. Il en est de même de nos actions libres, auxquelles les motifs tiennent lieu de raison suffisante. Sans ce principe il n'y auroit rien de certain dans le monde, tous les évenemens seroient produits par le pur hazard, c'est à dire, par le néant. Ce n'est qu'à la faveur de ce principe que nous pouvons remonter des effets à la cause, & unir les connoissances que nous puisons dans l'experience à celles du raisonne-

sonnemant. Ce qui fait juger à un habile Politique, pourquoi tel évenement est arrivé, & pourquoi il sera suivi d'autres qu'il prévoit vraisemblablement, lui fait connoitre que ces mêmes choses pourroient être autrement. Plus le Physicien connoît le monde matériel, plus il s'apperçoit que les changemens & les révolutions qui y arrivent continuellement, ne sont que les suites conditionelles de l'arrangement & de la liaison admirable, dans laquelle se trouvent les parties qui composent ce monde. Ainsi, & les motifs qui produisent les actions libres, & les ressorts qui font agir la nature des Corps, loin de nous conduire à la nécessité absolüe des choses que nous voyons, nous manifeste leur contingence, qui excluant toute idé de hazard, n'est fondée que sur une nécessité conditionelle.

Nos connoissances ne sont vrayès qu'autant qu'elles sont conformes à la nature de leurs objets. Mais que ces connoissances ayen prévenu les effets qui en sont l'objet, ou qu'elles ne soient venüe qu'aprés coup, cela change-t-il quelque chose à la nature même d ces effets ? Cette rélation qu'ils ont avec nous, & par laquelle il nous sont connus, ou inconnus, avant leur accomplissement, a-t-ell la moindre influence sur leur certitude, sur les déterminations, e vertu desquelles elles doivent être ainsi, & non autrement. Il y plus ; l'Intelligence Divine elle-même, quoiqu'elle n'ait aucune an logie avec notre maniere de connoitre, l'Intelligence qui, enta qu' infinie, embrasse tout à la fois par la conception la plus *adéqua* tout ce qui est, a été, sera, & peut être, tandis que notre espr borné n'aquiert que successivement les connoissances, dont plusieu sont obscures, d'autres confuses, quelques unes distinctes & lumine ses ; cette Intelligence, dis-je, aux yeux de laquelle toutes chos sont nües & à découvert, change-t-elle par sa connoissance les chos contingentes en des choses absolument nécessaires ? Il est bien su prenant que les Theologiens & les Philosophes ayent été pendant long tems accrochés à la difficulté de concilier la contingence de n actions avec la Prescience éternelle de Dieu, & que la pluspart l' yent jugee insoluble. La souveraine intelligence de Dieu nous est i comprehensible, entant que nous n'en avons pas une pleine & enti

ɛ conception, qui puiſſe nous faire comprendre & embraſſer par-
ıitement tout ce qui eſt en elle ; mais l'imparfaite & mediocre con-
oiſſance que nous en avons, ſuffit pour nous autoriſer à concluꝛre
u'il a tout prévû, parce que connoiſſant intimément & en lui-même
infini, à plus forte raiſon ſon Entendement a-t-il apperçu de toute
ternité la nature de toutes choſes, & les differentes liaiſons où elles
euvent ſe trouver. Ainſi la liberté étant une fois établie ſur les
reuves les plus convainquantes, il eſt certain que nous pouvons
éterminer nos actions librement, non pas par la raiſon que Dieu les
prévües, mais parce que la Liberté eſt conforme à notre nature. Il
'y a qu'une entiere & abſolüe indifference, dont la Preſcience ſoit
npoſſible à Dieu. Et il faudroit refondre toutes les idées de la Lo-
ique & de la Metaphyſique, pour admettre ce Dogme avec les Con-
ːquences qui en découlent.

L'obſcurité qui régne dans nos idées, l'incertitude de nos con-
oiſſances au ſujet des motifs qui nous déterminent, ou qui devroient
ous déterminer, ſont donc les cauſes de cet embarras, de cette ſuſ-
enſion, de ce choix fait en apparence au hazard, qu'il plaît à cer-
ıins Philoſophes d'eriger en une eſpece particuliere de Liberté,
ous le nom d'Indifference. Bien plus; d'un défaut ils font une per-
ection, & voudroient nous perſuader que la Divinité elle-même poſ-
ede l'admirable prérogative de ſe déterminer ſans motifs, ou même
ontre les motifs. Etrange bouleverſement de toutes les notions!
'eu s'en faut qu'on ne faſſe tenir par ce moyen au premier Être le
angage de cette femme furieuſe ; *Video meliora, proboque ; deteriora
equor.* Non, la liberté ne s'accroît & ne ſe fortifie au contraire,
u'à meſure que l'indétermination & l'indifférence diminüent. Plus
e ſaiſis les différences des choſes, moins j'héſite dans leur choix, &
'Etre qui embraſſe d'un coup d'oeil toutes les differences infiniment
etites de toutes les choſes exiſtentes & poſſibles, ne ſauroit trouver
leux choſes égales qui tiennent ſa volonté dans l'equilibre. Il eſt
lonc bien ſurprenant de voir les hommes défendre avec chaleur la
oſſeſſion d'un avantage, qui bien conſideré eſt ce qu'il y a de plus
umiliant pour eux. On rit de la ſimplicité d'un enfant qui ne ſait

 que

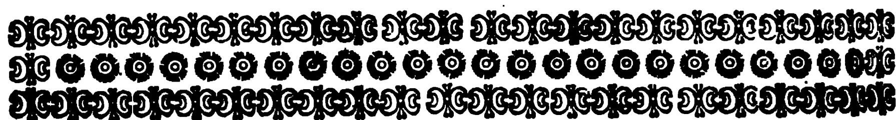
que prendre d'un Louïs dor, ou d'un Jetton qu'on lui offre, & qui aprés avoir bien tâtonné prend le Jetton. C'est le cas de tous les hommes, proportionellement à l'etenduë de leurs connoissances.

La Liberté proprement dite est donc à l'Ame ceque la Santé est au corps. Elle constitüe la vie de l'esprit, comme la vie animale résulte des fonctions & des mouvemens du Corps. Le Corps ne peut subsister sans le secours d'alimens convenables aux solides & aux fluïdes qui le composent. L'esprit s'etrécit & s'eteint presque, dés qu'on le prive de la nourriture qui lui est propre. Il lui faut des idées, de l'attention, de la réfléxion, pour exercer le jugement & cultiver la Raison. La fausseté, l'erreur, le mensonge sont un vrai poison pour lui. Ce paralléle peut être poussé plus loin. Le santé dans les tempéramens les plus robustes, n'est pas ferme & durable, si l'on n'use d'aucun régime. Les excés de l'intempérance assujettissent les corps les plus robustes aux maladies les plus violentes. Il en est de même de l'esprit, s'il ne régle pas l'usage de ses facultés par la sagesse. Ses débauches, si je puis ainsi parler, enveniment les passions, & les rendent insupportables dans les grands Génies, qui sont ordinairement ceux qui font les plus grands écarts. En effet, pour continuer la comparaison, comme les corps delicats & foibles se soutiennent souvent mieux & plus longtems que les corps robustes, les esprits médiocres par une application bien reglée l'emportent quelquefois sur ceux qui ont le plus de force & de pénétration naturelle. En un mot, si la plupart des maladies du corps sont des suites de l'intempérance, celles de l'esprit le sont d'ordinaire d'un mauvais usage de ses facultés. C'est malheureusement la situation de la plupart des hommes. Mais comme ils s'y mettent volontairement, sont-ils moins coupables, que ces mendians qui s'estropient de gayeté de coeur pour se dispenser du travail ? Si donc les facultés de l'ame sont sujettes à tant d'inegalités, & si l'on n'observe pas dans la conduite & dans les moeurs de l'homme cet ordre & cette régularité qu'on admire dans le monde materiel, c'est que l'homme ne peut pas être dirigé comme une machine, & que son bonheur est inséparable du bon usage de sa liberté.

II

Il faut donc pour perfectionner sa liberté, perfectionner ses connoissances par la culture de l'esprit & de la raison. La Verité & la Vertu sont unies par les liens les plus étroits. Ce n'est qu'en s'appropriant la premiere qu'on parvient à l'autre, & qu'on peut goûter les doux fruits de leur union, en s'affranchissant de cette inconstance & de cette vanité perpetuelle, qui est la source de tant de désordres. Si la plupart des hommes sont privés de la véritable liberté, & si leurs desirs triomphent presque toujours de leur volonté, ce n'est pas que leur entendement soit trop foible, ou que leurs organes soient dérangés. C'est plutot parce qu'ils se rebutent aux premieres difficultés, & qu'ils voudroient se procurer les avantages de la Verité & de la Vertu, sans qu'il leur en coutât rien, ou bien même allier l'une & l'autre avec l'erreur, l'ignorance & les passions. Cette prétention est aussi vaine & aussi chimérique que le seroit celle d'un homme sec & décharné, qui pour aquerir promtement de l'embompoint, voudroit prendre un quintal de nourriture par jour, ou de celui qui formeroit le projet d'être tantôt gras, tantôt maigre, d'un jour à l'autre.

L'Homme est essenticilement un être fini & borné; par conséquent il ne peut arriver à la perfection que successivement & par degrés, Les facultés de l'esprit & du corps ne s'accroissent & ne se fortifient que par l'application, par l'exercice & les actes reïterés qui forment les habitudes, Ainsi si nôtre liberté est trés peu de chose, c'est parce que nous faisons trés peu d'usage des qualités qui nous distinguent des bêtes. L'asservissement volontaire aux sens, à l'imagination, & aux appetits charnels, bien loin de nous laisser quelque prééminence sur les animaux, nous rend pires qu'eux, entant que notre Entendement invente de nouveaux moyens pour étendre & pour assouvir ses passions. C'est ainsi que plus une chose est excellente, plus l'abus en est pernicieux. Mais encore une fois, l'homme ne sauroit s'en prendre qu'à lui même, s'il faut un mauvais usage de sa liberté. Il n'y a qu'un enfant exposé dés sa naissance parmi les Loups & les Ours, dont l'ignorance soit invincible & excusable.



REMARQUES SUR LE PRINCIPE DE LA CONSERVATION DES FORCES VIVES PRIS DANS UN SENS GENERAL.

PAR M. D. BERNOULLI.



I.

Le principe ordinaire des forces vives suppose la gravitation uniforme & toujours parallele à elle même: mais lorsque par la diversité des positions des corps la gravitation est changée, soit par raport à son intensité, soit par raport à sa direction, on ne peut plus sans doute estimer la force vive, comme on fait ordinairement, par la descente du centre de gravité multipliée par la masse; cependant il se fait toujours une conservation des forces vives, pourvu qu'on la prenne dans le juste sens. C'est ainsi que j'ai démontré autrefois dans un Memoire que j'ai envoyé à l'Academie des Sciences de S. Petersbourg, comment on pouvoit calculer par le simple principe de la conservation des forces vives quelques inegalités du mouvement de la Lune: il ne sera donc pas inutile d'examiner, de quelle maniere on puisse employer ce principe pour d'autres hypotheses que celle de la gravitation uniforme & dont la direction est toujours parallele.

II. S'il y a plusieurs corps assujettis à la loi d'un certain sisteme, de sorte qu'aucun ne puisse se mouvoir indépendemment des autres; Si chaque corps est animé par une gravitation variable quelconque,

je dis que la conſervation des forces vives ſe fera de la maniere, qui ſuit.

Indiquons les maſſes des corps, qui compoſent le ſiſteme, par m, m', m'', m''', &c. leurs viteſſes par v, v', v'', v''', &c. qu'on conſidere enſuite chaque corps comme détaché du ſiſteme, & qu'animé par la gravitation il parte du même point & parvienne au même point, décrivant un chemin quelconque; il ſera facile de determiner la viteſſe, que ce corps détaché du ſiſteme doit prendre; nous exprimerons ces autres viteſſes par u, u', u'', u''' &c. Là deſſus le principe de la conſervation des forces vives ſera généralement exprimé par cette equation

$$mvv+m'v'v'+m''v''v''+m'''v'''v'''+\&c.=muu+m'u'u'+m''u''u''+m'''u'''u'''+\&c.$$

III. Je ne m'arrêterai pas pour cette fois à expliquer & à confirmer ce principe général par des exemples, mon but n'etant pour le préſent que d'examiner toute l'etenduë du principe des forces vives, & cela non ſeulement par raport aux ſiſtemes de pluſieurs corps, mais encore par raport aux corps ſimples, lorsqu'il eſt queſtion de comparer pour ceux-ci leur force vive avec un certain eſpace qu'ils auront parcouru; & ce dernier examen facilitera extrémement la maniere de déterminer les quantités uu, $u'u'$, $u''u''$, $u'''u'''$ &c. que nous avons employées dans notre équation du § 2.

IV. Commençons par l'hypotheſe commune de la gravitation uniforme & parallele; on ſçait que le quarré de la viteſſe acquiſe eſt toujours proportionel à la hauteur verticale que le corps a parcouru; & comme cela eſt vrai, quelle que ſoit la route du corps, il ſe fait à cet égard une conſervation de force vive rélativement à la hauteur verticale que le corps parcourt.

S'il y a pour cette hypotheſe un ſiſteme de pluſieurs corps, ſi l'on marque encore les maſſes de ces corps par m, m', m'', m''' &c. enfin ſi on exprime la gravitation acceleratrice par 1, & que l'on nomme les hauteurs verticales parcouruës par les corps du ſiſteme x, x', x'', x''' &c. on aura $uu=2x$; $u'u'=2x'$; $u''u''=2x''$; $u'''u'''=2x'''$ &c. & l'equation générale du § 2. donne

$$mvv+m'v'v'+m''v''v''+m'''v'''v'''+\&c.=2mx+2m'x'+2m''x''+2m'''x'''.$$

 c'eſt

c'eſt à dire, que la force vive entiere ſera exprimée par la maſſe de tout le ſiſteme multipliée par la double deſcente verticale du centre de gravité du ſiſteme.

V. Si nous ſuppoſons à preſent la gravitation encore uniforme, mais dont la direction tende vers un centre fixe, il n'y a qu'à ſubſtituer dans le précedent article aux deſcentes verticales des corps leurs approchemens du centre de la gravitation & la conſervation des forces vives, ſoit par raport aux corps ſimples, ſoit par raport aux ſiſtemes de corps, ſe fera de la même maniere rélativement aux dits approchemens, qu'elle ſe fait dans l'hypotheſe commune rélativement aux deſcentes verticales. Ainſi la force vive d'un corps ſimple ſera la même, quelque chemin qu'il faſſe pour parvenir d'un point donné à un point donné, & dans un ſiſteme de corps, nous aurons comme auparavant

$$m v v + m' v' v' + m'' v'' v'' + m''' v''' v''' + \&c. = 2 m x + 2 m' x' + 2 m'' x'' + 2 m''' x''' \&c.$$

en entendant par x, x', x'', x''' &c. la quantité de laquelle les corps m, m', m'', m''' &c. ſe ſont approchés du centre de gravitation. Mais ce que nous avons ajouté dans le précedent article du centre de gravité, ne peut ſubſiſter que dans l'hypotheſe commune; c'eſt un point imaginaire dans toute autre hypotheſe.

VI. Voici maintenant comment il faudra enviſager la choſe, ſi la gravitation eſt outre cela variable, ſuivant une loi quelconque, par raport aux diſtances depuis le centre de gravitation. Un corps ſimple aura toujours la même force vive, toutes les fois que partant du même point il parvient à une même diſtance depuis le centre de gravitation, quelque chemin qu'il faſſe pour parvenir d'un point à l'autre. Si donc le centre de gravitation eſt en E (fig. 1). ſi le corps commence à ſe mouvoir au point A, & qu'il parvienne au point C ſur une courbe quelconque A B C, pour trouver la viteſſe du corps en C, il n'y a qu'à tirer la ligne droite A E, & puis du centre E décrire l'arc de cercle C D, aprés quoi la viteſſe en C ſera la même, qu'au point D, ſi le corps tomboit en ligne droite vers le centre E. Il eſt donc trés facile de trouver la viteſſe du corps & ſa force vive, dans un

un point quelconque, quelle que soit la loi de la gravitation. Soit le corps dans une distance X depuis le point E & que la force acceleratrice soit exprimée par ξ, on aura $uu = -2\int \xi\, dx$. Considérons à present dans cette même hypothese un sisteme de tant de corps qu'on voudra, dont les distances au point E soyent exprimées par x, x', x'', x''' &c. & les forces acceleratrices correspondantes par ξ, ξ', ξ'', ξ''' &c. Je dis que le principe général de la conservation des forces vives pour cette hypothese sera exprimé par cette équation

$$mvv + m'v'v' + m''v''v'' + m'''v'''v''' + \&c. = -2m\int \xi\, dx - 2m'\int \xi'\, dx' - 2m''\int \xi''\, dx'' - 2m'''\int \xi'''\, dx'''$$

Dans l'intégration des termes on satisfera par l'addition des constantes aux positions initielles des corps & à la force vive que le sisteme est supposé y avoir, si son mouvement ne commence pas depuis le repos.

Ainsi, par exemple, si la gravitation acceleratrice est supposée reciproquement proportionelle aux quarrés des distances depuis le point E; si les distances initielles des corps, qui composent le sisteme, sont exprimées par a, a', a'', a''' &c. si le mouvement commence depuis le repos; si on suppose enfin que la gravitation acceleratrice sous la distance b devienne égale à la pesanteur naturelle exprimée par l'unité, nous aurons $\xi = \frac{bb}{xx}, \xi' = \frac{bb}{x'x'}, \xi'' = \frac{bb}{x''x''}, \xi''' = \frac{bb}{x'''x'''}$ &c. & le principe de la conservation des forces vives donnera cette équation

$$mvv + m'v'v' + m''v''v'' + m'''v'''v''' + \&c. = 2m\left(\frac{bb}{x} - \frac{bb}{a}\right) + 2m'\left(\frac{bb}{x'} - \frac{bb}{a'}\right) + 2m''\left(\frac{bb}{x''} - \frac{bb}{a''}\right) + 2m'''\left(\frac{bb}{x'''} - \frac{bb}{a'''}\right) + \&c.$$

VII. Supposons maintenant deux centres de forces, & que la loi de la gravitation vers chaque centre soit encore quelconque; il faudra tenir ici la même route pour parvenir à la connoissance du principe de la conservation des forces vives. Commencons donc encore par les corps simples.

Soyent

Soyent les points A & B les deux centres de forces; (fig.2.) que le corps parte du point G, & se meuve sur une courbe quelconque jusqu'au point H, tirez la droite indéfinie A B F; du centre B décrivez les deux arcs de cercle G F & H D, de même que de l'autre centre A les deux arcs de cercle G E & H C.

Pour déterminer à present la force vive qu'aura le corps au point H, je dis qu'il n'y a qu'à ajouter ensemble les deux forces vives, qu'auroit le corps, si chaque gravitation agissoit seule, de sorte que le tout pourra être déterminé par le § 6. Si l'on cherche donc la force vive que le corps prend, étant uniquement tiré vers le centre B, en parcourant la droite F D, & puis celle que le corps acquiert étant uniquement tiré vers le centre A, en parcourant la droite E C, la somme de ces deux forces vives donnera la force vive entiere du corps au point H.

Soit donc la distance B H $= x$, & la gravitation acceleratrice vers B $= \xi$; la distance A H $= y$ & la gravitation acceleratrice vers A $=$ Y; la vitesse au point H $= u$, on aura $uu = -2\int\xi dx - 2\int Y dy$. Il est vrai que la démonstration de ce principe est fort facile, mais je n'en admire pas moins la fecondité de notre principe.

Voyons à present ce qui doit arriver à un sisteme de corps; appliquons pour cet effet toutes les dénominations employées dans le précedent article au centre de forces B, & supposons par raport à l'autre centre de forces en A les distances A H $y, y', y'' y'''$ &c. & les forces acceleratrices correspondantes Y, Y', Y'', Y''' &c. Là dessus le principe de la conservation des forces vives sera exprimé par cette équation

$$mvv + m'v'v' + m''v''v'' + m'''v'''v''' + \&c. = -2m(\int\xi dx + \int Y dy) - 2m'(\int\xi' dx' + \int Y' dy') - 2m''(\int\xi'' dx'' + \int Y'' dy'') - 2m'''(\int\xi''' dx''' + \int Y''' dy''') - \&c.$$

L'exemple de la gravitation vers chaque centre de forces réciproquement proportionelle aux quarrés des distances, (si nous indiquons par raport au centre A par β & par $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ &c. ce que nous indiquons par raport au centre B par b & par a, a', a'', a''' &c.) nous fournit cette équation

mvv

$$muu + m'v'v' + m''v''v'' + m'''v'''v''' + Vc = 2m\left(\frac{bb}{x} - \frac{bb}{a} + \frac{\beta\beta}{y} - \frac{\beta\beta}{\alpha}\right) + 2m'\left(\frac{bb}{x'} - \frac{bb}{a'} + \frac{\beta\beta}{y'} - \frac{\beta\beta}{\alpha'}\right)$$
$$+ 2m''\left(\frac{bb}{x''} - \frac{bb}{a''} + \frac{\beta\beta}{y''} - \frac{\beta\beta}{\alpha''}\right) + 2m'''\left(\frac{bb}{x'''} - \frac{bb}{a'''} + \frac{\beta\beta}{y'''} - \frac{\beta\beta}{\alpha'''}\right) + \&c.$$

VIII. On voit aſſez par ce que je viens d'expoſer, que notre theorie s'etend à tant de centres de forces qu'on voudra ſuppoſer, & qu'il ſera toujours vrai de dire, que la force vive entiere d'un corps ſimple eſt celle qui reſulte en prenant la force vive pour chaque centre de gravitation à part, ſuivant le § 6, & en ajoutant enſemble toutes ces forces vives partielles. De là on connoitra toujours les quantités $muu + m'u'u' + m''u''u'' + m'''u'''u'''$ &c. que nous avons conſiderées au § 2. & que nous avons dit exprimer généralement la force vive totale d'un ſiſteme.

IX. Toutes ces remarques ſur les forces vives & leur admirable conſervation m'ont engagé à examiner encore ce qui doit arriver, lorsque les centres des gravitations changent eux-mêmes de place. Cela ſe peut faire d'une infinité de façons extrémement differentes; je n'en examinerai qu'une ſeule pour n'etre pas trop prolixe dans des recherches, qui ſont aſſez faciles d'elles mêmes. Je conſidérerai les corps doués d'une vertu attractive reciproquement proportionelle aux quarrés des diſtances: j'entreprends cet examen d'autant plus volontiers, qu'il pourra peut-être repandre quelque nouvelle lumiere ſur le ſiſteme de Mr. *Newton*.

X. Suppoſons d'abord deux corps; ces deux corps s'attireront mutuellement avec une force égale, quoiqu'eux-mêmes inegaux: d'ailleurs chaque élément de l'un attire chaque élément de l'autre: d'où il ſuit que la force attractrice mutuelle abſoluë doit toujours être eſtimée par le produit des maſſes des deux corps, tout le reſte étant égal: ainſi ſi la maſſe de l'un devenoit dix fois plus grande & la maſſe de l'autre vingt fois plus grande, la force abſoluë de l'attraction mutuelle en deviendroit 200 fois plus grande. Ceci ſuppoſé cependant, qu'une même quantité de matiere eſt douée d'une égale vertu attractive, principe que je ne prends pas encore pour tout à fait ſûr par raport à toute la matiere qui compoſe l'univers; il n'y a ſans doute aucune

 contra-

contradiction à supposer que la vertu attractive, de même que l'inertie de la matiere qui compose le Soleil, puissent être differentes de la vertu attractive & de l'inertie de la matiere, qui compose les Planetes: & si on supposoit la vertu attractive incomparablement plus petite, ou l'inertie incomparablement plus grande dans la matiere du Soleil que dans celle des Planetes, le Soleil ne pourroit être déplacé par les differentes configurations des Planetes; & peut être que cette supposition est plus conforme aux Observations astronomiques rapportées à un même sisteme, que n'est celle de Mr. *Newton*. Si l'on vouloit donc considerer les corps comme doués d'une vertu attractive differente, il faudroit multiplier encore chaque masse par sa vertu attractive; nous nous tiendrons ici à la premiere hypothese, comme plus simple, & pour déterminer tout par des quantités absolues, nous supposerons qu'une masse μ sous une distance ρ cause dans un élément de corps une force acceleratrice, qui soit égale à la pesanteur naturelle exprimée par l'unité. Ainsi la quantité μ pourra exprimer toute la matiere de la terre, & la quantité ρ le rayon de la terre. Sil y a donc deux corps, dont les masses soyent exprimées par M & m, & leur distance par x, ces deux corps s'attireront l'un l'autre avec une force $\frac{\rho\rho}{xx} \cdot \frac{Mm}{\mu}$, & la force acceleratrice du corps M sera $\frac{\rho\rho}{xx} \cdot \frac{m}{\mu}$ & celle de l'autre corps $\frac{\rho\rho}{xx} \cdot \frac{M}{\mu}$.

XI. Si les deux corps dont nous venons de parler sont en liberté de s'approcher l'un de l'autre en ligne droite; si leur distance initielle est $= a$; la force vice du corps M sera $= \frac{2\,Mm}{\mu} \cdot \frac{m}{M+m} \cdot \left(\frac{\rho\rho}{x} - \frac{\rho\rho}{a}\right)$ & la force vive du corps $m = \frac{2\,Mm}{\mu} \cdot \frac{M}{M+m} \cdot \left(\frac{\rho\rho}{x} - \frac{\rho\rho}{a}\right)$ & la somme des forces vives $= \frac{2\,Mm}{\mu} \cdot \left(\frac{\rho\rho}{x} - \frac{\rho\rho}{a}\right)$.

Voilà

Voilà quelle sera la force vive, lorsque les deux corps se meuvent avec une liberté entiere ; je dis maintenant que cette force vive sera conservée, de quelle maniere que les deux corps changent leur distance initielle a en x.

Qu'on s'imagine une courbe quelconque A B C (fig. 3.) sur laquelle glisse librement le corps M & une autre courbe D E F que décrive l'autre corps m : qu'on suppose les corps avoir été au commencement en A & D, & qu'ils soyent parvenus dans une situation quelconque B & E ; Soit la droite A D $= a$; la droite B E $= x$; je dis que la force vive des corps en B & E sera toujours $= \frac{2\,M\,m}{\mu} \cdot \left(\frac{\varrho\varrho}{x} - \frac{\varrho\varrho}{a}\right)$, & par conséquent la même que si le corps en A étoit entierement arreté, & que l'autre corps en D s'approchât librement & en ligne droite vers le point A de la quantité $a - x$, de sorte que la somme des forces vives acquises dépend encore uniquement de la distance initielle & de la distance finale des corps, ou des centres de gravitation mobiles, tout comme pour les centres de gravitation immobiles.

XII. S'il y a trois corps, qui s'attirent tous mutuellement, dont les masses soyent exprimées par m, m' & m'' ; si la distance initielle entre les corps m & m' est supposée $= a$, entre les corps m, & $m'' = b$, & celle d'entre les corps m' & $m'' = c$; si ces distances sont changées en x, y & z, je dis que la force vive des trois corps sera toujours $= \frac{2\,m\,m'}{\mu} \cdot \left(\frac{\varrho\varrho}{x} - \frac{\varrho\varrho}{a}\right) + \frac{2\,m\,m''}{\mu} \cdot \left(\frac{\varrho\varrho}{y} - \frac{\varrho\varrho}{b}\right) + \frac{2\,m'\,m''}{\mu} \cdot \left(\frac{\varrho\varrho}{z} - \frac{\varrho\varrho}{c}\right)$.

XIII. Voici à present la régle générale pour tant de corps qu'on voudra supposer : Je dis donc, qu'il faut considerer tous les corps deux à deux par toutes les combinaisons possibles, & puis chercher par le § 11. la force vive pour chaque approchement, qui s'est fait entre deux

deux corps & que la ſomme des ces forces vives partielles ſera la force vive entiere de tous les corps. Si le nombre des corps eſt n, le nombre des combinaiſons ſera $\frac{n(n-1)}{2}$ & il y aura autant de forces vives partielles qui compoſeront la force vive entiere. Et cette règle eſt vraie, de quelque façon que les corps ſoyent aſſujettis à un ſiſteme, tout comme ſi chaque corps étoit entierement libre ; donc la route des corps ne ſauroit en aucune façon alterer cette loy générale.

XIV. La règle génerale que nous venons de donner eſt vraie ſans exception pour telle autre loi de gravitations mutuelles, qu'on voudra ſuppoſer : ce n'etoit que pour rendre les formules plus préciſes & plus intelligibles, en évitant les ſignes ſommatoires, que je ſuis deſcendu à l'hypotheſe particuliere de l'attraction réciproquement proportionelle aux quarrés des diſtances. On voit donc que la nature ne s'ecarte jamais du grand principe de la conſervation des forces vives; ce que je m'etois principalement propoſé d'etablir dans ces recherches & dans ces remarques.

XV. Si le ſiſteme des corps ne commence pas ſon mouvement depuis le repos, il faudra entendre de l'augmentation de forces vives, ce que nous avons allegué ſur la force vive acquiſe. Je contois d'appliquer la theorie que nous venons d'etablir à quelques problemes ; mais d'autres occupations m'en ont empêché ; ce ſera peut-etre le ſujet du premier memoire, que j'aurai l'honneur de préſenter à l'Academie Royale des Sciences.



ME-

TAB. X

ad pag. 304.

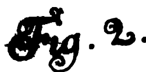
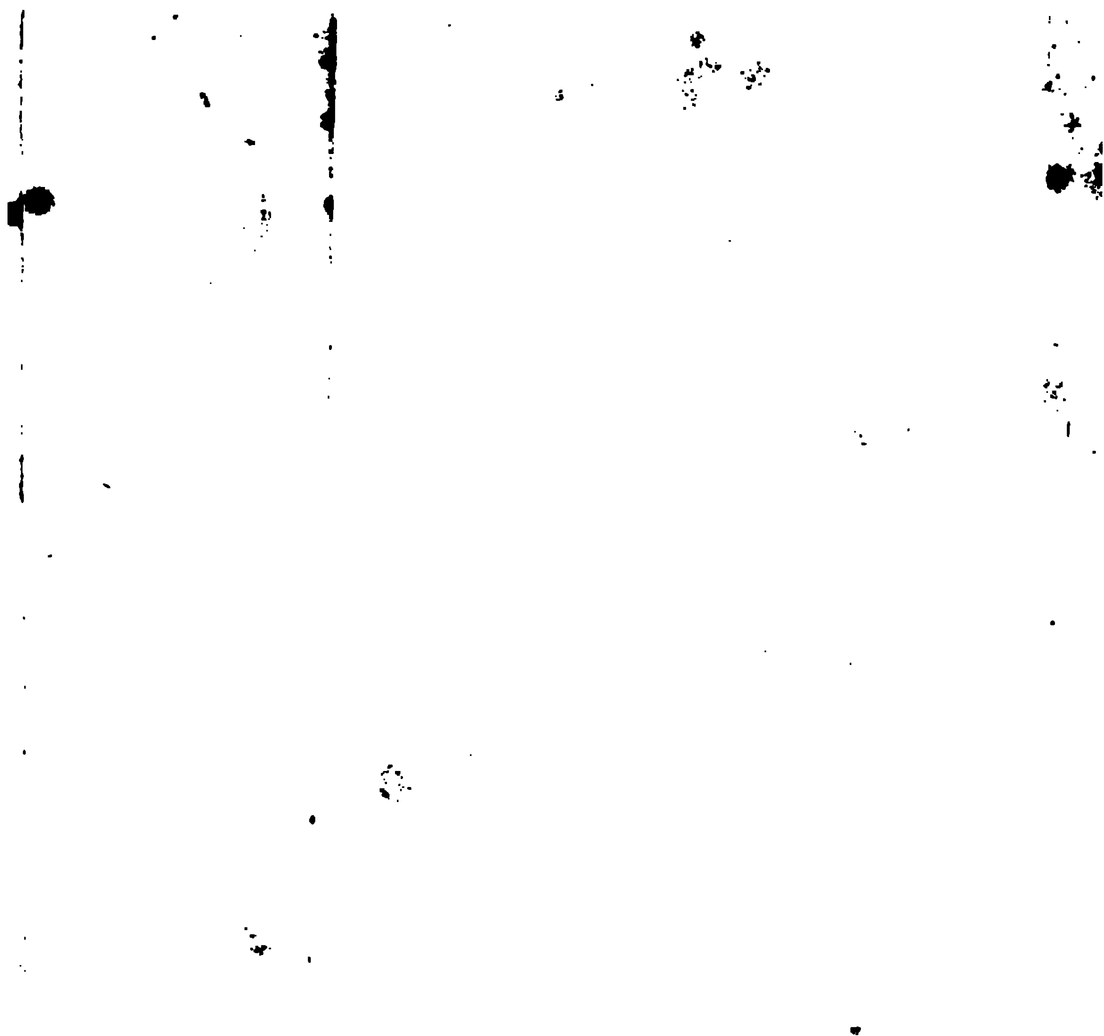


Fig. 2.



Fig. 3.



MEMOIRES

DE

'ACADEMIE ROYALE

DES

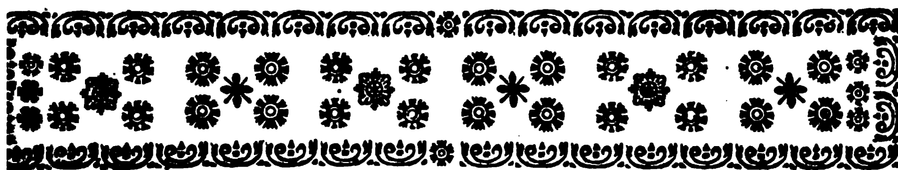
SCIENCES

ET

ELLES LETTRES.

CLASSE DE BELLES LETTRES.





FRÈDERIC III.

PREMIER ROY DE PRUSSE.



rèderic III. naquit à Königsberg en Prusse le 22. de Juillet 1657. de Louïse Henriette d'Orange, premiere femme du Grand Electeur. Sa Mére mourut, & l'Electrice Dorothée sa Belle Mère lui donna dans jeunesse des chagrins violens. Elle trouva le moyen d'aigrir l'esprit e Frèderic Guillaume contre ce fils du premier lit, qui étoit infirme, ontrefait, & dont l'education avoit été assés négligée. L'aigreur du ere alla jusqu'au point, qu'il auroit vû sans regret passer sa Succession a Prince Philippe son second fils.

On osa soupçonner dans ces tems l'Electrice d'avoir tenté de : défaire par le poison de son Beau-fils, mais outre qu'on n'en aporte aucune preuve certaine, & que ce fait est avancé assés legèreient, il ne doit point trouver place dans l'Histoire; qui, étant l'Arhive de la vérité, ne doit point souïller la mémoire des Grands, par es forfaits atroces, sans avoir en main la conviction de ces crimes.

Les faits justifient l'Electrice; Car ce qu'il y a de sûr, c'est que rèderic III. vécut, qu'il épousa en 1679. en prémieres Nôces Elizaeth Henriette, fille de Guillaume VI. Landgrave de Hesse; qu'il se emaria * aprés sa mort avec Sophie Charlotte, fille du Duc d'Hanovre

* 1684.

novre Ernest Auguste, & Soeur de George, qui depuis devint Roy d'Angleterre.

L'Electrice Dorothée en vouloit plutôt aux biens, qu'à la vie de ce Prince. On assure que le Grand Electeur se détermina sur ses sollicitations à faire un Testament, par lequel il partagea toutes les acquisitions qu'il avoit faites pendant son Regne entre ses enfans du second lit. Le parti Autrichien se servit habilement de ce Testament pour indisposer l'Electeur contre la France. L'Empereur s'engagea d'annuler cette disposition paternelle, à condition que Frederic III. lui rendit le Cercle de Swibus; nous verrons dans la suite de cette Histoire comment cette Convention s'exécuta.

1688. L'Avenement à la Régence de Frederic III. devint l'Epoque d'une nouvelle Guerre. Louïs XIV. en fut l'Auteur; Il demandoit quelques Baillages du Palatinat, comme devant revenir à Madame d'Orléans. Il se plaignoit de l'injure que les Princes Allemans lui avoient faite de se liguer à Augsbourg contre la France; Il déclaroit que son honneur étoit engagé à soutenir l'Election que les Chanoines de Cologne avoient faite du Prince de Furstemberg, à laquelle l'Empereur s'opposoit.

Cette Déclaration de Guerre fut soutenüe par des Armées. Les Maréchaux de Duras & de Montglas prirent Worms, Philipsbourg, & Mayence. Le Dauphin fit en personne les Siéges de Manheim & de Franckendahl. Presque tout le cours du Rhin passa en moins d'une Campagne sous la domination Françoise.

1689. L'Electeur qui chargeoit la France de tous les chagrins que sa Belle-Mére lui avoit donnés, à cause qu'elle eut ses raisons pour engager Frederic Guillaume dans le parti de Louïs XIV. étoit rempli d'une haine aveugle pour tout ce qui étoit François. Les Partisans de l'Empereur nourrissoient soigneusement cette haine, dont il ne pouvoit résulter pour eux que des avantages; ils la fomentoient encore en créant le fantôme de la Monarchie Universelle de Louïs XIV. avec lequel ils ensorceloient la moitié de l'Europe. L'Allemagne fut sou-

ven

vent émûë par cette machine puérile, & plongée dans des guerres qui lui étoient tout à fait étrangéres; mais comme la trempe des meilleures armes vient enfin à s'émousser, ces argumens perdirent insensiblement la force de l'illusion, & les Princes Allemands comprirent que s'il y avoit pour eux un Despotisme à craindre, ce n'etoit pas celui de Louïs XIV.

Dans ces tems là le charme étoit encore dans sa premiere force, & il opéra avec efficace sur un esprit préparé par ses préjugés à en recevoir l'impression favorablement. Frèderic III. se crut donc obligé de secourir l'Empereur. Il envoya le General Schöning avec un Corps considérable sur le Haut Rhin. Les Brandebourgeois s'emparerent de Rhinbergue; l'Electeur prit en personne le commandement de l'Armée, & il mit le Siége devant Bonn. Mayence se rendit aux Alliés; Les troupes qui avoient pris cette Ville se joignirent à celles de l'Electeur, & empêcherent Boufflers de secourir Bonn; d'Asfeldt qui en étoit Gouverneur, rendit cette Ville par Capitulation le 12. d'Octobre.

L'Electeur fit encore la Campagne suivante, & continua de 1690.
fournir des secours considérables aux Alliés contre la France.

Guillaume d'Orange avoit entrepris la Conquête de l'Angleterre, peu de tems aprés la mort du grand Electeur. Un Juif d'Amsterdam, nommé Schwartzau, lui prêta 2. Millions pour cette expedition, en lui disant: Si vous êtes heureux, je sais que vous me les rendrez; Si vous êtes malheureux, je consens de les perdre. Guillaume passa avec cette somme en Angleterre, détrona le Roy Jaques son Beau-Pére, battit le parti des Opposans, & devint en quelque façon Souverain légitime de ces trois Royaumes, par l'approbation du Peuple qui sembla autoriser son Usurpation. Jaques, qui n'avoit pû se faire considerer sur le Trône, ni régner sur une Nation dont il devoit respecter les Priviléges, laissa échapper le Sceptre de ses mains, & poursuivi par ses propres enfans qui lui avoient arraché la Couronne, il se réfugia en France. où sa Dignité & ses Malheurs ne purent le faire estimer.

1691. Le nouveau Roy d'Angleterre prit le Commandement de l'Armée des Alliés. Il gouvernoit l'Europe par ses intrigues, en excitant la jalousie de tous les Princes contre la Puissance de Louïs XIV. qu'il haïssoit. Le Monde étoit armé & en guerre, pour lui conserver le Despotisme avec lequel il gouvernoit les Provinces-Unies, qu'il auroit perdu en tems de paix. On l'appelloit le Roy d'Hollande, & le Stadthouder d'Angleterre. Malheureux à la guerre où il fut presque toujours battu; fécond & vigilant à réparer ses pertes; c'étoit l'Hidre de la fable qui se reproduisoit sans cesse, & qui étoit aussi respecté de ses Ennemis aprés ses défaites, que Louïs XIV. l'étoit aprés ses Victoires. Il eut une entrevüe avec l'Electeur au sujet des Intérêts politiques du tems.

Les Caractéres de ces Princes étoient trop differens pour qu'il pût résulter quelque chose d'important de leurs délibérations. Guillaume étoit froid, simple dans ses moeurs, & rempli de choses solides; Frèderic III. étoit inquiet, impatient, préoccupé de sa Grandeur & de sa Magnificence, réglant ses moindres actions sur l'exact compas du Cérémonial, & sur les nuances des Dignités. Un fauteüil & une chaise à dos pensérent brouiller ces Princes pour jamais. Cependant 15,000. Brandebourgeois joignirent l'Armée de Flandres que le Roy Guillaume commandoit, & l'Electeur envoya un autre secours considérable à l'Empereur contre les Infideles. Ces troupes se distinguerent à la Bataille de Salanquemen, que le Prince Eugene gagna sur les Turcs.

1692. Le Roy Guillaume, ou moins heureux, ou moins habile, perdit en Flandres les Batailles de Leusen & de Landen.

1693. Le Duc Ernest Auguste de Hanovre, Beau-Pére de Frèderic III. fournit également à l'Empereur un Corps de 6000. hommes pour la Guerre d'Hongrie, & en récompense de ce secours il obtint la Dignité Electorale. La Création de ce neuviéme Electorat rencontra beaucoup d'oppositions dans l'Empire. Il ne se trouva que les Electeurs de Brandebourg & de Saxe qui l'appuyerent, mais l'Empereur qui avoit besoin de secours réels, ne crût pas les acheter trop cher en les payant par des titres frivoles.

Il

Il sembloit que c'étoit la saison où l'ambition des Princes de-germer & éclorre. Le tems pour leur accroissement étoit si favo-e, que Guillaume d'Orange étoit devenu Roy d'Angleterre, & est d'Hanovre, Electeur. Auguste de Saxe étoit sur le point de enir Roi de Pologne, & Frèderic III. rouloit déjà dans sa tête le ein de sa Royauté.

Comme c'est un des articles principaux de la vie de ce Prince, événement important à la Maison de Brandebourg, & que le pro-le la Royauté est un noeud auquel tiennent toutes les actions de deric III. il est nécessaire que j'expose ici ce qui y donna lieu, quels moyens on l'éxécuta, & quelques détails qui influerent s la Politique de ces tems.

L'Ambition de Frèderic III. se trouvoit resserrée, tant par son t que par ses possessions; sa foiblesse ne lui permettoit pas de s'a-ndir sur des Voisins aussi forts & aussi puissans que lui; il ne restoit ressources à ce Prince que l'enflure des Titres, pour suppléer à l'in-iséque de la Puissance. Aussi tous ses Voeux se tournerent du coté la Royauté.

On trouve dans les Archives un Mémoire raisonné qu'on attri-e au Pére Vota, Jesuite: il roule sur le choix des titres de Roi des ndales, ou de Roy de Prusse, & sur les avantages qui reviendront la Royauté. Il paroit que c'est abusivement qu'on attribüe cet Ou-ge à ce Jesuite, d'autant plus que sa Societé ne pouvoit prendre cun interêt à l'agrandissement d'un Prince Protestant; il est plus turel de supposer que l'elévation du Prince d'Orange, & les espé-nces d'Auguste de Saxe, donnerent de la jalousie a Frèderic III. & citerent en lui l'émulation de se placer sur un Trône comme eux. n se trompe toujours, si l'on cherche hors des passions & du coeur main, les principes des actions des hommes.

Ce projet étoit si difficile dans son éxecution qu'il parut chimè-que au Conseil de l'Electeur. Ses Ministres, Danckelmann & Fuchs, récrioient sur sa frivolité, sur les obstacles insurmontables qu'ils évoyoient à le faire réüssir, sur le peu d'utilité qu'on devoit s'en ometttre, & sur la pésanteur du fardeau dout on se chargeoit par

une

une Dignité onereuse à soutenir, qui, dans le fonds ne rapporteroit que de vains honneurs. Mais toutes ces raisons ne purent rien sur l'esprit d'un Prince imbu de ses idées, jaloux de ses Voisins, & avide de Grandeurs & de Magnificence.

Danckelmann data sa disgrace de ce jour. Il fut envoyé à Spandow dans la suite pour avoir dit ses sentimens avec hardiesse, & pour avoir montré la verité avec trop peu d'adoucissement à une Cour corrompüe par la flatterie, & contredit un Prince vain dans les projets de sa Grandeur.

Il y a un milieu entre le poison de la flatterie & la rigidité salutaire de la vèrité, qui se peut concilier avec le caractére d'un homme d'honneur. Les leçons d'un Misantrope revoltent, mais les conseils dont on modifie la rudesse, sont comme ce miel dont on a frotté les bords d'un vase rempli d'absynthe. C'est un véhicule qui en dérobe l'amertume. Heureux sont les Princes dont les oreilles moins délicates aiment la vérité, lors même qu'elle est prodiguée par des bouches indiscretes; mais c'est un effort de vertu, dont peu d'hommes sont capables.

A' la faveur de Danckelmann succeda un jeune Courtisan peu connu par son génie & par ses talens; c'étoit le Baron de Colbe, depuis Comte de Wartemberg. Sans avoir ces qualités brillantes qui enlevent les suffrages, il possedoit l'art de la Cour, qui est celui de l'assiduïté, de la flatterie, & en un mot de la bassesse; il entra aveuglément dans les vües de son Maitre, persuadé que servir ses passions, c'étoit affermir sa fortune particuliere.

Colbe n'etoit pas assés privé de lumiére pour ne pas s'appercevoir qu'il avoit besoin d'un guide habile dans sa nouvelle carrière. D'Ilgen, Secretaire dans le Bureau des affaires étrangéres, gagna sa confiance, & le dirigea avec tant de prudence que Colbe fut déclaré Premier Ministre, & qu'il fut mis à la tête du Département des Affaires Etrangéres.

Dans le fonds Frèderic III. n'étoit flatté que par les dehors de la Royauté, par le faste de la reprêsentation, & par un certain travers de l'amour propre, qui se plait a faire sentir aux autres leur Infériorité.

Ce qui fut en effet l'ouvrage d'une vanité bourgeoise & puérile, se trouva dans la suite un Chef d'oeuvre de Politique : car la Royauté tira la Maison de Brandebourg de ce joug de servitude, où la maison d'Autriche tenoit alors tous les Princes d'Allemagne. C'étoit une amorce que Frèderic III. jettoit à toute sa Postèrité, & par laquelle il sembloit leur dire.

„Je vous ai acquis un Titre, rendez-vous en digne ; j'ai jetté „les fondemens de vôtre Grandeur ; c'est à vous d'achever l'Ou„vrage.

Frèderic III. fut obligé de remuër tous les ressorts de la Politique, & d'épuiser toutes les ressources de l'intrigue, pour conduire son projet jusqu'à sa maturité. C'étoit un préalable de s'assurer des bonnes dispositions de l'Empereur ; son approbation entrainoit les suffrages de tout le Corps Germanique. Pour prévenir l'esprit de ce Prince favorablement, l'Electeur lui remit le Cercle de Swibus, & il se contenta de l'expectance sur la Principauté de Frise, & la Baronie de Limbourg, sur lesquelles la Maison Electorale avoit d'ailleurs des droits incontestables. Par les mêmes principes les Troupes Brandebourgeoises servirent dans les armées Impériales en Flandre, au Rhin, & en Hongrie, quoique l'Electeur n'eut directement, ni indirectement, part à ces guerres, & qu'il eût été plus avantageux à ses intérêts d'observer une exacte neutralité.

Pendant que l'Europe étoit déchirée par des guerres violentes, 1695.
l'Electeur accommoda à l'exemple de son Pére, les Ducs de Mecklenbourg Schwerin & de Strelitz, qui avoient entr'eux des démêlés de Succession. L'Université de Halle fut fondée *. Il fit construire ces * en 1696.
belles Ecluses sur la Salle, qui facilitent le negoce & le transport des Sels, † & il reçût chez lui cette Ambassade unique & singulière, à la † 1697.
suite de laquelle se trouvoit le Czar Pierre Alexiowiz.

Ce jeune Czar s'étoit apperçû à force de génie qu'il étoit un Barbare, & que sa Nation étoit sauvage ; il sortoit alors pour la premiere fois de ses Etats, ayant formé le noble projet de s'instruire, & de rapporter dans le sein de sa Patrie, les lumiéres de la Raison, & l'industrie qui lui manquoient. La Nature avoit fait de ce Prince un

grand homme, mais un défaut total d'education l'avoit laissé sauvage. De là résultoit sans cesse dans sa conduite un mêlange extraordinaire d'actions véritablement grandes & de singularités, de reparties spirituelles & de manieres grossieres, de desseins salutaires & de vengeances cruelles. Il se plaignoit lui-même de ce que, parvenant à policer sa Nation, il ne pouvoit encore dompter sa propre ferocité. En morale c'étoit un Phénomene bizarre, qui inspiroit l'admiration & la terreur. Pour ses sujets c'étoit un orage, dont la foudre abattoit les Clochers & les Arbres, & dont la pluye rendoit les Contrées fecondes. De Berlin il se rendit en Hollande, & de là en Angleterre.

L'Europe s'acheminoit dés lors à grands pas vers la Paix générale. Les Alliés étoient rebutés du mauvais succés de leurs Armes; & Loüis XIV. qui voyoit Charles II. Roy d'Espagne sur son déclin, d'un tempérament à ne pas promettre une longue vie, se prêta facilement à la paix; quoiqu'il rendit ses Conquêtes presque sans restriction, il sacrifia ces avantages passagers à des desseins plus importans. Il lui falloit l'aisance de la paix pour les préparatifs d'une nouvelle guerre, dont l'objet étoit de la derniere conséquence pour la maison de Bourbon. La Paix fut concluë à Ryswick, & l'Electeur qui n'avoit concouru à cette guerre que par complaisance, n'en retira non plus aucun avantage.

Dans le Nord, Auguste de Saxe fut élû Roy de Pologne, & les intrigues de Flemming son Ministre, & son Général, l'emporterent sur
* 1698. les liberalités du Prince de Conti. * Le nouveau Roy de Pologne s'étoit épuisé par ses dépenses, ce qui l'obligea de vendre a Frèderic III.
† 1699. l'Avocatie de l'Abbaye de Quedlinbourg & du Petersberg de Halle †.

L'Electeur profita des troubles de la Pologne, & s'empara d'Elbing, pour se rembourser d'une somme que les Polonois lui devoient. On moyenna un accommodement par lequel les Polonois lui engagerent une Couronne & des bijoux Russiens. Aprés quoi l'Electeur fit évacuer la Ville, & conserva, du consentement de la République la possession du territoire d'Elbing.

L'Europe ne tarda pas d'être agitée par des troubles nouveaux au commencement de ce Siécle, à cause de la Succession de Charles

II,

II. Roy d'Espagne qui vint à mourir, La Maison de Bourbon, & celle d'Autriche, se la disputoient.

On avoit essayé de prévenir les guerres sanglantes auxquelles cette Succession donneroit lieu. Louïs XIV. étoit convenu avec les Puissances maritimes d'un Traité de partage. On avoit ensuite pris d'autres arrangemens, mais il étoit écrit dans le livre des Destins qu'il n'en seroit rien. Le jeune Prince de Bavière, destiné au Trône d'Espagne, mourut même avant Charles II.

L'Empereur protestoit d'ailleurs contre tout partage; il soutenoit l'indivisibilité de la Monarchie Espagnole, & prétendoit qu'étant d'une même Maison, divisée en deux Branches, elles avoient droit de succeder les unes aux autres, celle d'Espagne à celle d'Autriche, & celle d'Autriche à celle d'Espagne. L'Empereur Leopold & Louïs XIV. étoient au même dégré, tous deux petits-fils de Philippe III. Tous deux avoient épousé des filles de Philippe IV. Mais le droit d'aînesse étoit dans la Maison de Bourbon, & Louïs XIV. fondoit principalement ses droits sur ce fameux Testament de Charles II. que le Cardinal Porto-Carrero, & son Confesseur, lui firent signer, agonisant & d'une main tremblante. Ce Testament changea la face de l'Europe.

Louïs XIV. céda ses droits a son Petit-fils, Philippe d' Anjou, esperant d'applanir par le choix de ce Prince éloigné du Trône de France les difficultés & les obstacles que la jalousie de l'Europe pourroient porter a sa Grandeur. Philippe passa en Espagne; il fut reconnu Roy par tous les Princes, à l'exception de l'Empereur Joseph.

Au commencement de cette Guerre, la France étoit au comble de sa Grandeur. Elle se voyoit victorieuse de tous ses ennemis. La Paix de Ryswick faisoit l'eloge de sa modération. Louïs XIV. déployoit dans l'Univers entier sa Splendeur & sa Magnificence; Il étoit craint & respecté. La France étoit comme un Athléte, préparée seule au combat, qui entroit dans une lice où il ne paroissoit encore aucun adversaire; rien n'étoit épargné pour les préparatifs des Armemens de terre & des Armemens de Mer, également nombreux. Dans ses plus violens efforts, cette Monarchie entretint 400. mille Combattans, mais les

grands

grands Généraux étoient morts, & il se trouva, (avant que le merite de Villars se fut fait connoitre,) que la France avoit 800. Mille bras, mais point de tête: tant il est vrai de dire, que la fortune des Etats ne dépend souvent que d'un seul homme !

La Maison d'Autriche étoit bien éloignée de se trouver dans une situation aussi heureuse; elle étoit presque épuisée par les guerres continuelles qu'elle avoit soutenüe. Son Gouvernement étoit dans la langueur & dans la foiblesse, & cette Puissance jointe au Corps Germanique ne pouvoit rien sans le secours des Hollandois, & des Anglois; mais avec moins de ressources & de troupes que la France, elle avoit à la tête de ses Armées le Prince Eugene de Savoye.

Le Roy Guillaume, qui gouvernoit l'Angleterre & la Hollande, étoit dans l'engourdissement de la surprise, en apprenant cette nouvelle, & il reconnut le Duc d'Anjou Roy d'Espagne par une espece de précipitation: mais dés que la réfléxion l'eut ramené à son flegme naturel, il se déclara pour la maison d'Autriche, parce que la Nation Angloise le vouloit, & que son interêt sembloit le demander.

Le Nord étoit lui-même plongé dans la guerre que Charles XII. portoit en Dannemarck; la Jeunesse de ce Prince avoit inspiré à ses voisins l'audace de l'attaquer; mais ils trouverent un Prince qui joignoit un courage impétueux à des vengeances implacables.

Frèderic III. qui étoit en paix, se laissa entrainer dans la grande Alliance contre Louïs XIV. dont le Roy Guillaume étoit l'ame, pour se frayer le chemin de la Royauté par ce service, pour subvenir par ses subsides à l'entretien d'un Corps nombreux de troupes, & pour que cet argent étranger soulagea la prodigalité de sa magnificence.

Il est difficile de comprendre, comment cette espece de fierté qu'ont les ames génereuses, peut se concilier avec la bassesse qu'il y a d'être aux aumônes de ses égaux. Les tentatives de la France furent vaines pour détacher l'Electeur de cette Alliance; il étoit lié par des subsides, par son inclination, & par ses esperances.

Ce fut dans ces conjonctures que se négocia à Vienne le Traité de la Couronne, par lequel l'Empereur s'engagea de reconnoitre

Frèderic III. Roy de Pruſſe, moyennant qu'il lui fournit un ſecours de dix mille hommes à ſes dépens pendant le cours de toute cette guerre; qu'il entretint une Compagnie de Garniſon à Philipsbourg, qu'il allât de concert avec l'Empereur dans toutes les affaires de l'Empire, que ſa Royauté n'alterât en rien les obligations de ſes Etats d'Allemagne, qu'il renonçât au Subſide que la Maiſon d'Autriche lui devoit, & qu'il promit de donner ſa voix pour l'Election des enfans mâles de l'Empereur Joſeph; „à moins qu'il n'y eut des raiſons „graves & importantes qui ne l'obligeaſſent d'élire un Empereur d'u„ne autre Maiſon."

Ce Traité fut ſigné & ratifié. Rome cria, & Varſovie ſe tût. L'Ordre Teutonique proteſta contre cet Acte, & oſa revendiquer la Pruſſe; le Roy d'Angleterre qui ne cherchoit que des Ennemis à la France, les achetoit à tout prix. Il avoit beſoin des ſecours de l'Electeur dans la grande Alliance, & il le reconnut des premiers. Le Roy Auguſte qui affermiſſoit ſa Couronne ſur ſa tête, y ſouſcrivit. Le Dannemarck, qui ne craignoit & n'envioit que la Suède, s'y prêta facilement. Charles XII. qui ſoutenoit une guerre difficile ne crut pas qu'il lui convint de chicaner ſur un titre pour augmenter le nombre de ſes Ennemis, & l'Empire fut entrainé par l'Empereur, comme on l'avoit prévû. Ainſi ſe termina cette grande Affaire qui avoit trouvé de l'oppoſition dans le Conſeil de l'Electeur, dans les Cours étrangéres, chez les Amis comme chez les Ennemis, à laquelle il fallut une complication de Circonſtances auſſi extraordinaires pour qu'elle put réüſſir, qu'on avoit traitté de chimérique, & dont on prit bientôt une opinion differénte. Le Prince Eugene dit en l'apprenant, que l'Empereur devroit faire pendre les Miniſtres qui lui avoient donné un conſeil auſſi perfide.

Le Couronnement ſe fit l'année ſuivante. Le Roy que nous appellerons déſormais Frèderic I. ſe rendit en Pruſſe, & dans la Cérémonie du Sacre, on obſerva qu'il ſe mit luy-même la Couronne ſur la tête. Il créa en mémoire de cet événement l'Ordre des Chevaliers de l'Aigle noir. 1702.

Le Public ne pouvoit cependant pas revenir de la prévention dans laquelle il étoit contre cette Royauté. Le bon sens du vulgaire désiroit une augmentation de puissance avec une augmentation de Dignités. Ceux qui n'étoient pas Peuple, pensoient de même; il échapa à l'Electrice de dire à quelqu'une de ses femmes; „Qu'elle é-„toit au desespoir d'aller jouër en Prusse la Reine de Théatre vis à „vis de son Esope.“ Elle écrivit à Leibnitz. „Ne croyez pas que je „préfére ces Grandeurs & ces Couronnes, dont on fait ici tant de cas, „aux charmes des entretiens Philosophiques que nous avons eûs à „Charlottenbourg.

Aux pressantes sollicitations de cette Princesse, se forma à Berlin l'Academie Royale des Sciences, dont Leibnitz fut le fondateur & le Chef. On persuada à Frèderic I. qu'il convenoit à sa Royauté d'entretenir une Academie, comme on fait accroire à un nouveau Gentilhomme qu'il est séant d'entretenir une meute de chasse. On se propose de parler en son lieu de cette Academie avec plus d'étendüe.

Le Roy s'abandonna aprés son couronnement au penchant qu'il avoit aux Cérémonies & à la magnificence, sans plus y mettre de bornes. A son retour de Prusse, il fit une entrée superbe à Berlin.

Pendant le divertissement de ces Fêtes & de ces Célébrités, on apprit que Charles XII. cet Alexandre du Nord, qui auroit ressemblé en tout au Roy de Macedoine, s'il eut eu sa fortune, venoit de remporter sur les Saxons auprés de Riga une Victoire complette. Le Roy de Dannemarck & le Czar avoient attaqués, comme on l'a dit, ce jeune Héros, l'un en Norwegue, & l'autre en Livonie. Charles XII. força dans sa Capitale le Monarque Danois à faire la paix; De là il passa avec 8000. Suedois en Livonie, défit 80. mille Russes auprés de Nerva, & battit 30. mille Saxons au passage de la Dwina.

La fuite des Saxons les entraîna vers les limites de la Prusse. Frèderic I. en fut d'autant plus inquiet que la plus grande partie des ses troupes servoit dans les Armées Impériales, & que la Guerre s'approchoit de son nouveau Royaume. Charles XII. promit cependant, en considération des intercessions de l'Empereur, de l'Angleterre & de la Hollande, la neutralité pour la Prusse.

Ces

Ces années étoient l'Epoque des triomphes du Roi de Suéde; il disposoit en Souverain de la Pologne, ses négociations étoient des ordres, & ses Batailles des Victoires: mais ces Victoires toutes brillantes qu'elles étoient, consumoient les Vainqueurs, & obligoient le Héros à renouveller souvent ses armées. Un transport de troupes Suèdoises se rendit en Pomeranie; Berlin en prit l'allarme, ces troupes n'en traverserent pas moins l'Electorat, & se rendirent en Pologne au lieu de leur destination. 1702.

Le Roy leva 8000. hommes de nouvelles troupes. Au lieu de les employer à la sureté de ses Etats, il les envoya en Flandres à l'Armée des Alliés, il se rendit lui-même au Pays de Cléves pour recueillir l'héritage de Guillaume d'Orange Roy d'Angleterre, auquel Anne, seconde fille du Roy Jaques, succeda au Trône.

Les droits de Frèderic I. se fondoient sur le Testament de Fréderic Henri d'Orange qui avoit substitué ses biens, en cas d'extiction des mâles, sur se chef de sa fille, Epouse du Grand Electeur. Le Roy Guillaume laissa un Testament tout contraire en faveur du Prince Frison de Nassow, dont les Etats Généraux devoient être les Exécuteurs. Les biens de la Succession consistoient dans la Principauté d'Orange, de Moeurs, & dans différentes Seigneuries & fonds de terre situés en Hollande & en Zélande.

Frèderic I. menaçoit de retirer ses troupes de la Flandre, si on ne lui rendoit justice. Cette menace persuada aux Hollandois que ses droits étoient légitimes. On parvint cependant à régler un accord provisionel, qui partageoit l'héritage en deux parties égales. Un gros Diamant fut d'abord remis à Frèderic I. & il consentit à laisser ses troupes en Flandre. Louïs XIV. mit le Prince de Conti en possession d'Orange; le Roy s'en trouva grièvement offensé, il augmenta son Armée, & prit même des troupes de Gotha & de Wolffenbuttel à son service. Il déclara peu aprés la Guerre à la France, à cause que l'Armée de Boufflers avoit commis quelques excés dans le Païs de Cléves. Louïs XIV. ne s'apperçût pas qu'il eut un nouvel ennemi, & le nouveau Roy fit en cela beaucoup pour sa passion, mais rien pour ses interets: il manifestoit sa haine pour la France dans toutes les

occasions ; il obligea le Duc Antoine Ulrich de Wolffenbüttel à renoncer aux engagemens qu'il avoit pris avec Louïs XIV. aprés que les Ducs d'Hanovre & de Zell eurent dissipé les troupes qu'il entretenoit au moyen des subsides François.

1703. Dans ce tems l'Angleterre faisoit des efforts prodigieux pour la Maison d'Autriche. Ses flottes transporterent l'Archi-Duc Charles (qui depuis devint Empereur,) dans ce Royaume, qu'une Armée Angloise devoit aider à lui conquerir. L'enthousiasme de l'Europe pour la Maison d'Autriche surpassoit tout ce qu'on en peut dire.

Dans cette Guerre de Succession, les Troupes Prussiennes soutinrent avec éclat la réputation qu'elles avoient acquises sous le grand Electeur. Sur le Rhin, elles prirent Keyserswerth en Allemagne; dans cette action de Höchstedt, où Villars surprit & battit Stirheim, le Prince d'Anhalt fit une belle retraite avec les 8000. Prussiens qu'il commandoit. Je lui ai ouï dire, que lorsqu'il s'apperçut de la confusion & de la fuite des Autrichiens, il forma un quarré de ses troupes, & traversa une grande plaine en bon ordre jusqu'à un bois qu'il gagna vers la nuit, sans que la Cavalerie Françoise osât l'entamer.

Le succés des Troupes Prussiennes sur le Rhin, & leur bonne conduite en Söuabe ne rassurérent pas Fréderic I. contre l'apprehension que lui donnoit le voisinage des Suédois; rien ne leur résistoit alors. Le gènie de Pierre I. la magnificence d'Auguste, étoient impuissans contre la fortune de Charles XII. Ce Héros étoit à la fois plus valeureux que le Czar, & plus vigilant que le Roy de Pologne. Pierre préferoit la ruse à l'audace, Auguste les plaisirs aux travaux, & Charles l'amour de la gloire à la possession du Monde entier. Les Saxons étoient souvent surpris ou battus, les Moscovites avoient appris à leurs dépens l'art de se retirer à propos; ils ne faisoient qu'une Guerre d'incursions, les armées Suédoises étoient seules assaillantes, & victorieuses jusqu'alors. Mais Charles XII. dont l'inflèxible opiniatreté ne mollissoit jamais, ne savoit éxecuter ses projets que par la force : il domptoit la fortune comme ses Ennemis. Le Czar & le Roy de Pologne suppléoient à cette valeur d'enthousiasme par les Intrigues du Cabinet; ils éveilloient la jalousie de l'Europe, & suscitoient l'en-

l'envie contre le bonheur d'un jeune Prince ambitieux, implacable dans ses haines, & qui ne savoit se venger des Rois ses ennemis qu'en les détrônant.

Ces intrigues n'êmpecherent pas Frèderic I. qui n'avoit point de troupes à sa disposition, de conclurre une Alliance défensive avec Charles XII. qui avoit une Armée victorieuse dans le voisinage. Frèderic I. & Stanislas reconnurent reciproquement leur Royauté; le Traité ne dura qu'autant que la fortune de Charles XII. ne se démentit point.

Malgré cette Alliance le Roi fournit toutes ses Places de la Prusse, de garnisons suffisantes, & * il envoya de nouveaux secours à l'Armée Alliée en Söuabe. Les Prussiens y eurent une part considerable au gain de la fameuse Bataille de Höchstedt; ils étoient à la droite sous les ordres du Prince d'Anhalt, & de ce Corps d'Armée que le Prince Eugene commandoit. 'A la premiere attaque la Cavalerie & l'Infanterie Impériale plierent devant les François, & les Bavarois, mais les Prussiens soutinrent le choc, & enfoncerent les ennemis; le Prince Eugene vint se mettre à leur tête, piqué de la mauvaise manoeuvre des Autrichiens, il dit qu'il vouloit combattre avec de braves Gens, & non pas avec des Troupes qui lâchoient le pied. C'est un fait connu, que Milord Malborough fit une partie de l'Infanterie & de la Cavalerie Françoise prisonniére au Village de Blenheim, & que le gain de cette Bataille fit perdre aux François la Baviére & la Söuabe.

1703.

* 1704.

Milord Malborough se rendit à Berlin, aprés avoir terminé cette glorieuse Campagne, pour disposer Frèderic I. à l'envoy d'un Corps de ses troupes en Italie. Cet Anglois qui avoit jugé des projets de Charles XII. en voyant une Carte Geographique étendüe sur sa table, pénétra facilement le caractére de Fréderic I. en jettant un regard sur sa Cour: il étoit rempli de soumissions & de souplesses devant ce Prince, il flattoit adroitement sa vanité & s'empressoit a lui présenter l'éguiere, lorsqu'il se levoit de table. Fréderic ne put lui résister, & il accorda aux flatteries du Courtisan ce qu'il auroit peut-être refusé au mérite du Grand Capitaine, & à l'habileté du profond

 Poli-

Politique, & le Prince d'Anhalt marcha en Italie à la tête de 8000 hommes.

1705. La mort de la Reine Sophie Charlotte mit alors toute la Cour en deuïl. C'étoit une Princesse d'un merite distingué, qui joignoit tous les appas de son Sexe aux graces de l'esprit & aux lumières de la raison. Elle avoit voyagé dans sa jeunesse en Italie & en France, sous la conduite de ses Parens. On la destinoit pour le Trône de France; Louïs XIV. fut touché de sa Beauté, mais des raisons de politique firent échoüer ce mariage. Cette Princesse amena en Prusse l'esprit de la Société, la vraye Politesse, & l'Amour des Arts & des Sciences. Elle fonda, comme on l'a dit plus haut, l'Academie Royale. Elle appella Leibnitz, & beaucoup d'autres Savans à sa Cour: sa curiosité vouloit saisir les premiers principes des choses. Leibnitz qu'elle pressoit un jour sur ce sujet, lui dit; „Madame, il n'y a pas moyen „de vous contenter: vous voulez savoir le pourquoi du pourquoi." Charlottembourg étoit le rendés-vous des gens de goût; toutes sortes de divertissemens & de fêtes variées a l'infini rendoient ce séjour délicieux, & cette Cour brillante.

Sophie Charlotte avoit l'ame forte, sa Religion étoit épurée, son humeur douce, son esprit orné de la Lecture de tous les bons Livres François & Italiens. Elle mourut à Hanôvre dans le sein de sa famille. On voulut introduire un Ministre Réformé dans son appartement: „Laissez-moi mourir, lui dit elle, sans disputer.„ Une Dame d'honneur qu'elle aimoit beaucoup, se fondoit en larmes. „Ne me plaignez „pas, reprit elle, car je vais à present satisfaire ma curiosité sur les „principes des choses, que Leibnitz n'a jamais pû m'expliquer, sur „l'espace, sur l'infini, sur l'Etre, & sur le Néant, & je prépare au „Roi mon Epoux le Spectacle de mon Enterrement, où il aura une „nouvelle occasion de déployer sa magnificence.„ . Elle recommanda en mourant les Savans qu'elle avoit protégés, & les Arts qu'elle avoit cultivés, à l'Electeur son frere. Frèderic I. se consola par la cérémonie de cette Pompe funébre, de la perte d'une Epouse qu'il n'auroit jamais asses pû regretter.

En

En Italie la Guerre commençoit à devenir plus vive. Les Prussiens que Milord Malborough y avoit fait marcher, furent battus à Casano avec le Prince Eugene, & à Calcinato, lorsque le Général Reventlau qui les commandoit, y fut surpris par le grand Prieur. 1606.

Le Prince Eugene pouvoit être battu, mais il savoit réparer ses pertes en grand homme, & l'echec de Casano fut bientôt oublié par le gain de la fameuse Bataille de Turin, auquel les Prussiens eurent la part principale. Quoique le Duc d'Orleans proposât aux François de sortir de leurs retranchemens, son avis ne fut point suivi; la Feuillade & Marsin avoient des Ordres de la Cour, qui portoient, à ce qu'on assure, de ne point hazarder de bataille. Celle de Höchstedt avoit rendu, à ce qu'il paroit, le Conseil de Louïs XIV. plus circonspect. 1607.

Les François qui auroient été du double superieurs aux Alliés, s'ils les avoient attaqués hors de leurs Retranchemens, leur furent inférieurs partout, à cause que les quartiers différens qu'ils avoient à défendre, étoient d'une étendüe immense, & de plus séparés.

Les Prussiens qui avoient l'aile gauche de l'Armée des Alliés, attaquerent la droite du retranchement François qui s'appuyoit à la Doria. Le Prince d'Anhalt étoit déjà aux bords du fossé, & la résistance des ennemis rallentissoit la vigueur de son attaque, lorsque 3. Grenadiers se glisserent le long de la Doria, & tournerent le Retranchement François par un endroit où il n'étoit pas bien appuyé à cette Riviére. Tout d'un coup une voix s'entendit dans l'armée Françoise: nous sommes coupés; elle abandonne son poste, prend la fuite, & en même tems le Prince d'Anhalt escalade le retranchement, & gagne la Bataille. Le Prince Eugene en fit un Compliment au Roy, où l'eloge de ses troupes devoit lui faire d'autant plus de plaisir qu'il partoit d'un Prince qui devoit bien s'y connoitre.

Fréderic I. fit pendant cette guerre quelques acquisitions pacifiques. Il acheta le Comté de Tecklenbourg en Westphalie du Comte de Solms Braunsfels; & Madame de Nemours qui étoit en possession de la Principauté de Neufchâtel, venant de mourir, le Conseil d'Etat de Neufchatel prit la Régence, & élut quelques uns de ses Membres

bres pour juger des prétentions que le Roy de Prusse formoit d'un côté, & tous les Parens de la Maison de Longueville d'un autre. La Principauté de Neufchâtel fut adjugée au Roy, comme ayant les meilleurs droits en qualité d'Heritier de la Maison d'Orange. Louïs XIV. s'éleva contre cette sentence, mais il avoit de si grands interêts à discuter qu'ils firent évanouïr devant eux ces petits litiges, & la Souveraineté de Neufchatel fut assurée à la Maison Royale par la Paix d'Utrecht.

Charles XII. étoit parvenu alors au plus haut période de ses prosperités. Il avoit détrôné Auguste de Pologne, & lui avoit prescrit les loix d'une paix dure à Alt-Ranstadt au milieu de la Saxe. Le Roy vouloit disposer ce Prince à quitter la Saxe, il lui envoya son Grand Marêschal Printz pour le prier de ne point troubler la paix de l'Allemagne par le séjour qu'il y faisoit avec ses troupes.

Charles XII. qui avoit d'ailleurs le dessein de quitter les Etats d'un Prince qu'il avoit mis aux abois, pour renouveller la même Scene avec le Czar à Moskow, trouva mauvais que Printz lui fit de pareilles propositions, & lui demanda ironiquement: „Si les troupes Prussiennes étoient aussi bonnes que les Brandebourgeoises.„ Oui, Sire, lui „répondit l'Envoyé, elles sont encore composées de ces vieux Sol-„dats qui se trouverent à Fehrbellin.“ Charles XII. obligea l'Empereur, en passant par la Silésie, de restituer 125. Eglises aux Protestans de ce Duché. Le Pape en murmura, & n'épargna pas ses Censures. Joseph lui répondit, que si le Roy de Suède lui eut proposé de se faire Lutherien-lui même, il ne savoit pas trop ce qui en feroit arrivé.

Ces mêmes Suédois qui faisoient alors la terreur du Nord, ré-
1708. tablirent avec les Prussiens & les Hannovriens le calme dans la Ville
de Hambourg, qu'une sédition populaire avoit troublée. Frèderic I.
y envoya 4000. hommes pour soutenir les prérogatives des Echevins
& des Syndics. Il eut quelques démelês avec ceux de Cologne, à cau-
se que la populace de cette Ville avoit enfoncé les Portes du Rési-
dent Prussien, qui tenoit une Chapelle Réformée dans sa Maison. Le
Roy fit arrêter des Marchandises de Cologne, qui descendoient le

Rhin

hin, & passoient par Wesel, & il menaça d'interdire le culte Catho-
que dans ses Etats, sur le même pied qu'il en avoit usé, lorsque l'Ele-
eur Palatin avoit persecuté les Protestants du Palatinat. La crainte
e ces représailles fit rentrer la Ville de Cologne dans son devoir, &
ii apprit que la tolérance est une vertu, qu'il est quelquefois même
ngereux d'enfreindre.

La Cour de Frèderic I. étoit alors pleine d'intrigues. Ce Prince
oit comme une mer agitée par differens vents, poussé tantôt d'un
té, tantôt de l'autre; mais pendant ces orages qu'excitoient les Cour-
sans, d'Ilgen conduisoit toujours le Gouvernail de l'Etat d'une main
rme & sure. Les Favoris du Roy étoient des gens de peu de génie.
urs intrigues étoient grossiéres, & leurs fourberies ouvertes; le
ince Royal ne pouvoit déguiser le mécontentement qu'il avoit de
ır conduite. Ces marques de sa mauvaise volonté leur fit penser à
yer leur credit d'un nouvel appuy, & ils persuaderent au Roi de se
rier; quoiqu'il fut trés infirme, qu'il ne vêcut que par l'art des Me-
cins, & qu'il chicana par un reste de tempérament un souffle de vie
i lui restoit. On lui choisit une Princesse de Mecklenbourg-Schwe-
, nommée Sophie Louïse, dont l'age, la façon de penser, & les in-
nations ne s'accordoient point avec celles de ce Prince; il n'eut
grément que les Cérémonies de la Nôce, le reste du mariage ne
que malheureux.

Frèderic I. ne recevoit que de bonnes nouvelles de ses troupes:
s ne se distinguerent pas moins en Flandres qu'en Italie, elles fi-
t des merveilles sous le Commandement du Comte de Lothum,
bataille d'Oudenarde & au Siége de Lille.

La fortune se lassa enfin de protéger les caprices de Charles XII. 1709.
voit joui de 9. Années de succès. Les 9. dernieres années de sa
ne furent qu'un enchainement de revers: il venoit de rentrer vi-
rieux en Pologne avec une Armée nombreuse, chargée des trésors,
dépouilles des Saxons.

Leipzig fut la Capoüe des Suédois, soit que les délices de la Saxe
ent amolli ces Vainqueurs; soit que la prospérité enflât l'audace

de ce Prince, & le poussât au delà de son but, il n'eût plus que des malheurs affreux à essayer. Il vouloit disposer de la Russie, comme de la Pologne, & détroner le Czar, comme il avoit détroné Auguste. Dans ce dessein il s'avança vers les frontiéres de la Moscovie, où deux chemins le conduisoient, l'un par la Livonie, où tous les secours de la Suède étoient à portée de le joindre, par lequel il auroit pû s'avancer jusqu'à la nouvelle Ville, que le Czar fondoit alors sur les bords de la Balthique, & détruire pour jamais le lien qui devoit joindre la Russie avec l'Europe. L'autre chemin traversoit l'Uckraine, & conduisoit à Moskow par des Déserts impraticables. Charles XII. se détermina pour ce dernier; ou, parce qu'il avoit ouï dire qu'on ne vaincroit jamais les Romains que dans Rome, ou que la difficulté de l'entreprise irrita son courage, ou parce qu'il comptoit sur Matzepa, Prince des Cosaques, qui lui avoit promis de fournir son armée de vivres, & de la joindre avec un nombre considerable des siens. Le Czar fut averti des intrigues de ce Cosaque, il dissipa les Troupes que Matzepa assembloit, & s'empara de ses Magasins, de sorte que lorsque le Roy de Suéde arriva devant la petite Ville de Pultawa, il ne trouva que des déserts affreux, au lieu de Magazins, & un Prince fugitif qui venoit chercher un azile dans son Camp, au lieu d'un Allié puissant qui lui amenoit des secours.

Ces contretems ne rebuterent point Charles XII. Il assiégea Pultawa, comme s'il n'eut manqué de rien; lui, qui avoit été invulnérable jusqu'alors, fut blessé à la jambe, en s'amusant à reconnoitre cette bicoque de trop prés. Son Général Löwenhaupt qui lui amenoit des vivres, des munitions, & un secours de 13. mille hommes, fut battu par le Czar à trois reprises, & obligé dans cette nécessité de brûler les Convois qu'il conduisoit, il n'arriva au Camp du Roy qu'avec 3000. hommes de Troupes extenuées de fatigues.

Le Czar s'approcha bientôt de Pultawa, & dans cette plaine se donna cette Bataille si célébre entre les deux hommes les plus singuliers de leur Siécle.

Charles XII. qui jusqu' alors, comme l'Arbitre des Destins, n'avoit rien trouvé qui arrêtât ses volontés, fit tout ce qu'on pouvoit

voit attendre d'un Prince bleſſé, & porté ſur des brancards. Pierre Alexiowitz, qui n'avoit été que Legislateur jusqu'alors, aſſiſté de Mentzikow, marqua dans cette journée qu'il poſſedoit les parties d'un grand Capitaine, & ſe ſurpaſſa. Mais tout étoit fatal aux Suèdois; la bleſſure de leur Roy qui l'empêchoit d'agir; la miſére qui leur otoit les forces pour combattre; un corps détaché qui s'égara le jour de cette bataille déciſive, le nombre de leurs ennemis, & le tems qu'ils avoient eu d'élever des Redoutes, & de diſpoſer avantageuſement leurs Troupes. Enfin les Suèdois furent battus, & perdirent, par un inſtant déciſif & malheureux, le fruit de neuf Années de travaux & de tant de prodiges de valeur.

Charles XII. fut réduit à chercher un azile chez les Turcs; ſes haines implacables le ſuivirent à Bender, d'où il eſſaya vainement par ſes intrigues de ſoulever la Porte contre les Moscowites. Il devint ainſi la victime de ſon infléxibilité d'eſprit, qu'on auroit appellé opiniatreté, s'il n'eut pas été un Hèros. Aprés cette défaite l'Armée Suèdoiſe mit bas les armes devant le Czar aux bords du Boryſthène, comme l'Armée Moſcovite l'avoit fait devant Charles XII. aux rives de la Balthique, aprés la Bataille de Narva.

Auguſte qui vit ſon antagoniſte renverſé, ſe crût dégagé de ſa parole, & du Traité d'Alt-Ranſtadt, il s'aboucha à Berlin avec le Roy de Dannemarck & Frèderic I. Enſuite de quoi, Auguſte rentra avec une Armée en Pologne, & le Roy de Dannemarck attaqua les Suèdois en Scanie. Frèderic I. que ces Princes ne purent ébranler, demeura neutre.

En Pologne tous les partiſans Suèdois ſe tournerent du côté des Saxons. Stanislas étoit auprès de l'armée Suédoiſe, que Craſſaw commandoit. Ce Général ſe trouvant reſſerré par les Moſcowites & les Saxons, traverſa la Nouvelle Marche, & ſe rendit à Stettin ſans qu'il en pût demander la permiſſion à Frèderic I. qui voyoit avec déplaiſir ces paſſages, & ces Armées nombreuſes dans ſon voiſinage.

Le Roy fit un voyage à Königsberg où il obtint du Czar, qui

 s'y

s'y étoit rendu, qu'il rétabliroit le jeune Duc de Courlande, Neveu de Frèderic I. dans ses Etats, à condition qu'il épouseroit la Nièce de Pierre Alexiowitz.

Du coté du Sud la France faisoit à la Haye des propositions de paix, mais la fermentation des esprits étoit encore trop grande, & les espérances des deux partis trop vagues, & trop chimériques, pour qu'on pût s'accorder. Si les hommes étoient capables de raison, feroient-ils des guerres si longues, si acharnées, & si onereuses, pour en revenir pourtant à des conditions de paix, qui ne leur paroissent intolérables que dans les momens où la passion les gouverne, ou dans lesquels la fortune leur rit?

Les Alliés ouvrirent la Campagne par la prise de Tournay & la Bataille de Malplaquet, où le Prince Royal se trouva en personne. Le Comte de Finck eut beaucoup de part à cette Victoire; il fut le premier qui força le retranchement François avec les Prussiens, il forma ses troupes sur le parapet, & de là il soutint la Cavalerie Impériale que les François repousserent par deux reprises, jusqu'à ce qu'un plus grand nombre de troupes se joignant aux siennes eussent pû mettre le dernier sceau à la Victoire.

1710. En Poméranie les Suédois firent mine de nouveau de vouloir marcher en Saxe; le Roi craignit que la Guerre ne se portât enfin dans ses propres Etats, & dans l'intention d'assoupir les troubles du Nord, il prit les mesures les plus justes pour les augmenter; il proposa l'entretien d'une Armée de neutralité, mais cette Armée ne s'assembla jamais. Crassaw consentit à une suspension d'armes. Charles XII. qui l'apprit, protesta du fond de la Bessarabie contre toute neutralité: ce Traitté ébauché fut rompu, & il eut le sort de tous ces Actes publics, que la nécessité & l'impuissance font faire dans un tems, & que la force secondée de conjonctures favorables rompt dans un autre.

La France renoüa les Négociations de la Paix à Gertrudenberg, & dés les premieres conferences elle s'engagea à reconnoitre la Royauté de Prusse & la Souveraineté de Neufchâtel. L'ouvrage de la Paix avorta encore, & les Prussiens furent employés dans cette Campagne

sous

ſous le Prince d'Anhalt au Siége d'Aire & de Doüai qu'ils prirent. Le Roi déclara alors qu'il ne rendroit pas la Ville de Gueldre, où il avoit garniſon, que les Eſpagnols ne lui payaſſent les ſubſides qu'ils lui devoient. Auſſi en conſerva-t-il la poſſeſſion par la Paix.

Dans ce tems mourut le Duc de Courlande, Neveu du Roy; les Moſcowites s'emparerent de nouveau de la Courlande, ils prirent auſſi Elbing, mais comme le Roy avoit des droits ſur cette Ville, un Bataillon Pruſſien y fut mis en garniſon.

Le paſſage & le voiſinage de tant d'armées avoit porté la Contagion en Pruſſe; la diſette qui commençoit à s'y faire ſentir vivement, augmenta la violence & le venin de la Peſte. Le Roi abandonna ces Peuples à leur infortune, & tandis que ſes revenus & ſes ſubſides ne ſuffiſoient pas même à la magnificence de ſa dépenſe, il vit périr de ſang froid plus de 200. mille Ames, qu'il auroit pû ſauver par quelques liberalités.

Le Prince Royal revolté de cette dureté, & qui ſavoit que les Comtes de Witgenſtein * & de Wartemberg en étoient la cauſe, fit joüer toutes ſortes de reſſorts pour les déplacer. La Cour a ſes orages, la faveur ſes périls. Witgenſtein fut envoyé à Spandow, & le Roy ſe ſépara en fondant en larmes du Grand Chambelan qu'il chériſſoit. Wartemberg ſe retira dans le Palatinat avec une Penſion de [illegible]o. mille Ecus.

* Directeur des Finances.

1711. Charles XII. avoit refuſé la neutralité, comme nous venons de le dire. Le Czar, les Rois de Pologne, & de Dannemarck ſe ſervirent de ce prétexte pour l'attaquer en Poméranie. Frèderic I. refuſa conſtamment d'entrer dans cette Ligue, il ne vouloit point expoſer ſes Etats aux incurſions, aux ravages, & aux hazards de la Guerre, & il eſperoit même de gagner, par ſa neutralité, aux Guerres de ſes voiſins.

Le commencement des opérations ne leur furent pas favorables. Les Danois leverent le Siége de Wismar, & Auguſte leva ceux de Stralſund & de Stettin.

Pendant que l'Europe étoit travaillée par ces convulſions, que l'eſperance & l'ambition ſouffloient la diſcorde dans les coeurs des

deux partis, mourut l'Empereur Joseph. L'Empire élut à sa place l'Archi-Duc Charles, qui étoit alors bloqué dans Barcelone, aprés avoir été couronné, & chassé de Madrit, pour la perte de la Bataille d'Almanza.

La mort de Joseph applanit le chemin à la Paix générale: les Anglois qui commencoient à se lasser de tant de dépenses, ouvroient les yeux sur l'objet de cette Guerre. 'A mésure que les nuages de leur enthousiasme vinrent à se dissiper, ils se convainquirent que la Maison d'Autriche seroit assés puissante, en conservant ses pays héréditaires, le Royaume de Naples, le Milanés & la Flandre, & ils se disposerent à tenir des conférences à Utrecht dans le dessein de faire la paix.

Le Roi qui désiroit de terminer les démélés de la Succession d'Orange par un Traité définitif, se rendit dans le pays de Cleves, pour régler cette affaire avec le Prince de Frise ; mais ce malheureux Prince se noya au passage du Mordik, en voulant se rendre à la Haye. En revanche Frèderic I. fit une autre acquisition par l'extinction des Comtes de Mansfeldt. Ce Pays fut mis en sequestre entre la Prusse & la Saxe ; la Régence Prussienne se tint à Mansfelt, & la Saxonne à Eisleben.

1712. Cependant tout s'achaminoit insensiblement à la Paix. Les Conférences continuoient à Utrecht ; les Comtes de Döhnhoff, de Meternich & de Biberstein, s'y rendirent en qualité de Plénipotentiaires du Roy.

Pendant qu'on tenoit ces Conférences, il arriva en Angleterre une Révolution, dont l'Europe accusa le Maréchal de Tallard, alors prisonnier à Londres; soit que ce Maréchal, ou que ce qu'on appelle le hazard, en fussent la cause, le parti de Milord Malborough fut culbuté ; ceux de la Nation qui désiroient la paix, l'emportérent. Le Duc d'Ormond eut le Commandement des troupes Angloises en Flandre, & il se sépara des Alliés au commencement de la Campagne. Le Prince Eugene, quoiqu'affoibli par la défection des Anglois, continua l'offensive. Le Prince d'Anhalt & les Prussiens furent chargés du Siége de Landreci, mais Villars marcha à Denain, fondit sur le Camp que

Milord

Milord Albemarle y commandoit, & le battit avant que le Prince Eugéne put le secourir. Cette Victoire remit au pouvoir des François Marchienne, le Quesnoi, Doüai, & Bouchain.

Les Alliés suivirent l'exemple des Anglois, & songerent sérieusement à la paix. L'Empereur étoit le seul qui voulut continuer la guerre, soit que la lenteur de son Conseil n'eut pas le tems de se décider, ou que ce Prince se crut assés fort pour résister seul à Louïs XIV. Sa condition n'en devint que plus mauvaise.

Le Roi fit alors surprendre la Garnison Hollandoise qui étoit à Moeurs, & maintint par là la possession les droits qu'il avoit sur cette place.

Mais les sentimens pacifiques du Sud n'influerent point sur le Nord. Le Roi de Dannemarck entra dans le Duché de Bréme, & prit Stade. Le Czar & le Roy de Pologne tenterent une descente dans l'Isle de Rügen, que les bonnes mesures des Suédois firent manquer. Les Alliés ne furent pas plus heureux au Siége de Stralsund qu'ils furent obligés de lever; car Steinbock venoit de remporter une Victoire sur les Saxons & sur les Danois, à Gadebusch dans le Mecklenbourg; & un renfort de 10. mille Suedois étant arrivé en Poméranie, tout ce Pays fut delivré d'ennemis. Les Danois obligés d'abandonner Rostock, remirent cette Ville aux Troupes du Roy, comme Directeur du Cercle du la Basse Saxe, mais les Suèdois en délogerent les Prussiens. La neutralité de Roy n'en souffrit aucune atteinte, & il continua de négocier, pour porter les esprits à quelque conciliation, & pour conjurer les orages qui s'assembloient à l'entour de ses Etats.

Au commencement de 1713. Frèderic I. mourut d'une maladie lènte, qui avoit depuis longtems miné ses jours: il ne vit point la consommation de la Paix, ni le rétablissement du repos dans son Voisinage. Il eut trois femmes; la premiére fut une Princesse de Hesse, dont il eut une fille, mariée au Prince héréditaire de Hesse, à présent Roy de Suède. Sophie Charlotte d'Hanovre mit au monde Frèderic Guillaume qui lui succèda; & il repudia la troisième, qui étoit une Princesse de Mecklenbourg, à cause de sa démence.

Nous

Nous venons de voir tous les évenemens qui se passerent pendant la vie de Frèderic I. Il ne reste qu'à jetter rapidement quelques regards sur le caractère de ce Prince. Son ésprit étoit fléxible à toutes sortes d'impressions, comme ces Miroirs qui reflêchissent avec vérité tous les objets qui s'y présentent. Emporté par caprice, doux par nonchalance; confondant les choses vaines avec la véritable Grandeur; aimant les fleurs, négligeant les fruits; plus attaché à l'éclat qui éblouït, qu'à l'utile qui n'est que solide; il sacrifia 30. mille hommes de ses sujets, pour parvenir à la Royauté, dans les differentes Guerres que fit l'Empereur, & il n'ambitionnoit cette Dignité, que pour assouvir sa hauteur, & justifier sous des prétextes apparens ses fastueuses dissipations.

Il étoit magnifique & génereux, mais au prix de quelles bassesses n'acheta-t-il pas le plaisir de contenter ses passions? Il trafiquoit du Sang de ses Peuples avec les Anglois, & les Hollandois, comme ces Tartares, qui vendent leurs Troupeaux aux Bouchers de la Podolie pour les égorger. Il étoit sur le point de retirer 15. mille hommes de Flandre: on lui remit un gros brillant de la succession du Prince d'Orange, & les Troupes resterent aux Alliès.

En remontant à l'origine des choses, pour discerner en quoi consiste la générosité d'un Souverain, nous trouvons qu'un Prince étant le prémier Serviteur de l'Etat, lui doit compte de l'usage qu'il fait des fonds publics, qu'il en doit destiner une certaine somme au soutien de sa Dignité, le reste à recompenser les services & le mérite, à rendre par ses largesses l'Etat opulent; entretenir l'égalité des conditions, ne pas fouler les Pauvres pour engraisser les Riches, secourir avec prodigalité les miseres publiques, soulager les malheureux en tout genre, de toute espece, de toute condition, mettre de la magnificence en tout ce qui interesse le corps de l'Etat en général, & diriger le but de ses dépenses au plus grand avantage de ses Peuples.

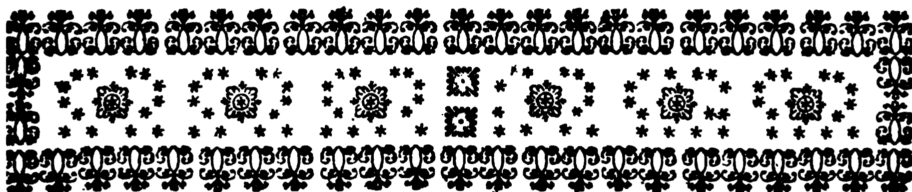
L'espece de dépense qu'aimoit Frèderic I. n'étoit pas de ce

nre, c'étoit plûtôt la dissipation d'un Prince prodigue & vain. Sa our étoit une des plus magnifiques de l'Europe. Ses Ambassades oient aussi brillantes que celles des Portugais. Ses Favoris receient de grandes pensions. Rien n'égaloit la magnificence de ses timens, ses Fêtes étoient superbes, son Ecurie remplie de cheix, ses Offices de Cuisiniers, & ses Caves de Vin. Il donna un ef de 40. mille Ecus à un Chasseur qui lui fit tirer un gros Cerf. Il fut le point d'engager ses Domaines de Halberstadt aux Hollandois, ur acheter le *Pit*, gros brillant qui fut vendu à Louïs XV. du tems la Régence. Ses Domestiques faisoient leur fortune, lorsqu'ils oient souffert des premieres saillies de son emportement. Mais ses penses n'avoient aucune proportion entr'elles; la bizarrerie de sa dénse ne paroit plus évidente, que, lorsqu'on examine la totalité de n Etat & de ses revenus. On y observe des parties d'un corps gintesque, à côté d'autres membres dessechés qui déperissent. Il ndoit 20. mille hommes pour en entretenir 30. mille. Sa Cour ét comme ces grandes Riviéres, qui absorbent l'eau de de tous les pes ruisseaux. Ses Favoris régorgoient de ses liberalités, tandis que Lithuanie & la Prusse périssoient par la famine & par la peste, sans e ce Prince généreux daignât la secourir. Un Prince avare est ur ses Peuples, comme un Médecin qui laisse étouffer un malade ns son sang; & le prodigue est comme celui qui le tüe à force de saigner.

Frèderic I. n'eut jamais de faveurs constantes, soit qu'il se rentit de son mauvais choix, soit qu'il n'eut aucune indulgence pour foiblesses humaines. Depuis le Baron de Danckelmann jusqu'au omte de Wittgenstein, ses Favoris eurent tous une fin malheureu-
La mauvaise Education qu'il reçut dans sa jeunesse, influa sur ute sa vie; son Esprit étoit foible & superstitieux. Il eut un attaement singulier pour le Calvinisme, auquel il auroit voulu ramener utes les autres Religions, & il est à croire qu'il auroit été Persécuir, si les Prêtres se fussent avisés de mêler de la magnificence &

des Cérémonies aux Persécutions. Il composa un livre de Priéres, que pour son honneur on n'imprima pas. S'il est digne de louanges, c'est pour avoir conservé ses Etats en Paix pendant tout son Régne, tandis que ceux de ses voisins étoient ravagés par des Guerres, pour avoir eu le coeur naturellement bienfaisant, & pour n'avoir jamais donné atteinte à la vertu conjugale. Il étoit en un mot grand dans les petites choses, & petit dans les grandes; & son malheur a voulu qu'il fut placé dans l'Histoire entre un Pére & un Fils, dont les talens supérieurs le font éclipser.





DES MOEURS, DES COUTUMES, DE L'INDUSTRIE, DES PROGRÈS DE L'ESPRIT HUMAIN DANS LES ARTS ET DANS LES SCIENCES.



Pour acquérir une Connoissance parfaite d'un Etat, il ne suffit pas d'en savoir l'Origine, les Guerres, les Traités, le Gouvernement, la Religion, les Revenus du Souverain. Ces parties sont à la verité les principales auxquelles s'attache le pinceau de l'Histoire. Il en est cependant encore d'autres, qui, sans avoir le brillant des premieres, n'en sont pas moins utiles ; je compte de ce nombre tout ce qui se rapporte aux moeurs des Habitans, comme l'origine des nouveaux usages, l'abolition des anciens, la naissance de l'industrie, les causes qui l'ont développée, les raisons de ce qui a hâté, ou rallenti les progrés de l'Esprit humain, & surtout ce qui caractérise le plus le génie de la Nation dont on parle. Ces objets interesseront toujours les Politiques & les Philosophes, & j'ose avancer avec hardiesse que cette sorte de détails n'est en aucune façon indigne de la majesté de l'Histoire.

Je ne présente au Lecteur dans cet Ouvrage qu'un choix des traits les plus frappans & les plus caractéristiques du Génie des Brandebourgeois en chaque Siécle: mais quelle différence entre ces Siécles ? Des Nations qu'un Ocean immense sépare, & qui habitent sous les

Ddd 2

les Tropiques les plus opposés, ne diffèrent pas plus entre leurs usages, que les Brandebourgeois d'eux-mêmes, si nous les comparons du tems de Tacite au tems de Henri l'Oiseleur; ceux de Henri l'Oiseleur à ceux de Jean le Ciceron, & enfin ceux-là aux habitans de l'Electorat sous Fréderic I. Roi de Prusse.

Le grand nombre des hommes distraits par la variété infinie des objets, regarde sans réfléxion la Lanterne magique de ce monde; il s'apperçoit aussi peu des changemens successifs qui se font dans les Usages, que l'on passe légérement dans une grande Ville sur ces ravages que la mort y fait journellement, pourvû qu'elle y épargne le petit Cercle de personnes avec lesquelles on est le plus lié. Cependant aprés une courte absence, on trouve à son retour d'autres habitans & des modes nouvelles.

Qu'il est instructif & beau de passer en revuë tous les Siécles qui ont eté avant nous, & de voir par quelle analyse ils tiennent à nos tems! Prendre une Nation dans la stupidité la plus grossiére, la suivre dans ses progrés, & la conduire jusqu'au tems qu'elle s'est civilisée, c'est étudier dans toutes ses Métamorphoses le Ver à soye, devenu Chrysalide, & enfin Papillon.

Mais que cette étude est humiliante! Il ne paroit que trop qu'une Loi immuable de la Nature oblige les hommes de passer par bien des impertinences pour arriver à quelque chose de raisonnable; remontez aux Origines des Nations, vous les trouverez également barbares. Les unes sont arrivées par une allure lente, & par bien des détours, à un certain dégré de perfection. Les autres y sont parvenuës par un essor rapide; toutes ont tenu des routes différentes; & encore la politesse, l'industrie & tous les arts, ont-ils pris un gout de terroir dans les différens païs où ils ont été transplantés, qu'ils ont reçus du Caractère indélebile de chaque Nation. Ceci se fera sentir davantage si vous lisez des Ouvrages écrits à Padouë, à Londres, ou à Paris; ils se distingueront sans peine, quand même les Auteurs y traiteroient la même matiére; je n'en excepte que la plus sublime Géometrie.

La variété inépuisable que la Nature jette dans ces caractères généraux & particuliers, est une marque de son abondance, mais en

même

ême tems de son Oeconomie: car quoique tant de Nations innombles qui couvrent la terre, ayent chacune leur génie différent, il nble cependant que certains grands traits qui les distinguent des aus, sont inaltérables, Tout peuple a un Caractère à soi, qui peut être odifié par le plus ou le moins d'Education qu'il reçoit, mais dont fonds ne s'efface jamais. Je pourrois facilement appuyer cette opion sur des preuves Physiques, mais je ne prétens pas m'écarter de on sujet. Il s'ensuit donc que les Princes n'ont jamais totalement angé la façon de penser des Peuples, qu'ils n'ont jamais pû forcer Nature à produire les grands hommes, dont le nombre seul illustre Siècles; quoique le travail des mines soit soumis à leurs ordres, les ines fécondes ne le sont pas, elles s'ouvrent tout à coup, en fourfant des richesses abondantes, & se perdent, dans le tems qu'on les ursuit avec le plus d'avidité.

Quiconque a lû Tacite & Cesar, reconnoitra encore les Allemnds, les François & les Anglois, aux couleurs dont ils les peient: dix-huit Siècles n'ont pû les effacer. Comment donc un Règne urroit-il effectuer ce que tant de Siècles n'ont pû faire? Un Staiire peut tailler un morceau de bois dans la forme qu'il lui plait; il fera un Esope, ou un Antinoüs, mais il ne changera jamais la Natuinhérente du bois. Certains vices dominans, & certaines vertus de oix, resteront toûjours à chaque Peuple. Si donc les Romains vous roissent plus vertueux sous les Antonins que sous les Tibères, c'est e les crimes étoient sévérement punis; le vice n'osoit lever sa e impure, mais les vicieux n'en subsistoient pas moins. Les Sourains donneront un certain vernis de politesse à leur Nation, ils intiendront les Loix dans leur vigueur, & les Sciences dans la méocrité, mais ils n'altereront jamais l'essence des choses; ils n'ajoutent ie quelque nuance passagére à la Couleur dominante du Tableau.

* C'est ce que nous avons vû de nos jours en Russie. Pierre I. couper la barbe à ses Moscovites, il leur ordonna de croire à la ocession du saint Esprit, il en fit habiller quelques uns à la François, on leur apprit même des Langues; cependant on distinguera encore

core longtems les Ruſſes des François, des Italiens, & des autres Nations de l'Europe.

Il n'y a, je crois, que la dévaſtation entière des Etats, & leur repeuplement par des Colonies étrangères qui puiſſent produire un changement total dans une Nation; mais qu'on y prenne bien garde, ce n'eſt, dés lors, plus la même Nation, & il reſteroit encore à ſçavoir ſi l'air & la nourriture ne rendroient pas avec le tems ces nouveaux habitans ſemblables aux anciens.

Je me ſuis cru obligé de ſéparer ce morceau qui traite des Moeurs des Brandebourgeois, du reſte de l'Hiſtoire, à cauſe que dans celle-là je me ſuis reſtraint à la Politique & à la Guerre, & que ces détails qui regardent les uſages, l'induſtrie & les arts, étant répandus dans tout un Ouvrage auroient peut être échapé au Lecteur, au lieu qu'il les trouve à préſent ſous un ſeul point de vûë, où ils forment ſeuls un petit corps d'Hiſtoire.

Les Auteurs Latins m'ont ſervi de guide dans les commencemens de cet Ouvrage, au défaut total de ceux du païs. Lockelius, que j'aurai lieu de citer ſouvent, m'a éclairé dans les Régences ténébreuſes des Margrawes des quatre premieres races, & les Archives m'ont] fourni des matériaux pour ce qu'il y a de plus remarquable à dire des tems que la Maiſon de Hohenzollern a poſſédé cet Electorat: ce qui nous ramene jusqu'à nos jours.

EPOQUE PREMIERE.

Dans la longue énumération que Tacite fait des Peuples d'Allemagne, il s'eſt trompé ſur le mot d'*Ingevoner*, qui ſignifie habitans, & ſur celui de *Germenier*, qui veut dire gens de guerre, que l'ignorance de la langue lui fait prendre pour des Nations particulieres. La quantité de ces guerriers dont l'Allemagne étoit remplie, lui donna le nom de Germanie.

Les premiers habitans de la Marche furent des Teutons, & aprés eux les Semnons, dont Tacite dit, que c'étoient les plus nobles d'entre les Suéves.

L'Alle-

L'Allemagne étoit tout à fait barbare dans ces tems reculés ; les peuples grossiers & à moitié sauvages habitoient les forêts, ou de mauvaises Cabanes leur servoient de demeure ; ils se marioient jeunes, & peuploient d'autant plus, que les femmes étoient rarement stériles. La Nation alloit toûjours en se multipliant, & comme les enfans se bornoient à cultiver les Champs de leurs Péres, au lieu de défricher des terres nouvelles, il s'ensuivoit que ces petits héritages ne fournissant pas, (dans les meilleures années même,) à l'entretien d'un Peuple aussi nombreux, les obligeoient à s'expatrier pour trouver ailleurs leur subsistance ; de là ces grands débordemens de Barbares, qui inonderent les Gaules, l'Afrique & l'Empire Romain même.

Les Germains étoient Chasseurs par nécessité, & Guerriers par instinct ; leur pauvreté rendoit les guerres intestines qu'ils se faisoient courtes, car l'interêt ne s'en méloit jamais. Leurs Généraux, qui depuis devinrent leurs Princes, s'appelloient *Fürsten*, ce qui est une dérivation du mot de Conducteur ; ils étoient renommés par leur taille haute, & pour avoir des corps robustes, & endurcis aux travaux les plus pénibles ; leurs vertus principales étoient la valeur, & la fidelité avec laquelle ils observoient leurs engagemens. ils célébroient ces vertus par des hymnes qu'ils apprenoient à leurs enfans, pour les transmettre à leur postérité.

Les Auteurs Latins rendent eux-mêmes un illustre témoignage à la valeur des Germains, en nous apprenant la défaite de Varus & de quelques autres Chefs des Armées Romaines. Si l'on applaudit au courage d'une Nation, qui, toutes choses égales, est victorieuse d'une autre, combien plus ne doit-on pas admirer la Bravoure de ces Germains, qui, n'ayant pour eux que la confiance en leur propre force, & une inflexible opiniatreté à ne point céder, triompherent de la Discipline Romaine, & de ces Legions qui avoient à peine achevé de subjuguer la moitié du Monde connu ?

Quoiqu'en ayent dit la plûpart des Historiens, il n'en est pas moins vrai que les Romains passérent l'Elbe malgré les Suéves, car on a découvert auprés de * Zossen, dans un Champ quarré de 800. pas

* à 6 Milles de Berlin.

pas quantité d'Urnes pleines de Médailles de l'Empereur Antoin, de l'Imperatrice Faustine, & de quelques Affiquets dont se paroient les Dames Romaines. Ce n'est pas assurément un Champ de Bataille car les Suéves n'auroient pas enfoui sous terre l'argent de leurs Ennemis, pour honorer leurs funérailles; on peut en conjecturer, ce me semble, avec certitude, que ce lieu servit de Camp à quelques Cohortes détachées, auxquelles les Romains avoient fait passer l'Elbe, pour être avertis des mouvemens & de l'approche des Barbares.

Brandebourg est la plus ancienne Ville de la Marche; les Annales * fixent sa fondation l'an du Monde 3588; ce qui feroit 416. ans avant l'Ere Vulgaire. On dit qu'elle fut bâtie, & reçut son nom du même Brennus qui saccagea Rome. On entrevoit dans l'obscurité les noms de quelques Rois † Vandales, qui furent apparemment plus ambitieux & plus inquiets que les autres. On trouve de plus dans les Annales, que Witikind Roi des Saxons, Hermanfried Roi de Thuringe, & Richimire Roi des Francs s'allierent, dompterent les Semnons, & entourerent les premiers de murailles ces Villes conquises, pour contenir le Païs dans l'obéïssance.

* Imprimées en 1595.

† Hoterus Wenceslas

Epoque Seconde.

Charlemagne prit enfin * Brandebourg, & Henri l'Oiseleur † ayant entiérement subjugué les Saxons qui habitoient ces Contrées, établit les Margrawes, ou Gouverneurs de Frontiéres.

* en 781.

† en 928.

Les Moeurs s'adoucirent sous les Margrawes, mais le païs étoit trés pauvre; il ne produisoit que les denrées les plus nécessaires à la vie, il avoit besoin de l'industrie de ses voisins, & comme personne ne recherchoit la sienne, l'argent ressortoit en plus grande quantité qu'il n'entroit. Cette disproportion dans la circulation des especes, qui alloit toûjours à leur diminution, baissoit le prix de toutes choses: les denrées étoient à un si vil prix, que du tems de l'Electeur Jean II. d'Ascanie, le boisseau de froment se vendoit à 28. liards, celui de seigle à 28. deniers, & 6. poules s'achetoient au marché pour 1. gros.

Les Berlinois passoient dés lors pour des maris aussi fideles que jaloux: les Chroniques * rapportent un exemple qui peint bien les moeurs

* Lockelius 1754.

moeurs de ces tems. Sous la Régence de l'Electeur Othon de Baviere, un Sécretaire de l'Evêque de Magdebourg voulant aller à Berlin aux bains publics, rencontra dans la rüe une jeune femme de Bourgeois, & lui proposa en badinant de se baigner avec lui: la femme se trouva offensée de cette proposition, le peuple s'attroupa, & les Bourgeois de Berlin qui n'entendoient pas raillerie, trainerent le pauvre Sécretaire dans une place publique, où ils le décapiterent sans autre forme de procès. S'ils sont jaloux, du moins exercent-ils à présent des vengeances plus douces.

Le Païs croupissoit dans une misere affreuse sous la Régence des Princes des 4. premieres Races, & il n'en pouvoit sortir, passant sans cesse d'une main à l'autre. * Othon de Baviere fut obligé de vendre l'Electorat à l'Empereur Charles IV. Celui-ci s'établit à Tangermünde, il y tint une Cour brillante, & y bâtit un assés vaste Château, dont on voit encore les ruïnes. Pendant que Jodoce administroit le Brandebourg, les Vaudois persécutés en France se réfugierent dans la ville d'Angermünde, à laquelle on donna le surnom d'Héretique. Je ne vois pas pourquoi les Vaudois chercherent un azile dans le Brandebourg, qui étoit également Catholique, & pourquoi ils y furent reçus, quoiqu'on les détestât.

* en 1373.

Les Princes de la Maison de Luxembourg foulerent les Peuples le plus impitoyablement, ils engageoient l'Electorat dans leurs besoins à ceux qui leur prêtoient les plus grosses sommes; & ces Créanciers qui regardoient ce malheureux Païs comme une Hypotheque, commettoient toutes sortes de véxations pour s'enrichir, & y vivoient à discretion, comme dans une Province ennemie. Les Voleurs infestoient les grands chemins, la Police étoit inconnüe, & la Justice hors d'activité. Les Seigneurs de Quitzau & de Neuendorff, indignés du joug odieux que portoit leur Patrie, firent une guerre ouverte aux Sous-Tyrans qui l'opprimoient. Dans cette confusion totale, & pendant cette espece d'anarchie, le peuple gémissoit dans la misére, les Nobles étoient, tantôt les Instrumens, tantôt les Vengeurs de la Tyrannie, & le génie de la Nation abruti par la dureté

 de

de l'esclavage, & par la rigueur d'un Gouvernement barbare & Gothique, demeuroit engourdi & paralytique.

Epoque Troisieme.

1414. L'Empereur Sigismond débrouïlla ce chaos, en conférant le Brandebourg & la Dignité Electorale à Frèderic de Hohenzollern, Burgrawe de Nüremberg. Ce Prince exigea l'hommage de ses nouveaux sujets, mais le Peuple qui ne connoissoit que des Maitres cruels, eut de la peine à se soumettre à cette Domination douce & légitime. Frèderic I. réduisit les Gentilshommes à l'obeïssance par la terreur que répandit le gros Canon avec lequel il enfonçoit les Châteaux des Rebelles. Ce Canon étoit une piéce de 24. livres, en quoi consistoit toute son Artillerie.

L'Esprit de sédition ne se perdit pas si vîte. Les Bourgeois de Berlin se révolterent à différentes reprises contre leurs Magistrats. Frèderic II. appaisa ces émeutes avec douceur & sagesse. La nécessité obligea ce Prince d'hypothéquer les Péages de Schiffelbein & de Drambourg au Sieur Denis d'Osten pour obtenir la somme de 1500. florins, dont il avoit besoin pour se rendre à la Diéte de Nürnberg.

Les choses resterent dans cette situation jusqu'a Jean Ciceron. Cet Electeur fit les premiers efforts pour tirer le Peuple de son imbécillité & de son ignorance ; c'étoit beaucoup pour ces temps de s'appercevoir qu'on étoit ignorant. Quoique cette premiere Aurore du bon esprit ne fut qu'un foible crépuscule, elle produisit toutefois la fondation de l'Université * de Francfort sur l'Oder. Conrad Wipina Professeur de Leipzig, devint le premier Recteur de cette nouvelle Université, & il en dressa les Statuts. Mille Etudians se firent inscrire dés la premiere année dans les Fastes de l'Université.

* en 1495.

Il arriva pour les progrés des Sciences que Joachim Nestor les protégea autant que son Pére : c'étoit le Leon X. du Brandebourg, il possedoit les Mathematiques, l'Astronomie & l'Histoire, il parloit avec facilité le François, l'Italien & le Latin ; il aimoit les Belles Lettres, & il fit des dépenses considérables pour encourager ceux qui s'y appliquoient.

Ce

Ce n'étoit pas l'ouvrage d'un jour que de civiliser une Nation qui avoit été sauvage pendant tant de siécles; il faut bien du tems pour que la douceur du commerce des Sciences se communique à tout un peuple; les jeunes Gens étudioient à la vérité, mais ceux qui étoient d'un âge mûr, demeuroient attachés à leurs anciens usages, & à leur grossiéreté. Les Nobles voloient encore sur les grands chemins. La dépravation des moeurs étoit si générale en Allemagne, que la Diéte de l'Empire assemblée à Tréves voulant y mettre un frein, défendit de blasphemer & de s'abandonner à ces excés de débauche, qui ravalent l'humanité, & rendent les hommes inferieurs aux animaux.

Il y avoit dés lors des vignes plantées dans l'Electorat; le Baril de vin se vendoit de ce tems à 30. gr. & le boisseau de Seigle à 21. Liards. Les especes commençoient à circuler davantage; Joachim Nestor fit même construire quelques Bâtiments, entr'autres le Château de Potzdam. Tout le monde étoit habillé à l'Allemande, ce qui répond à peu prés à l'ancien habillement Espagnol, hormis que les hommes portoient de larges fraises. Les Princes, * les Comtes & les Chevaliers portoient des chaines d'or au cou; il n'étoit permis aux Gentilshommes que d'avoir trois anneaux d'or à la Cravate. L'habilement des femmes ressembloit à celui des Augsbourgeoises, ou des filles de Strasbourg.

* Lockelius.

On commença alors à connoitre un certain luxe proportionné à ces tems, mais comme on ne trouve point que l'Industrie, ni le Commerce du Brandebourg, s'étendissent en même tems, l'augmentation des richesses, & leur cause, demeurent un problême difficile à résoudre.

Dés l'année 1560. on s'apperçoit d'une grande difference dans les dépenses des Electeurs, car lorsque Joachim II. se rendit à la Diéte † de Francfort, il eut * 68. Gentilshommes à sa suite, & 452. Chevaux dans ses Equipages. Le grand jeu s'introduisit en même tems; cette mode passa de la Cour à la Ville, où on fut obligé de la défendre, à cause que quelques Bourgeois avoient perdu plus de mille Ecus dans une séance.

† 1562. convoquée par l'Empereur Ferdinand pour l'Election d'un Roi des Romains.

* Lockelius

Nous trouvons dans les Annales qu'au Mariage de Joachim II. avec Sophie fille de Sigismond Roi de Pologne, l'Electeur coucha la nuit des nôces armé de toutes pieces auprés de sa jeune Epouse, comme si les tendres combats de l'Amour demandoient des préparatifs aussi redoutables? Un mêlange de férocité & de magnificence entroit dans toutes les Coutumes de ces tems. Ces singularités venoient de ce que le Siécle vouloit sortir de la Barbarie; il cherchoit le bon chemin & le manquoit. Sa grossiereté confondoit les cérémonies avec la politesse, la magnificence avec la dignité, les débauches avec le plaisir, la pédanterie avec le savoir, & les platitudes grossieres des bouffons avec les ingénieuses saillies de l'esprit.

On doit rapporter à ces tems la fondation de l'Université de Königsberg par Albert de Prusse.

Les dépenses allerent encore en augmentant. Jean George fit des obseques superbes à son Pére: c'est la prémiere pompe funébre accompagnée de magnificence, dont l'Histoire de Brandebourg fait mention. Le goût des Fêtes étoit la passion de ce Prince, il aimoit à donner sa Grandeur en spectacle. Il célébra * la naissance de l'ainé de ses Princes par des fêtes qui durérent quatre jours. Ces divertissements consistoient dans des Tournois, des Combats de Barques, des Feux d'artifice, & des Courses de bague. Les Seigneurs qui composoient les quatre Quadrilles, étoient vêtus en velours richement brodé en or & en Argent; mais le caractére du Siécle perçoit à travers toute cette magnificence. A la tête de chaque Quadrille étoit un bouffon qui sonnoit du Cor d'une façon ridicule, & qui faisoit cent extravagances, & la Cour monta au dongeon du Chateau pour voir tirer le feu d'artifice. † Au passage de Christian Roi de Dannemarck par Berlin, l'Electeur lui fit une réception superbe, il alla au devant du Roi, accompagné de nombre de Princes, de Comtes, de Seigneurs & d'une Garde de 300. Chevaux. Le Roi fit son entrée dans un char de velours noir galonné en Or, tiré par 8. Chevaux blancs, dont les Mors & les Caparaçons étoient d'argent. On l'accabla de fêtes dans le goût des précedentes.

* Eockelius.

† L'Electeur disent les Annales, mit la tête hors d'une Lucarne & cria à l'Artificier: *Maitre Jean boute quand je siffle-rai.*

Peut

Peut-être que le Luxe fut poussé trop loin, car Joachim Frè-
ric fit des Loix somptuaires: il employa ses revenus à des usages
iles, il fonda le College de Joachim, depuis transferé à Berlin par
lecteur Frèderic Guillaume, où cette Ecole est de nos jours la plus
rissante & la mieux réglée de tous les Etats de la Prusse.

Il manquoit encore du tems de Jean George beaucoup d'In-
ntions qui contribuënt à la commodité de la vie. L'usage commun
s Carosses ne remonte pas plus haut qu'à Jean Sigismond; il en est
rlé à l'occasion de l'hommage de la Prusse, que ce Prince rendit à
arsovie. Il eut à sa suite 36. Carosses à 6. Chevaux, outre un Cor-
ge de 80. Chevaux de main. L'Ambassade qui se rendit à la Diète de
mpire pour l'Election de l'Empereur Matthias, eut 3. Carosses avec
le. C'étoient de mauvais Coches, composés de quatre ais grossiére-
ent joints ensemble. Qui eut dit alors que cet art se perfectionne-
oit dans le XVIII. Siécle au point qu'on feroit des Carosses pour
000. Ecus, & qu'ils trouveroient des acheteurs?

Les efforts que le Brandebourg & l'Allemagne faisoient pour se
vilifer n'étoient pas tout à fait inutiles; le nombre des Universités
gmentoit: celle de Halle fut fondée alors. En même tems se for-
a à Dessaw une Academie pour la langue Allemande, sous le nom
e *Société fructifiante*, qui auroit pû devenir utile: d'autant plus que
langue Allemande, divisée en une infinité de Dialectes, manque de
gles suffisantes pour en fixer le véritable usage; que nous n'avons
cuns Livres Classiques, & que s'il nous reste encore quelque
ose de nôtre ancienne liberté Républicaine, c'est le stérile avan-
ge d'estropier selon notre fantaisie une Langue grossiere & presque
core barbare.

Ces beaux Etablissemens qui nous auroient peut-être avancés
un Siécle, étoient encore à peine ébauchés, lorsque la Guerre de 30. ans
rvint, qui détruisit & bouleversa toute l'Allemagne.

Les Etats de Brandebourg avoient eû jusqu'à George Guil- George Guil-
ume une entiére influence dans le Gouvernement; on les consultoit laume en
r toutes les affaires, & l'on suivoit leurs avis. Lorsque la Guerre 1621.

s'approcha de l'Electorat, on songea à sa défense. Jusqu'alors les Princes n'entretenoient qu'une garde, & quand on vouloit assembler des Troupes, on convoquoit les Nobles qui étoient obligés de comparoitre, & qui avec leurs suzerains formoient la Cavalerie; leurs Vassaux composoient l'Infanterie. L'Electeur * & sur tout son Ministre, le Comte Schwartzenberg, étoient portés à l'entretien d'une milice réguliere. Les Etats consentirent à la levée de gens de guerre, & aprés qu'on en eut fait le choix, on leur ordonna de faire des quêtes dans le païs pour subvenir à leur subsistance, jusqu'au tems qu'on auroit besoin de leurs services. Un Edit fut publié en même tems, qui ordonnoit aux païsans de donner un liard par tête à ces miliciens, quand ils viendroient gueuser, & des coups de bâton, s'ils ne s'en contentoient pas. Au lieu d'avoir des Soldats disciplinés, cet Electeur institua des Mendians privilégiés.

* Sebaldus, Chronique.

Le Comte de Schwartzenberg diminua depuis le pouvoir de ces Etats, dont cependant ils n'avoient jamais abusé. Enfin dans le cours de cette cruelle guerre, l'année 1636. fut la plus malheureuse pour cet Electorat: les Suédois étoient à Werben, les Imperiaux à Magdebourg & Rathenau, Wrangel à Stettin, Morosini dans la Nouvelle Marche, quand 36. mille Autrichiens traverserent le Païs, pillerent & désolerent tout dans leur passage. C'en fut trop à la fois: le Brandebourg énervé par le nombre des Troupes qui en avoit subsisté, & qui l'avoit pillé les années précedentes, succomba enfin: la cherté y devint exorbitante, un boeuf s'achetoit 100. Ecus, le boisseau de bled 5. l'Orge 3. & les espéces hausserent de prix par leur rareté, la valeur numeraire du Ducat fut évaluée à 10. Ecus. Quelques Gentilshommes qui avoient soustrait leurs provision à l'avidité des Ennemis, voulurent profiter des circonstances de la disette; mais les païsans qui n'avoient pas dequoi acheter ces grains, réduits au désespoir par la famine, assommerent ces Maitres inhumains, & pillerent leurs greniers. La famine continua avec la même violence ; la Peste s'ensuivit, & la désolation parvint à son comble. Les restes de ces malheureux habitans, que la mort & les ennemis avoient épargné ne pouvant

uvant tenir contre tant de calamités, abandonnerent leur Patrie in-
tunée, & se réfugierent dans les païs voisins.

Toute la Marche n'étoit qu'un affreux desert; elle offroit le
ctacle deplorable, de ruïnes, d'incendies, & de tous les fléaux
une guerre longue & furieuse entraine aprés elle. A peine décou-
it-on sous tant d'horreurs & de saccagement, dans des lieux deve-
tout sauvages, les traces des anciens Habitans.

C'en eut été fait du Brandebourg, si Frèderic Guillaume ne se obstiné à son retablissement. Sa prudence, sa fermeté & le tems iquirent tous ces obstacles; il fit la paix, & mit d'abord la main à te nouvelle Création. Frèderic Guillaume 1640.

Le Brandebourg devint effectivement un nouveau Païs, formé mêlange de diffèrentes Colonies de toutes sortes de Nations, qui lierent dens la suite à ceux des anciens habitans, qui étoient echap- à sa destruction. Soit que l'année fut abondante, soit défaut de isommation, les denrées furent à un si bas prix, que le boisseau de l se vendoit à 12. gros.

La Guerre de 30. ans, entre les maux qu'elle causa, détruisit en- utres le peu de Commerce que le Nord de l'Allemagne faisoit. us tirions anciennement nos sels de Hollande & de France: les pro- ons qui ne pouvoient être renouvellées pendant ces troubles, uiserent. Ce manquement d'une denrée aussi nécessaire fit avoir ours à l'industrie, & l'on trouva des sources salées à Halle, qui four- nt non seulement aux besoins du Brandebourg, mais encore à x des Païs voisins.

La premiere Colonie qui vint s'etablir dans l'Electorat, fut iposée de Hollandois: ils renouvellerent l'espece des Professionnai- & des Artisans, ils formerent des projets pour la vente des Bois aute futaye, qui se trouvoient en grande abondance; la ruïne de la erre de 30. ans ayant fait de tout le païs une vaste forêt. Sur la te de ces bois roula ensuite une des branches principales de nôtre nmerce; l'Electeur permit même à quelques familles Juives de se nicilier dans ses Etats, le voisinage de la Pologne rendoit leur mi-

nistere

niftére utile pour débiter dans ce Royaume les rebuts de nos friperies.

Il arriva depuis un événement favorable qui avança considérablement les projets du grand Electeur. Louïs XIV. revoqua l'Edit* de Nantes, & 300. mille François sortirent pour le moins de ce Royaume: les plus riches passerent en Angleterre & en Hollande, les plus pauvres, mais les plus industrieux, se réfugierent dans le Brandebourg au nombre de 20. mille, ou environ: ils aiderent à repeupler nos Villes désertes, & nous donnerent toutes les Manufactures qui nous manquoient.

* en 1684.

Afin de juger des avantages qui revinrent à l'Etat par cette Colonie, il est nécessaire d'entrer dans le détail de ce qu'étoient nos Manufactures avant la Guerre de 30. ans, & de ce qu'elles devinrent aprés la Révocation de l'Edit de Nantes.

Nôtre Commerce rouloit anciennement sur la vente de nos grains, du vin & de nos laines; quelques Manufactures de drap subsistoient encore, mais elles n'etoient pas considérables. Il n'y avoit du tems de Jean Ciceron que 700. Manufacturiers dans tout le païs. Durant la Régence de Joachim II. le Duc d'Albe opprimoit tyranniquement la liberté des Flamans. La sage Elizabeth Reine d'Angleterre se prévalut de la sottise de ses voisins, en attirant dans ses Etats les Manufacturiers de Gand & de Bruges; ils y travaillerent les laines d'Angleterre, & obtinrent qu'on en défendit la sortie.

Nos Manufacturiers n'avoient fait jusqu'alors de bons draps, que par le mélange des laines Angloises avec les nôtres; & comme celles-là vinrent à manquer, nos draps tomberent. Les Electeurs de Saxe, Auguste & Christian, suivirent l'exemple de la Reine Elizabeth, en attirant dans leurs païs des Ouvriers Flamans, qui rendirent leurs Manufactures florissantes; le manque de laines étrangeres, la décadence de nos Manufactures, & l'accroissement de celles de nos voisins, accoutuma la Noblesse de Brandebourg de vendre ses laines aux Etrangers; ce qui détruisit presque entierement nos Fabriques. Jean Sigismond, pour les relever, défendit l'entrée des draps étrangers dans ses Etats;

ats; mais cette défenſe devint puérile, à cauſe que les fabriques Brandebourg ne pouvoient pas fournir les draps dont le païs avoit ſoin, ce qui obligeoit d'avoir recours à l'induſtrie des voiſins. Il y rande apparence qu'on auroit eu recours à des expédiens plus heu-ıx, mais la Guerre de 30. ans ſurvint, & elle renverſa les projets, Manufactures & l'Etat.

'A l'avénement de Frèderic Guillaume à la Régence, on ne fai-t dans ce païs, ni chapeaux, ni bas, ni ſerges, ni aucunes étoffes de ie. L'induſtrie des François nous enrichit de toutes ces Manufa-res: ils établirent des fabriques de draps, de Serges, d'Etamines, petites étoffes, de Droguets, de Griſettes, de Crepon, de Bon-:s, & de bas tiſſus ſur des métiers, de Chapeaux de Caſtor, de La-, & de poils de Liévre, des teintures de toutes les eſpeces. Quel-:s uns de ces Réfugiés ſe firent Marchands, & débiterent en detail duſtrie des autres. Berlin eut des Orfèvres, des Bijoutiers, des rlogers, des Sculpteurs; & les François qui s'établirent dans le plat s, y cultiverent le Tabac, & firent venir des fruits & des légumes ex-lens dans les Contrées ſablonneuſes, qui, par leur ſoin, devin-t des potagers admirables. Le grand Electeur, pour encourager : Colonie auſſi utile, lui aſſigna une penſion annuelle de 40. mille s dont elle jouït encore.

Ainſi l'Electorat ſe trouva plus floriſſant vers la fin de la Régen-le Fréderic Guillaume, qu'il ne l'avoit été ſous aucun de ſes An-res, & la grande augmentation des Manufactures étendit les bran-s du Commerce, qui roula dans la ſuite ſur nos Blés, ſur les bois, les Etoffes & les draps, & ſur nos ſels. L'uſage des Poſtes, inconnu qu'àlors en Allemagne, fut introduit par le grand Electeur dans tous Etats depuis Emmerick jusqu'à Memel. Les Villes payoient des :s arbitraires, qui furent abolies; l'etabliſſement de l'acciſe les rem-:a. Les Villes commencerent à ſe policer, on pava les ruës, & on a de diſtance en diſtance des lanternes pour les éclairer. Cette ce étoit d'une néceſſité indiſpenſable. Car les Courtiſans étoient ges d'aller en échaſſes au Chateau de Potzdam, lorsque la Cour

 s'y

s'y tenoit, à cause des bouës qu'il falloit traverser dans les ruës.

Frèderic Guillaume fut le premier Electeur qui entretint à son service un Corps d'Armée discipliné régulierement. Les Bataillons d'Infanterie étoient composés de 4. Compagnies à 150. têtes chacune, un tiers du Bataillon étoit armé de piques, le reste avoit des mousquets. L'Infanterie portoit des habits d'ordonnance & des manteaux. Les Cavaliers se pourvoyoient eux-mêmes d'armes & de Chevaux. Ils avoient la demi-armure, ils combattoient par Escadrons, & ils menoient souvent du Canon avec eux.

Le grand Electeur, quoique généreux & magnifique pour sa personne, fit des Loix somptuaires: sa Cour étoit nombreuse, & sa dépense se faisoit avec dignité. Aux Fêtes qu'il donna au mariage de sa Niéce la Princesse de Courlande, 56. Tables de 40. Couverts furent servies à chaque repas. L'activité infatigable de ce grand Prince donna à sa Patrie tous les Arts utiles; il n'eut pas le tems d'y ajouter les agrèables.

Les Guerres continuelles, & le mêlange des nouveaux habitans, avoient déjà fait changer les anciennes moeurs; beaucoup d'usages des Hollandois & des François devinrent les nôtres, les vices dominans étoient l'yvrognerie & l'interêt. La débauche avec les femmes étoit interdite à la Jeunesse, & certains souvenirs cuisans qu'on gagne en mourant de plaisir, étoient inconnus alors. La Cour aimoit les pointes, les équivoques & les bouffons; les enfans des Nobles se remettoient aux Etudes, & l'Education de la jeunesse tomba insensiblement entre les mains des François. Nous leur devons encore une douceur dans le commerce, & des maniéres plus aisées, que n'en ont ordinairement les Allemans.

Le changement qui arriva dans cet Etat aprés la Guerre de 30. ans, étoit universel: les Monnoyes s'en ressentirent ainsi que le reste; autrefois le Marc d'argent étoit sur le pied de 9. Ecus dans tout l'Empire jusqu'à l'année 1561. que les malheurs des tems forcerent le Grand Electeur d'avoir recours à toutes sortes d'expédiens pour fournir aux
* 1651. dépenses de l'Etat. Il fit publier la même année * un Edit qui fixoit le prix

prix des monnoyes courantes, & il fit battre des gros & des fenins, pour des sommes considerables, dont la valeur intrinseque répondoit à peu prés au tiers de la valeur réelle de ces espéces. Le prix de cette monnoye étant idéal, elle fut aussi-tôt décriée, & tomba à la moitié de sa valeur. Les vieux Ecus de bon alloi monterent à 28. à 30. gros; & de là vient ce que nous appellons l'Ecu de banque. Pour remedier à ces abus, les Electeurs de Brandebourg & de Saxe * s'aboucherent à Cinna, & ils convinrent d'evaluër les Monnoyes sur un nouveau pied, moyennant lequel le Marc fin d'argent, avec ce qu'on appelle le Stile de monnoye, ou le reméde, devoit être rendu au Public généralement dans toutes les espéces de monnoyes de l'Ecu jusqu'au fenin à 10. Ecus 16. gros. Depuis ce tems on frappa les florins & les demi florins, & le prix du marc d'Argent demeura fixé à 10. Ecus.

* En 1667.

Depuis en 1690. Frèderic I. se concerta avec l'Electeur de Saxe & le Duc de Hanovre sur les moyens de soutenir la monnoye sur le pied de la Convention de Cinna, mais en ayant reconnu l'impossibilité, ils convinrent que l'espece courante des florins & des 8. gros seroit frappée dans leurs Etats à raison de 12. Ecus: c'est ce qu'on appelle le pied de Leipzig, qui subsiste encore de nos jours.

Toutes les nouvelles Colonies que le grand Electeur avoit établies, ne furent véritablement florissantes que sous Frèderic I. Nous eûmes alors une Manufacture de haute-lisse égale à celle de Bruxelles, nos Galons égalerent ceux de France, nos Miroirs de Neustadt surpasserent par leur blancheur ceux de Venise, l'Armée fut habillée de nos propres draps. L'année 1700. les Troupes changerent d'armes, on abolit l'usage des piques, & l'Infanterie eut des fusils; la Cavalerie ne conserva de son armure que la Cuirasse, & on lui donna des habits d'ordonnance.

La Cour étoit nombreuse & brillante, les especes y devenoient abondantes par les subsides étrangers, le Luxe parut dans les Livrées, les habits, les tables, les èquipages & les bâtimens. Le Roi eut à son service deux des plus habiles Architectes de l'Europe, & Schlüter qui ne leur cèdoit point en mérite, & dont la Sculpture relévoit l'Architecture des premiers. Bott fit la belle Porte de Wesel, il donna les

desseins du Chateau & de l'Arsenal de Berlin, il bâtit la maison de Poste au coin du grand Pont, & le beau Portique du Chateau de Potzdam, trop peu connu des amateurs. Losander éleva la nouvelle âile du Château de Königsberg, & la Cour des monnoyes qui fut abbatuë dans la suite. Schlüter décora l'Arsenal de ces trophées, & de ces beaux Mascarons, qui font l'admiration des Connoisseurs, & il fit fondre la Statuë equestre du Grand Electeur, qui passe pour un Chef d'Oeuvre. Le Roi embellit la Ville de Berlin de l'Eglise du Cloitre, de ses Arcades, & de quelques autres Edifices encore; & il orna les Maisons de plaisance d'Orangebourg, de Potzdam & de Charlottenbourg, par toutes sortes d'augmentations & d'embellissemens.

Les beaux Arts, enfans de l'abondance, commencerent à fleurir. L'Academie des Peintres dont Pesne, Mayer, Widemann & Leigebeber étoient les premiers Professeurs, fut fondée; mais il ne sortit de leur Ecole aucun Peintre de réputation. Ce qu'il y eut de plus remarquable, & ce qui interesse le plus les progrés de l'esprit humain, ce fut la fondation de l'Academie Royale des Sciences en 1700. La Reine Sophie Charlotte y contribua le plus. Cette Princesse avoit le génie d'un grand homme, & les connoissances d'un savant; elle croyoit qu'il n'étoit pas indigne d'une Reine, d'estimer un Philosophe; Vous sentez bien que ce Philosophe dont je vous parle, c'étoit Leibnitz: & comme ceux qui ont reçu du Ciel des ames privilegiées, s'élevent à l'égal des Souverains, elle admit Leibnitz dans sa familiarité; elle fit plus, elle le proposa comme seul capable de jetter les fondemens de cette nouvelle Academie. Leibnitz qui avoit plus d'une ame, si j'ose m'exprimer ainsi, étoit bien digne de présider dans une Academie, qu'au besoin il auroit répresenté tout seul. Il institua 4 Classes, dont l'une de Physique & de Medecine, l'autre de Mathematiques, la troisieme de la Langue & des Antiquités d'Allemagne, & la derniere des Langues & des Antiquités Orientales. Les plus célébres de nos Academiciens furent Messieurs Basnage, Bernoulli, la Croze, Guillelmini, Hartzöker, Herman, Kirch, Römer, Stürmer, Varignon, des Vignoles, Werenfels & Wolff. Depuis on y reçut Messieurs de Beausobre

&

k Lenfant, Savans dont les plumes auroient fait honneur aux Siécles l'Auguste & de Louïs XIV.

Otton de Guericke fleurissoit encore à Magdebourg : c'est le même uquel nous devons l'invention de la pompe Pneumatique, & qui par ıne heureuse destinée a rendu son esprit philosophique & inventif ıéreditaire à ses descendans.

Les Universités prosperoient en même tems : Halle & Francfort toient fournies de savans Professeurs. Thomasius, Gundling, Luewig, Wolff & Strick, tenoient le premier rang pour la célebrité, & uisoient nombre de Disciples. Wolff commenta l'ingénieux Systeme e Leibnitz sur les Monades, & noya dans un déluge de paroles, 'argumens, de Corollaires & de Citations, quelques Problemes que ,eibnitz avoit jetté, peut-être comme une amorce aux Métaphysiciens. .e Professeur de Halle écrivit laborieusement nombre de volumes, ui, au lieu de pouvoir instruire des hommes faits, servirent tout au lus de Catechisme de Dialectique pour des enfans. Les Monades ont ıis aux prises les Metaphysiciens & les Géometres d'Allemagne, & s se disputent encore sur la divisibilité de la matiére.

Le Roy fonda même à Berlin une Academie, pour des jeunes ens de Condition, sur le modele de celle de Luneville : malheureument elle ne subsista pas longtems.

Ce Siécle ne produisit aucun bon Historien. On chargea Teiser d'écrire l'Histoire de Brandebourg ; il en fit le Panegyrique. Pufndorff écrivit la vie de Frèderic Guillaume, & pour ne rien omete, il n'oublia ni ses Clercs de Chancellerie, ni ses Valets de Chambre. os Auteurs ont, ce me semble, toûjours peché, faute de discerner les ıoses essentielles des accessoires, d'éclaircir les faits en les débrouïlnt, & de racourcir & resserrer leur prose trainante, & excessiveent sujette aux inversions & aux nombreuses épithetes.

Dans cette disette de tout bon Ouvrage en prose, le Brandeıurg eut un bon Poëte. C'étoit le Sieur de Canitz ; il traduisit heuusement quelques Epitres de Boileau, il fit des vers à l'imitation Horace, & quelques Ouvrages où il est tout à fait Original. C'est le ɔpe de l'Allemagne, le Poëte le plus élégant, le plus correct & le

 moins

moins diffus, qui ait fait des vers en nôtre langue. Communément en Allemagne le Pédantisme affecte jusqu'aux Poëtes; la langue des Dieux est prostituée par la bouche de quelque Régent d'un College obscur, ou par quelque Etudiant dissolu; & ce qu'on appelle honnêtes gens sont, ou trop paresseux, ou trop fiers pour manier la Lyre d'Horace, ou la Trompette de Virgile. Mr. *de Canitz*, quoique d'une maison illustre, crut que l'esprit & le talent de la Poësie ne dérogeoit pas: il le cultiva, comme nous l'avons dit, avec succés; il eut une Charge à la Cour, & puisa dans l'usage de la bonne Compagnie cette politesse & cette amenité qui plait dans son stile.

Les Spectacles Allemans étoient peu de chose. Ce qu'on appelle Tragédie, est communément un Monstre, composé d'enflure & de basse plaisanterie; les Auteurs Dramatiques ignorent jusqu'aux moindres régles du Théatre; la Comedie est plus pitoyable encore. C'est une farce grossiere qui choque le goût, les bonnes moeurs & les honnêtes gens. La Reine entretenoit un Opera Italien, dont le fameux Bononchini étoit le Compositeur; nous eumes dés lors de bons Musiciens. A la Cour il y avoit une Comedie Françoise qui donnoit dans ses répresentations les chefs d'oeuvre des Molieres, des Corneilles & des Racines.

Le goût du Théatre François passa en Allemagne avec celui des modes de cette Nation. L'Europe enthousiasmée du caractére de grandeur que Louïs XIV. imprimoit à toutes ses actions, de la politesse qui régnoit à sa Cour, & des grands hommes qui illustroient son Régne, vouloit imiter la France qu'elle admiroit. Toute l'Allemagne y voyageoit; un jeune homme passoit pour un imbecille, s'il n'avoit séjourné quelque tems à la Cour de Versailles. Le gout des François régla nos Cuisines, nos Meubles, nos habillemens, & toutes ces bagatelles, sur lesquelles la tyrannie de la mode exerce son empire: cette passion portée à l'excés dégenera en fureur, les femmes qui outrent souvent les choses, la poussérent jusqu'à l'extravagance. (*a*)

La

(*a*) La Mere du Poëte Canitz ayant épuisé la France en modes nouvelles, pour rencherir sur les autres Dames de Berlin, commit à un Marchand de faire venir de

La Cour ne donnoit pas tant dans les modes étrangeres que la Vil- la magnificence & l'étiquette y décoroient l'ennui. On s'eny- it même en Cérémonies. Le Roi institua l'Ordre de l'Aigle noir, pour avoir un Ordre, comme en ont tous les Rois, que pour se curer à cette occasion une Fête, qui ressemble assés à une Masca- :. Ce Roi qui avoit fondé une Academie par complaisance pour Epouse, entretenoit des Bouffons pour satisfaire à sa propre in- ation. La Cour de la Reine Sophie Charlotte étoit toute separée 'autre. C'étoit un Temple où se conservoit le feu sacré des Ve- :s, l'Azile des Savans, & le Siége de la politesse. On regretta d'au- plus les vertus de cette Princesse qui celle * qui remplit le Trône ès elle, se livra aux devots, & passa sa vie avec des hypocrites, race lisante, qui verse ses poisons sur la vertu, en sanctifiant ses propres :s. Enfin des adeptes parurent à la Cour; un Italien, nommé Ca- :o, assura le Roi qu'il avoit le secret de faire de l'or, il en dépensa ucoup, & n'en fit point. Le Roi se vengea de sa crédulité sur ce heureux, & Cataneo fut pendu.

* Princesse de Mecklenbourg, qui tomba ensuite en démence.

L'Etat changea presque entierement de forme sous Fréderic 1713. aume: la Cour fut congediée, & les grosses pensions souffrirent réduction; beaucoup de personnes qui avoient entretenu Ca- è, marcherent à pied: ce qui fit dire au Public que le Roi avoit lu l'usage des jambes aux perclus. Sous Frèderic I. Berlin étoit henes du Nord: sous Frèderic Guillaume elle en devint la Sparte. it le Gouvernement fut militaire; l'augmentation de l'Armée se fit,

de Paris un Mari jeune, beau, vigoureux, poli, spirituel & noble, supposant que cette Marchandise s'y trouvoit aussi communément que des pompons dans une Boutique. Le Marchand, tout nouveau dans cette espece de mêtier, s'acquitta de sa commission comme il pût. Ses Correspondans trouverent enfin un Epouseur. C'étoit un homme de 50. ans, il se nommoit le Sieur de Brinboc, d'un tempérament foible & valétudinaire; il arrive, Madame de Canitz le voit, s'effraye & l'épouse. Ce fut un bonheur pour les Prussiens que ce mariage tourna au mécontentement de la Dame, autrement son exemple auroit été suivi; nos Beautés auroient passés dans les mains des François, & les Berlinois auroient été réduits comme les Romains à enlever les Sabines de leur voisinage.

fit, & dans l'ardeur de ces premiers enrollemens, quelques Artisans furent faits Soldats, ce qui répandit la terreur parmi les autres qui se sauverent en partie: cet accident imprêvu causa de nouveau un dommage considerable à nos Manufactures.

Le Roi porta un prompt remede à ces abus, & il s'attacha avec une attention singuliere au rétablissement & aux progrés de l'industrie: il défendit par un arrêt sévere la sortie de nos Laines, il établit le Lagerhaus, * magasin d'où l'on avance des laines aux pauvres Manufacturiers, qu'ils restituënt par leur ouvrage. Nos draps trouverent un débit assuré dans la consommation de l'Armée, qui fut habillée de neuf tous les ans. Ce débit s'étendit jusques chez l'Etranger: la Compagnie de Russie fut formée l'année 1725. nos Marchands fournissoient les draps pour toutes les Troupes Russes; mais les Guinées Angloises passerent en Moscovie, & elles furent bientôt suivies de leurs draps, de sorte que nôtre Commerce cessa, nos Manufactures en souffrirent au commencement, mais d'autres sorties s'ouvrirent. Les Ouvriers n'eurent plus assés de nos propres laines, on permit aux Mecklenbourgeois de nous vendre les leurs, & dés l'année 1733. nos manufactures étoient si florissantes qu'elles debiterent 44. mille piéces de drap de 24. aunes chacune chez l'Etranger.

* en 1714.

Berlin fut comme un Magazin de Mars: tous les Ouvriers qui peuvent être employés pour une Armée, y prospérerent, & leurs Ouvrages furent recherchés par toute l'Allemagne. On établit à Berlin des Moulins de poudre à Canon, à Spandow des Fourbisseurs, à Potzdam des Armuriers, & à Neustadt des Ouvriers, qui travailloient en ferronerie & en cuivre.

Le Roi donna des immunités & des récompenses à tous ceux qui bâtiroient dans les Villes de tous ses Etats; il ajouta tout le Quartier de la Frèderic-Stadt à sa Capitale, & couvrit de maisons les places qu'avoit occupé l'ancien rempart. Il créa la ville de Potzdam, * & il la peupla; il ne fit pas le moindre Bâtiment pour lui même, mais tout pour ses sujets. L'Architecture de son Régne est généralement infectée par le goût Hollandois, il seroit à desirer que les grandes dépenses que ce Prince, fit en bâtimens, eussent été dirigées par de plus habiles

* A peine avoit-il 00. habitans ans cette ville, aulieu u'il y en a present plus e 20. mille.

habiles Architectes ; il eut le sort de tous les Fondateurs des Villes, qui, occupés par la solidité de leurs desseins, ont la plûpart negligé ce qui avec la même dépense les auroit embellies & ornées davantage.

Berlin aprés son augmentation reçut une Police nouvelle * sur le pied à peu prés de celle de Paris. On établit dans tous les quartiers de la ville des Officiers de police; l'usage des Fiacres s'établit en même tems; on purgea la Ville de ces fainéans qui se nourrissent à force d'importunités, & ces malheureux objets de nos dégoûts & de nôtre compassion, envers lesquels la Nature n'a été qu'une marâtre, trouvérent des aziles dans les Hopitaux publics.

* en 1734.

Pendant que tous ces changemens se firent, le luxe, la magnificence & les plaisirs disparurent, l'esprit d'épargne s'introduisit dans tous les états; chez le riche comme chez le pauvre. Sous les Régnes précedens, beaucoup de Nobles vendoient leurs terres pour acheter du drap d'or & des galons; cet abus cessa. Dans la plûpart des Etats Prussiens, les Gentilshommes ont besoin d'une bonne Oeconomie pour soutenir leurs familles, à cause que le droit de primogéniture n'a point lieu, & que les Péres ayant beaucoup d'enfans à établir, ne peuvent procurer que par leur épargne un revenu honnête à ceux qui aprés leur mort partageront leur maison dans des branches nouvelles.

Cette diminution dans la dépense du Public, n'empêcha pas beaucoup d'Artisans de se perfectionner ; nos Carosses, nos Galons, nos Velours & nos Ouvrages d'Orfevrerie, se répandirent par toute l'Allemagne.

Mais ce qu'il y eut de déplorable, ce fut que pendant qu'on faisoit des arrangemens si utiles & si grands, on laissa tomber dans une décadence entiére l'Academie des Sciences, les Universités, les Arts liberaux & le Commerce.

On remplissoit mal & sans choix les places qui venoient à vaquer dans l'Academie Royale des Sciences, & par une dépravation singuliere le Siécle affectoit de mépriser une Societé, dont l'origine étoit aussi illustre, & dont les travaux tendoient autant à l'honneur de la

la Nation que de l'esprit humain. Pendant que tout ce Corps tomboit en léthargie, la Medecine & la Chymie se soutinrent. Pott, Margraff & Eller, combinoient & décomposoient la matiere, & éclairoient le Monde par leurs découvertes; & les Anatomistes obtinrent un Théatre pour leurs dissections publiques, qui devint une Ecole florissante de Chirurgie.

La faveur & les brigues remplissoient les Chaires des Professeurs dans les Universités; les Dévots qui se mêlent de tout, acquirent une part à la Direction des Universités, ils y persecutoient le bon sens, & sur tout la Classe des Philosophes. Wolff fut exilé pour avoir déduit avec un ordre admirable les preuves sur l'existence de Dieu; la jeune Noblesse qui se vouöit aux armes, crut déroger en étudiant, & comme l'esprit humain donne toujours dans les excés, ils regarderent l'Ignorance comme un titre de mérite, & le Savoir comme une Pédanterie absurde.

La même raison fit que les Arts liberaux tomberent en décadence. L'Academie des Peintres cessa. Pesne qui en étoit le Directeur, quitta les Tableaux pour les Portraits; les Menuisiers s'érigerent en Sculpteurs, & les Maçons en Architectes. Un Chymiste, nommé Böttcher, passa de Berlin à Dresde, & donna au Roi de Pologne le secret de cette Porcelaine, qui surpasse celle de la Chine par l'élégance des formes & la finesse de la diaprure.

Notre Commerce n'étoit pas encore né; le Gouvernement l'étouffoit, en suivant des principes qui s'opposoient directement à ses progrés: il n'en faut point conclurre que la nation manque de Génie propre au négoce. Les Vénitiens & les Génois furent les premiers qui le saisirent, la découverte de la Boussole le fit passer chez les Portugais & les Espagnols, il s'étendit ensuite en Angleterre & en Hollande, les François s'y appliquerent les derniers, & ils regagnerent de vitesse ce qu'ils avoient négligé par ignorance. Si les habitans de Dantzig, de Hambourg, de Lubeck, si les Danois & les Suédois, s'enrichissent tous les jours par la navigation, pourquoi les Prussiens n'en feroient-ils pas autant? Les hommes deviennent tous des Aigles quand on leur ouvre

ouvre les chemins de la fortune; il faut que l'exemple les anime, que l'émulation les excite, & que le Souverain les encourage. Les François ont été tardifs; nous le sommes de même; peut-être est-ce que notre heure n'est pas encore venuë.

On songeoit moins alors à étendre le Commerce, qu'à réprimer les dépenses inutiles. Les deuïls avoient été autrefois ruïneux pour les familles. On donnoit des festins aux Enterremens, la pompe funebre étoit même coûteuse. Toutes ces coûtumes furent abolies. On ne drapa plus les Maisons, ni les Carosses, on ne donna plus des livrées noires; & depuis on mourut à fort bon marché.

Ce Gouvernement tout militaire influa dans les moeurs, & régla même les modes. Le public avoit pris par affectation un air aigrefin; personne dans tous les Etats Prussiens n'avoit plus de 3. aunes de drap dans son habit, & moins de deux aunes d'épée penduës à son coté. Les femmes fuyoient la société des hommes, & ceux-ci s'en dédommageoient entre le vin, le tabac & les bouffons. Enfin nos moeurs ne ressembloient plus, ni à celles de nos ancêtres, ni à celles de nos voisins; nous étions Originaux, & nous avions l'honneur d'être copiés de travers par quelques petits Princes d'Allemagne.

Vers les dernieres années de ce Régne * le hazard conduisit à Berlin un homme d'un esprit malfaisant, obscur & rusé; c'étoit une espece d'Adepte, qui faisoit de l'Or pour le Souverain, aux dépens de la bourse de ses sujets; ses artifices lui réüssirent un tems, mais comme la méchanceté se découvre tôt ou tard, ses prestiges disparurent, & sa malheureuse science rentra dans les ténébres dont elle étoit sortie.

* Eckert.

Telles ont été les moeurs du Brandebourg sous tous ses differens Gouvernemens. Le Génie de la Nation fut supprimé par une longue suite de Siécles barbares, il s'éleva de tems en tems, mais il s'affaissa aussi-tôt sous l'ignorance & le mauvais goût; & lorsque des circonstances heureuses semblerent favoriser ses progrés, survint une Guerre dont les suites funestes anéantirent l'Etat. Nous avons vû cet Etat renaissant de ses cendres; nous avons vû par quels nouveaux efforts la Nation parvint à se civiliser, & si ce beau feu n'a jetté que de foi-

 bles

bles étincelles, il ne faut qu'une bagatelle pour le faire éclorre au grand jour. Comme les semences ont besoin d'un terrain propre pour leur dévelopement, de même les Nations demandent un concours de conjonctures heureuses, pour qu'elles sortent de leur engourdissement, & qu'elles reçoivent pour ainsi dire une nouvelle vie.

Tous les Etats ont eu un certain Cercle d'évenemens à parcourir, avant que d'atteindre à leur plus haut dégré de perfection. Les Monarchies y sont arrivées avec une allure plus lente, & s'y sont moins soutenuës que les Républiques; & s'il est vrai de dire que la forme de Gouvernement la plus parfaite, est celle d'un Royaume bien administré, il n'est pas moins certain que les Républiques ont rempli le plus promptement le but de leur Institution, & se sont le mieux conservées, par ceque les bons Rois meurent, & que les sages Loix sont immortelles.

Sparte & Rome, qui furent fondées pour être Guerrieres, produisirent, l'une cette phalange invincible, l'autre, ces Légions qui subjuguerent la moitié du monde connu. Sparte enfanta les plus illustres Capitaines. Rome devint une pepiniere de Héros. Athenes, à laquelle Solon avoit donné des Loix plus pacifiques, devint le berceau des Arts. 'A quelle perfection ses Poëtes, ses Orateurs & ses Historiens, ne parvinrent-ils point? Cet azile des Sciences se conserva jusqu'à l'entiere ruine de l'Attique. Carthage, Venise, & même la Hollande, furent par leur institution liées au Commerce, & elles le pousserent & le soutinrent constamment, reconnoissant que c'étoit le principe de leur grandeur, & le soutien de leur Etat.

Continuons encore cet examen pour un moment. En touchant aux Loix fondamentales des Républiques, on est sûr de les renverser de fond en comble, à cause que la sagesse des Législateurs a formé un tout, auquel les parties du Gouvernement tiennent essentiellement: rejetter les unes, c'est détruire les autres, par l'enchainure de Conséquences qui les lie ensemble, & qui en forme un Systême al fortissant & complet.

Dans

Dans les Royaumes la forme du Gouvernement n'a de base que le Despotisme du Souverain: les Loix, le Militaire, le Negoce, l'Industrie, & toutes les autres parties de l'Etat, sont assujetties au caprice d'un seul homme, qui a des successeurs qui ne se ressemblent jamais; d'où il s'ensuit pour l'ordinaire qu'à l'avenement d'un nouveau Prince, l'Etat est gouverné par de nouveaux principes; & c'est ce qui porte préjudice à cette forme de Gouvernement. Il y a de l'unité dans le but que les Républiques se proposent, & dans les moyens qu'elles employent pour y parvenir, ce qui fait qu'elles ne le manquent presque jamais. Dans les Monarchies un fainéant succede à un Prince ambitieux; celui-ci est suivi d'un dévot, celui-là par un Guerrier, celui-ci par un savant, celui-là par un autre qui s'abandonne à la volupté; & pendant que ce Théatre mouvant de la fortune présente sans cesse des scenes nouvelles, le Génie de la Nation diverti par la varieté des objets ne prend aucune assiéte fixe. Il faut donc que dans les Monarchies les Etablissemens qui doivent braver la vicissitude des Siécles, ayent des racines si profondes qu'on ne puisse les arracher, sans ébranler en même tems les plus solides fondemens du Trône.

Mais la fragilité & l'instabilité sont inséparables des Ouvrages des hommes. Les Révolutions que les Monarchies & les Républiques éprouvent, ont leurs causes dans les Loix immuables de la Nature. Il faut que les passions humaines servent de ressorts, pour amener & mouvoir sans cesse de nouvelles décorations, que la fureur audacieuse des uns enleve, & que la foiblesse des autres ne peut défendre; que des ambitieux effrenés renversent des Républiques, & que l'artifice triomphe quelquefois de la simplicité. Sans ces grandes secousses dont nous venons de parler, l'Univers resteroit sans cesse le même; il n'y auroit point d'égalité entre le destin des Nations. Quelques Peuples seroient toujours civilisés & heureux, & d'autres toûjours barbares & infortunés.

Nous avons vû des Monarchies naître & mourir, des peuples, de barbares qu'ils étoient, se policer & devenir le modele des Nations. Ne pourrions-nous pas en conclurre que ces Nations ont une révolu-

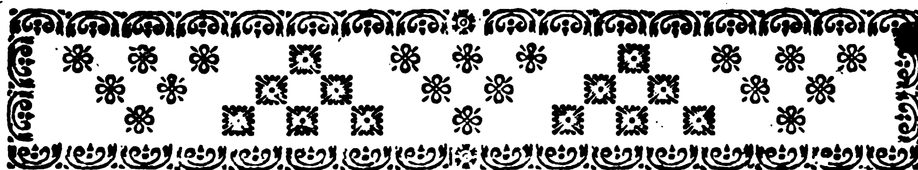
 tion

tion ſemblable à celle des Planetes, qui, ſelon le ſentiment de quelques Aſtronomes, aprés avoir parcouru en dix mille ans tout l'eſpace des Cieux, ſe retrouvent d'où elles étoient parties ?

Nos beaux jours arriveront donc, comme ceux des autres; nos prétenſions ſont d'autant plus juſtes que nous avons payé le tribut à la Barbarie, quelques Siécles de plus que les Méridionaux.

Ces Siécles précieux s'annoncent par le nombre de Grands hommes en tout genre qui naiſſent à la fois. Heureux ſont les Princes qui viennent au monde dans des conjonctures auſſi favorables! Les Vertus, les Talens, le Génie, les emportent, d'un mouvement commun avec eux, aux choſes grandes & ſublimes.





RÉPONSE

DE

M. DE MAUPERTUIS.



Aprés les Mémoires, Monſieur, que vous avez leus dans nos Aſſemblées précedentes ſur l'Hiſtoire de ce Païs, il ne nous reſtoit plus à deſirer que celui que nous venons d'entendre. On reconnoit dans tous le même Génie & le même Style : cependant, ſi je l'oſe dire, celui-ci a ſur les autres l'avantage que lui donne ſon ſujet.

Repréſenter les évenemens dans leur ordre, donner à chaque partie de l'Hiſtoire ſa proportion & ſa meſure, écrire avec préciſion & élegance ; ſuppoſe un Eſprit juſte, une Imagination heureuſe, & une connoiſſance parfaite de la Langue. Décrire les Moeurs & les Coutumes des peuples, remonter à leur origine, les ſuivre dans leur progrés ; marquer ce qui appartient à l'homme en général, ou à une Nation en particulier, n'eſt donné qu'à un Eſprit profond.

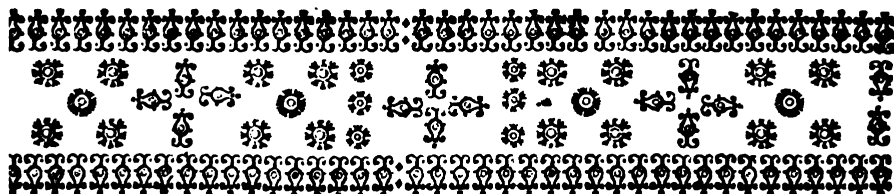
Si un Ecrivain ſe trouve aſſés avantagé de la Nature pour pouvoir remplir à la fois tous ces differens objets, combien ne ſera-t-il pas ſuperieur, & à l'Hiſtorien qui ne rapporte que les faits, & au Philoſophe qui s'en tient aux ſpeculations ? C'eſt que les évenemens ſont neceſſairement liés aux moeurs ; & en ſont presque toujours

les

ses suites, ou les causes. Un Esprit assés vaste embrasse cette rélation; il pourroit en quelque sorte prevoir les moeurs qui doivent résulter d'une certaine chaine d'evenemens; prédire les évenemens, qui seront la suite des moeurs.

Si un tel homme se trouvoit appellé au Conseil des Rois; s'il se trouvoit lui-même revêtu d'une grande puissance; (car nous avons depuis Cesar l'exemple de grands Princes, qui ont été en même tems d'excellens Auteurs,) quel bonheur ne seroit ce point pour les Peuples qu'il auroit à gouverner! Quel bonheur ne seroit-ce point pour toute l'Europe!





DE LA SUPERSTITION
ET DE LA RELIGION.



Je divise en trois parties ce morceau qui concerne la Religion & la Superstition, & je présenterai pour plus de clarté & d'ordre la Religion sous le Paganisme, sous le Papisme, & sous la Réforme.

ARTICLE I.
De la Religion sous le Paganisme.

Le Brandebourg a suivi le culte different des divers Peuples qui ont habité. Les Teutons qui furent ses plus anciens habitans, ado-ient un Dieu, nommé Tuiston. César dit que c'est le *Dis Pater* gendré par la Terre, & qui avoit lui-même un fils nommé Man.

Le culte que les Germains rendoient à leurs Dieux étoit pro-ortionné à leurs moeurs sauvages, grossieres & simples; ils s'assem-oient dans des Bois sacrés, chantoient des Hymnes à l'honneur de ars Idoles, & leur sacrifioient même des victimes humaines.

Il n'y avoit pas de Contrée qui n'eut son Dieu particulier; les andales en avoient un, nommé Triglaff. On en trouva encore un Harlungerberg auprés de Brandebourg; il étoit représenté avec ois têtes, ce qui marquoit * qu'il régnoit au Ciel, sur la Terre & ns les Enfers; c'étoit apparement la Trinité du Paganisme. Ta-cite

* Valentin Eichstadt.

cite rapporte que les Germains avoient un certain nombre de Chevaux blancs, qu'ils croyoient être instruits des Mysteres de leurs Dieux, & qu'on nourrissoit un cheval noir pour la Déesse Trigla, qui passoit pour l'interprête de ses volontés. * Ces Peuples adoroient aussi des serpens, & l'on punissoit de mort ceux qui en tuoient.

Alnus A- zit.

Dans le V. Siécle les Vandales abandonnerent leur Patrie pour inonder la France, l'Espagne, & même l'Afrique. † Les Saxons qui revenoient alors d'Angleterre, firent une descente à l'embouchure de l'Elbe, & prirent possession de ces Contrées entre l'Elbe, la Sprée & l'Oder, que les naturels du Païs avoient abandonnées. Leurs Dieux & leur Religion devinrent ceux du Brandebourg. La principale de leurs Idoles s'appelloit Irmansëul, ce qui signifie Colomne d'Irman. Les savans Etymologistes d'Allemagne n'ont pas manqué de faire dériver le nom d'Irman de Hermes, qui est le même que le Mercure des Grecs.

Orose & goire de rs.

Il est connu à tous ceux qui sont versés dans la Litterature Allemande, que c'est une fantaisie générale parmi leurs Savans de trouver des rapports entre les Divinités de la Germanie, & celle des Egyptiens, des Grecs & des Romains. Il n'est malheureusement que trop vrai que l'erreur & la superstition semblent être le partage de l'humanité. Tous les Peuples ont eu la même pente pour l'Idolatrie; & comme ils ont tous à peu prés les mêmes Passions, les effets n'ont pas manqué d'y répondre. La Crainte donna le jour à la crédulité, & l'Amour propre interessa bientôt le Ciel au destin des hommes. De là nâquirent tous ces cultes differens, qui n'étoient à proprement parler que des soumissions modifiées en cent façons extravagantes, pour appaiser la colere céleste dont on redoutoit les effêts. La Raison humaine, alterée & abrutie par la terreur que toutes sortes de calamités lui inspiroient, ne savoit à qui s'en prendre pour se rassurer contre ses craintes; & comme les malades ont recours aux remedes les plus insensés, pour essayer s'ils n'en trouveront point un qui les guérisse; le Genre humain supposa dans son aveuglement une essence divine, & une vertu secourable, dans tous les objets de la Nature

depuis

depuis les plus sublimes jusqu'aux plus abjects. Tout fut adoré; l'encens fuma pour des Champignons, le Crocodile eut des Autels, les Statuës des Grands Hommes, qui les premiers avoient gouverné des Nations, eurent des Temples & des Sacrificateurs, & dans les tems où des afflictions générales désoloient un païs, la superstition redoubloit. Les Savans Allemans ont raison de dire en ce sens, que la superstition est la même chez toutes les Nations; quoiqu'elle soit en général une suite de la crédulité, elle se manifeste cependant sous des nuances variées à l'infini, & proportionnées au Génie des Nations. J'aurois peine à me persuader que les Fables ingénieuses des Grecs, que leurs Dieux, Minerve, Venus & Apollon eussent été connuës dans ce Païs du tems du Paganisme. Mais nos profonds Etymologistes ne s'embarassent pas de si peu de chose; ils croyent ennoblir leur Mythologie en donnant à leurs Dieux des origines Grecques, ou Romaines, comme si le nom de ces Peuples pouvoit rendre l'Idolatrie plus respectable, & que l'extravagance des Grecs valût mieux que celle des Allemans.

Irmansäul n'étoit pas le seul Dieu des Saxons. On trouva sous une de leurs Idoles l'Inscription suivante. *Je fus autrefois le Duc des Saxons, j'en suis devenu le Dieu.* Angelus soutient qu'ils adoroient le Soleil, sous la forme d'une tête radieuse, & que cette Idole donna son nom à la Ville de Sonnenburg, où elle étoit placée. Le même Auteur prétend qu'ils adoroient de même Venus représentée à demi nuë, ayant la mammelle gauche percée par une flêche, & trois Graces plus petites qu'elle qui l'entouroient. Ces Peuples la nommoient Magda, ce qui veut dire fille; & Angelus assûre qu'elle donna son nom à Magdebourg, où elle avoit ses autels, * On voyoit encore des ruines de son Temple dans cette ville, avant que Tilly l'eut saccagée. Ce qui paroit de plus remarquable dans le Culte que les Saxons rendoient à cette Divinité, étoient les jeux qu'ils célébroient à son honneur. Ils consistoient en des Tournois que représentoient tous les jeunes Gens des Bourgades voisines; ils déposoient une somme d'argent entre les mains des Juges, pour doter une jeune fille qui

* Annales de Magdebourg.

étoit donnée en mariage comme un prix, à celui qui l'avoit emporté à la joute. Les Annales de Magdebourg témoignent que ces jeux se célébroient encore, comme des restes du Paganisme, l'année 1279. & l'année 1387.

Le Luxe s'introduisit dans la Religion, lors que les Richesses augmenterent. Anciennement les Peuples tenoient qu'il n'étoit pas convenable de placer leurs Dieux dans des Temples bâtis de main d'hommes, & ils les adoroient dans leurs Bois sacrés, mais à mesure que les moeurs s'adoucirent, leurs Dieux vinrent habiter les Villes.* Cependant l'ancien usage ne fut pas entierement aboli; car on trouve que Charlemagne défendit aux Saxons d'adorer des Chênes, & de les arroser du Sang des victimes.

* Linderoek.

Les Prêtres † de ces tems étoient plus artificieux & plus fourbes que le Peuple. Outre leur Sacerdoce ils exerçoient une triple Charlatannerie; ils fabriquoient des Oracles, & se mêloient de l'Astrologie & de la Médecine. Il ne falloit pas tant de ruses pour abuser un Peuple aussi grossier. Aussi-fut-il bien difficile de détruire une Religion ancrée par tant de superstitions dans les esprits. Toute l'Allemagne étoit encore attachée au Culte des Idoles, quand Charlemagne, & aprés lui Henri l'Oiseleur, entreprirent de convertir ces peuples. Aprés bien des efforts inutiles, ils n'y réüssirent qu'en noyant l'Idolatrie dans des torrens de sang humain qu'ils verserent.

† Freinsemius & Schmidt.

ARTICLE II.

Conversion des Peuples au Christianisme; & de l'Etat de la Religion Catholique dans le Brandebourg.

La folie de tous les Peuples est d'illustrer la Noblesse de leurs Loix, de leurs Coutumes & de leur Religion, par l'antiquité de leur origine. Les Allemans non contens d'avoir dérobé leurs Dieux aux Grecs, ont voulu passer pour aussi vieux Chrêtiens que les autres Nations de l'Europe. Ils ont trouvé dans St. Jerôme je ne sai quel passage qui dit, à ce que Staphonius & Smitius prétendent, que l'Apôtre Thomas vint prêcher l'Evangile au Nord de l'Allemagne. Il n'y

prêcha

prêcha en verité que l'incredulité; car le peuple demeura Payen, bien longtems aprés lui.

Quoiqu'on dise, il ne se trouve aucune trace de Christianisme dans le Brandebourg que du tems de Charlemagne. * Cet Empereur, aprés avoir remporté differentes victoires sur les Saxons & les Brandebourgeois, vint établir son Camp à Wormerstedt † auprés de Magdebourg, & il n'accorda la paix à ces Provinces qu'il avoit subjuguées, qu'à condition qu'elles embrasseroient le Christianisme.

* Dans le VIII. Siécle.

† Henri Meibomius.

L'impuissance de résister à un ennemi aussi redoutable, & la crainte des menaces, conduisit ces Peuples au Batême, qui leur fut administré dans le Camp de l'Empereur; mais la sécurité les ramena tous à l'Idolatrie, dés que l'Empereur se fut éloigné avec son armée de leur voisinage.

L'Empereur Henri l'Oiseleur triompha ensuite à l'exemple de Charlemagne, des habitans des bords de l'Elbe & de l'Oder, & aprés bien du sang répandu, ces Peuples furent subjugués & convertis. Les Chrêtiens détruisirent par zéle les Idoles du Paganisme, de sorte qu'il ne nous en est presque resté aucun vestige; les niches de ces Idoles vacantes furent remplies de Saints de toute espece; & de nouvelles erreurs succederent aux anciennes. 928.

Ce Siécle que Léon X. illustra en Italie, en y ressuscitant les beaux arts & les sciences, ensevelies depuis longtems sous l'ignorance & le mauvais goût; ce Siécle, dis-je, n'étoit point aussi célébre pour les Ultramontains: l'Allemagne étoit encore plongée dans l'ignorance la plus grossiere, & elle languissoit sous un Gouvernement tout barbare; point de moeurs, aucunes connoissances, & la Raison humaine privée des lumiéres de la Philosophie demeuroit abrutie dans sa stupidité: les Convertisseurs, & les Néophytes, dans le même cas sur ces articles, n'avoient aucun reproche à se faire.

* Environ l'année 946. l'Empereur Othon fonda l'Evêché de Havelberg, & peu de tems aprés celui de † Brandebourg. Il crut apparemment d'opposer par ce moyen une digue au débordement de l'Idolatrie, à laquelle ces Peuples étoient enclins, comme les Prin-

* Angelus.

† 960.

grosses Garnisons dans des Païs sur lesquels il n'avoit aucune Souveraineté. Mais dans ces temps les Peuples étoient abrutis, les Princes foibles, & la Religion triomphante.

Quand une fois le Christianisme eut poussé de profondes racines, il produisit des Fanatiques de toute espéce. * La Peste ravagea le Brandebourg en 1351. & c'en fut assés pour faire extravaguer la superstition, Pour appaiser la colore céleste, on batisa des Juifs par force, on en brula d'autres, on fit des Processions, des Voeux aux Images miraculeuses, & l'imagination échauffée par tant d'inventions folles, ou bizarres, enfanta enfin l'Ordre des Flagellans. C'étoient des Chrêtiens mélancholiques & atrabilaires, qui se fouëttoient avec des verges de fil d'archal dans les Processions publiques. Cependant le Pape eut horreur de ces macerations monstrueuses, & reprouva l'ordre & ses abus.

* Cramer, Baronius, Lockelius.

On tourna la dévotion du Public sur des objets plus doux. Le Pape Jean XXII. établit des Bureaux d'Indulgences dans le Brandebourg. Les Augustins trafiquoient de ces Indulgences, & en envoyoient le produit à Rome. Les miracles devinrent à la fin si fréquens, † que les Auteurs rapportent qu'il tomba l'année 1500. une pluye de Croix rouges & blanches sur tous les passans. On trouva même de ces Croix dans le pain, ce qui fut regardé comme le présage d'un grand malheur.

† Lockelius Annales de Brandebourg.

Dans ce tems où les Prêtres abusoient si grossierement de la crédulité des hommes, où ils se servoient de la Religion pour s'enrichir, où les Ecclesiastiques menoient la vie la plus scandaleuse, un simple Moine entreprit de réformer tant d'abus. Il rendit aux hommes par son exemple l'usage de la Raison, qui leur avoit été interdit pendant tant de Siécles, & l'esprit humain enhardi par le recouvrement de sa liberté, étendit de tous côtés la sphére de ses connoissances.

Article III.

De la Religion sous la Réforme.

Je ne considérerai point l'Ouvrage de la Réforme du coté de

la Theologie & de l'Histoire ; les Dogmes de cette Religion, & les évenemens qu'elle fit naître, sont si connus que ce n'est pas la peine de les répeter. Une Révolution si grande & si singuliere, qui changea presque tout le Systême de l'Europe, mérite d'être examinée avec des yeux philosophiques.

La Religion Catholique, qui s'étoit élevée sur la ruïne de celle des Juifs & des Payens, subsistoit depuis XV. Siécles: humble & douce sous les persécutions, mais fiere aprés son Etablissement, elle persécuta à son tour. Tous les Chrêtiens étoient soumis au Pape, qu'ils croyoient infaillible; ce qui rendoit son pouvoir plus étendu que celui du Souverain le plus despotique. Un miserable Moine s'éleva contre une Puissance si solidement établie, & la moitié de l'Europe secoüa le joug de Rome.

Toutes les raisons qui contribuerent à ce grand changement extraordinaire, subsistant longtems avant qu'il vint à éclorre, préparoient d'avance les esprits à ce dénouëment. La Religion Chrêtienne étoit si dégénérée, qu'on n'y reconnoissoit plus les Caractéres de son Institution. Rien ne surpassoit dans son origine la sainteté de sa Morale, mais la pente du Coeur humain à la corruption en pervertit bientôt l'usage. Ainsi les sources les plus pures du bien sont devenuës des principes de toutes sortes de maux pour les hommes. Cette Religion qui enseignoit l'humilité, la charité & la patience, s'établit par le fer & par le feu. Les Prêtres des Autels dont la sainteté & la pauvreté devoit être le partage, menerent une vie scandaleuse; ils acquirent des richesses, ils devinrent ambitieux, quelques uns furent des Princes puissans. Le Pape, qui originairement relevoit des Empereurs, s'arrogea le pouvoir de les faire, & de les déposer, il fulmina des Excommunications, il mit des Royaumes en interdit, & il outra si prodigieusement les choses que, de quelque maniére que ce fut, il falloit à la fin que le Monde se revoltât contre tant d'abus.

La Religion changea ainsi que les moeurs, elle perdit de siécle en siécle sa simplicité naturelle, & à force de fard, elle devint méconnoissable. Tout ce qu'on y ajouta, n'étoit que l'Ouvrage des hom-

* 321. mes, il devoit périr comme eux. Au Concile de * Nicée, la Divinité † du Fils fut déclarée égale à celle du Pére, & le St. Esprit annexé à ces deux personnes, forma la Trinité. On défendit aux Prêtres de se marier, par les Ordonnances du Concile de Tolède. * Cependant ils ne se soumirent à la volonté de l'Eglise que dans le XIII. Siécle. Le Purgatoire prit naissance dans le VI. Siécle. Le Concile de Trente en fit un dogme. Le Culte des Images fut autorisé par le second Concile de Nicée, † & la Transsubstantiation fut établie par les Péres du Concile de Trente. * Les Ecoles de Theologie soutenoient déjà l'Infaillibilité du Pape, depuis que les Evêchés de Rome & de Constantinople se trouverent en opposition. Quelques solitaires fonderent des Ordres Religieux, & rendirent toute spéculative une vie, qui doit se passer en action pour le bien de la societé; les Couvens se multiplierent à l'infini, & une grande partie du Genre humain y fut enseveli. Enfin toutes sortes de supercheries s'inventerent pour surprendre la bonne foi du Vulgaire, & les faux miracles devinrent presque communs.

† Origene & St. Justin, n'étoient pas de ce sentiment: le dernier dit dans son Dialogue p. 316. que la grandeur du Fils n'approche pas de celle du Pére.

* Tenu l'année 400.

† Tenu en 781.

* 1645.

Ce n'étoit pas cependant par ces changemens qui regardoient l'objet de la foi, que la Réforme pouvoit venir dans la Religion. Du nombre des gens qui pensent, la plûpart tournent toute la sagacité de leur esprit du côté de l'interêt & de l'ambition; peu combinent des idées abstraites, & encore moins réflêchissent profondément sur des matieres aussi importantes; & le peuple, la plus respectable, la plus nombreuse & la plus infortunée partie de la Societé, suit les impressions qu'on lui donne.

Il n'en étoit pas ainsi du pouvoir tyrannique que le Clérgé exerçoit sur les consciences; les Prêtres dépouïlloient les hommes de leurs biens & de leur liberté.

Cet esclavage qui s'appésantissoit chaque jour, excitoit déjà des murmures. L'homme le plus stupide, comme le plus spirituel, dés qu'il a de la sensibilité, s'apperçoit du mal qu'il souffre; tous tendent à leur bien-être, ils endurent un tems, mais à la fin la patience leur échape, & les véxations que tant de Peuples souffroient, auroient immanquablement donné lieu à quelque réforme, si le Clergé Romain

forte-

fortement agité par des dissensions intestines, n'eut enfin donné lui-même le signal de la liberté, en arborant l'étendart de la révolte contre le Pape. Les Vaudois, les Wiclefites & les Hussites avoient déjà commencé à remuër, mais Luther & Calvin aussi audacieux, & nés dans des conjonctures plus favorables, consommerent enfin ce grand Ouvrage.

Les Augustins étoient en possession du trafic des Indulgences, le Pape chargea les Dominicains de les prêcher; ce qui excita une querelle furieuse entre ces deux Ordres. Les Augustins déclamerent contre le Pape; Luther qui étoit de leur Ordre, attaqua avec vehémence les abus de l'Eglise, il arracha d'une main hardie une partie du bandeau de la superstition, il devint bientôt Chef de parti: & comme sa Doctrine dépouilloit les Evêques de leurs Bénéfices, & les Couvens de leurs Richesses, les Souverains suivirent en foule ce nouveau Convertisseur.

La Religion prit alors une forme nouvelle, & se rapprocha beaucoup de son ancienne simplicité. Ce n'est point ici le lieu d'examiner, s'il n'eut pas mieux valu lui laisser plus de pompe & d'exterieur pour qu'elle en imposât davantage au Peuple, qui n'est frappé, & ne juge que par les sens; il paroit qu'un Culte tout spirituel, & aussi nud que l'est celui des Protestans, n'est pas fait pour des hommes materiels & grossiers, incapables de s'élever par la pensée à l'adoration des plus sublimes vérités.

La Réforme fut utile au monde, & sur tout aux progrés de l'esprit humain. Les Protestans, obligés de réfléchir sur des matieres de la foi, se dépoüillerent tout d'un coup des préjugés de l'Education, & se virent en liberté de se servir de leur raison, de ce guide qui est donné aux hommes pour les conduire, & dont au moins ils devroient faire usage pour l'objet le plus important de leur vie. Les Catholiques vivement attaqués furent obligés de se défendre. Les Ecclesiastiques étudierent, & ils sortirent de l'ignorance crasse & honteuse, dans laquelle ils croupissoient presque généralement.

S'il n'y avoit qu'une Religion dans le monde, elle seroit superbe & despotique sans retenuë; les Ecclésiastiques seroient autant de

Tyrans, qui, exerçant leur féverité fur le peuple, n'auroient d'indulgence que pour leurs crimes. La Foi, l'Ambition & la Politique leur afferviroient l'Univers. A préfent qu'il y en a plufieurs, aucune de ces Sectes ne fort, fans s'en repentir, des voyes de la modération. L'exemple de la Réforme eft un frein qui empêche le Pape de fe livrer à fon ambition, & il craint avec raifon la défection de fes Membres, s'il abufe de fon pouvoir; auffi devient-il fobre d'excommunications, depuis qu'une pareille démarche lui enleva Henri VIII. & le Royaume d'Angleterre. Le Clergé Catholique & Proteftant, qui s'obferve avec une difpofition égale à la critique, eft retenu des deux côtés à garder au moins une décence exterieure. Ainfi tout refte en équilibre. Heureux, fi l'efprit de parti, le fanatisme, & un excés d'aveuglement, ne les précipitent jamais dans des guerres, dont la fureur eft le partage, & que des Chrêtiens ne devroient jamais fe faire. En regardant la Religion fimplement du côté de la Politique, il paroit que la Proteftante eft la plus convenable aux Républiques & aux Monarchies. Elle s'accorde le mieux avec cet efprit de liberté qui fait l'effence des premieres. Car dans un Etat, où il faut des Négocians, des Laboureurs, des Artifans, des Soldats, des Sujets en un mot, il eft fûr que des Citoyens qui font voeu de laiffer périr l'efpece humaine, deviennent pernicieux.

Dans les Monarchies la Religion Proteftante, qui ne reléve de perfonne, eft entierement foumife au Gouvernement; au lieu que la Catholique établit un Etat fpirituel, tout-puiffant, fécond en complots & en artifices, dans l'Etat temporel du Prince; que les Prêtres qui dirigent les confciences, (& qui n'ont de fuperieur que le Pape,) font plus maitres des Peuples, que le Souverain qui les gouverne, & que par une adreffe à confondre les interêts de Dieu avec l'ambition des hommes, le Pape s'eft vû fouvent en oppofition avec des Souverains, fur des fujets qui n'étoient aucunement du reffort de l'Eglife.

Dans le Brandebourg, & dans la plupart des Provinces de l'Allemagne, le peuple portoit impatiemment le joug du Clergé Romain. C'étoit une Religion trop onéreufe pour des païs auffi peu opulens. Le Purgatoire, la Meffe des morts & des vivans, le Jubilé, les Anna-

tes, les Indulgences, les Péchés véniels & mortels, les Pénitences changées en Amendes pécuniaires, les Affaires matrimoniales, les Voeux, les Offrandes, étoient autant d'impôts que le Pape levoit sur la crédulité, & qui lui donnoient des revenus aussi solides que le Méxique en fournit à l'Espagne. Ceux qui les payoient, étoient épuisés & mécontens. Il n'étoit donc pas même nécessaire d'employer l'évidence des argumens pour disposer ces esprits à recevoir la Réforme; ils crioient contre le Clergé qui les opprimoit: un homme vint, qui promit de les en délivrer, & ils le suivirent.

Joachim II. fut le premier Electeur qui embrassa la Religion Lutherienne. Sa Mère, qui étoit une Princesse de Dannemarc, lui communiqua ses sentimens. Car la nouvelle Doctrine avoit penétré en Dannemarc, avant que d'être reçuë dans le Brandebourg. Le Païs suivit l'exemple du Prince, & tout le Brandebourg se fit Protestant. Matthieu Jagow, Evêque de Brandebourg, administra le Sacrement sous les deux espéces dans le Couvent des Moines noirs. Ce Couvent devint ensuite la Cathédrale de Berlin. Joachim II. se distingua dans le parti, tant par les Lettres de Controverse qu'il écrivit au Roi de Pologne, que par les discours éloquens, (* à ce que disent les Auteurs,) que ce Prince prononça à la Diéte d'Augsbourg en faveur des Protestans.

* Lockelius, Annales de Brandebourg.

La Réforme ne put point détruire toutes les erreurs: quoiqu'elle eut ouvert les yeux du Peuple sur une infinité de superstitions, il s'en conserva encore beaucoup d'autres; tant la pente de l'esprit humain pour l'erreur est inconcevable. Luther, qui ne croyoit point au Purgatoire, admettoit les Revenans & les Démons dans son Systême; il soutint même que Satan lui apparut à Wittemberg, & qu'il l'éxorcisa en lui jettant un Cornet d'encre à la tête. Il n'y avoit alors presqu'aucune Nation qui ne fut imbuë de pareils préjugés. La Cour, & à plus forte raison le peuple, avoient l'esprit rempli de Sortileges, de Divinations, de Revenans & de Démons. En 1553. deux vieilles femmes passérent par l'épreuve du feu pour se purger de l'accusation de sorcellerie. La Cour avoit son Astrologue. L'un prédit à la naissance de Jean Sigismond, que ce Prince seroit heureux, à cause qu'au

même tems on avoit découvert au Ciel une Etoile nouvelle dans la Constellation de Cassiopée. L'Astrologue n'avoit pas prédit cependant, que Jean Sigismond se feroit Reformé, pour gagner les Hollandois, dont les secours lui devinrent utiles dans la poursuite de ses droits sur le Duché de Cleves.

Depuis que le Schisme de Luther séparoit l'Eglise, les Papes & les Empereurs firent toutes sortes d'efforts pour amener les esprits à la reünion. Les Théologiens des deux partis tinrent des Conférences, tantôt à Thorn, tantôt à Augsbourg. On agitoit les matieres de Religion à toutes les Diétes de l'Empire, mais toutes ces tentatives furent inutiles. Il s'ensuivit enfin une Guerre cruelle & sanglante, qui s'appaisa & se ranima à differentes reprises. L'ambition des Empereurs qui vouloient opprimer la Liberté des Princes & la Conscience des Peuples, l'alluma souvent. Mais la rivalité de la France & l'ambition de Gustave Adolphe, Roi de Suéde, sauverent l'Allemagne & la Religion du Despotisme de la maison d'Autriche.

Les Electeurs de Brandebourg se conduisirent dans ces troubles avec sagesse. Ils furent moderés & tolerans. Frèderic Guillaume, qui avoit acquis par la paix de Westphalie des Provinces qui lui donnoient des sujets Catholiques, ne les persécuta point; il permit même à quelques familles Juives de s'établir dans ses Etats, & leur accorda des Synagogues.

Frèderic I. fit quelque fois fermer les Eglises Catholiques, par répresailles des persécutions que l'Electeur Palatin fit souffrir à ses Sujets Protestans; mais le libre exercice de Religion fut toûjours rendu aux Catholiques. Les Reformés essayerent de persécuter les Lutheriens dans le Brandebourg. Ils profiterent des dispositions où le Roi étoit en leur faveur, pour établir des Prêtres Réformés dans des Villages où il y en avoit eu de Lutheriens. Ce qui prouve bien que la Religion ne détruit pas les passions dans les hommes, & que les Gens d'Eglise, de quelque opinion qu'ils soyent, sont toûjours prêts à opprimer leurs adversaires, quand ils se croyent les plus forts.

Il eſt honteux à l'eſprit humain d'avouër qu'au commencement d'un Siécle auſſi éclairé que l'eſt le XVIII. toutes ſortes de ſuperſtitions ridicules ſe ſoient encore conſervées. Les gens raiſonnables, comme les eſprits foibles, croyent encore aux Revenans. Je ne ſai quelle tradition populaire portoit qu'un ſpectre blanc ſe faiſoit voir à Berlin, toutes les fois qu'une Prince de la Maiſon devoit mourir. Le feu Roi fit ſaiſir & punir un malheureux qui avoit joüé le Revenant; les eſprits rebutés d'une auſſi mauvaiſe réception ne ſe montrerent plus, & le Public fut déſabuſé.

En 1708. une femme qui avoit le malheur d'être vieille, fut brulée comme ſorciere. Ces ſuites barbares de l'ignorance affecterent vivement Thomaſius, ſavant Profeſſeur de Halle; il couvrit de ridicule les Juges & les procés de ſorcellerie, il ſoutint des Theſes publiques ſur les cauſes phyſiques & naturelles des choſes, & déclama ſi fort qu'on eut honte de continuer l'uſage de ces procés: & depuis lui le Sexe put vieillir & mourir en paix.

De tous les Savans qui ont illuſtré l'Allemagne, Leibnitz & Thomaſius rendirent les plus grands ſervices à l'eſprit humain, ils enſeignerent les routes par leſquelles la Raiſon doit ſe conduire pour parvenir à la verité. Ils combattirent les préjugés de toute eſpece, ils en appellerent dans tous leurs Ouvrages à l'analogie, & à l'experience, qui ſont les deux Béquilles avec leſquelles nous nous traînons dans la carriere du raiſonnement, & ils firent nombre de Diſciples.

Les Réformés devinrent plus pacifiques ſous le Régne de Fréderic Guillaume, & les querelles de Religion ceſſerent. Les Lutheriens profiterent de ce calme. Francke, Miniſtre de leur parti, établit par ſon induſtrie un College à Halle, où ſe formoient de jeunes Theologiens, & dont ſortirent dans la ſuite des eſſains de Prêtres, qui formerent une Secte de Lutheriens rigides, auxquels il ne manquoit que le Tombeau de Paris, & un Abbé Bécherand, pour gambader deſſus. Ce ſont des Janſeniſtes Proteſtans, qui ſe diſtinguent des autres par leurs rigidités myſtiques. Depuis parurent toutes ſortes de Quakers, les Zinzendorſiens, les Hychiliens, Sectes plus ridicules les unes

La Communauté des Biens, & l'égalité des Conditions. On dit même qu'ils usent également des femmes dans leurs Assemblées.

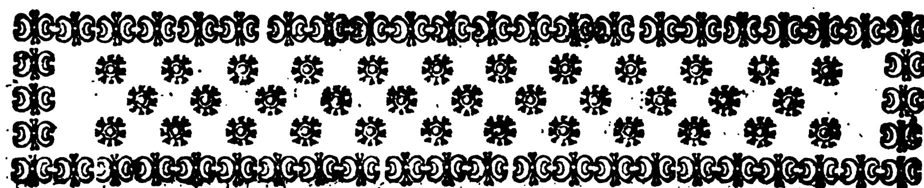
unes que les autres, qui, outrant les principes de la primitive Eglise, tomberent dans des abus criminels.

Toutes ces Sectes vivent ici en paix, & contribuënt également au bonheur de l'Etat, il n'y a aucune Religion qui sur le sujet de la Morale s'écarte beaucoup des autres; ainsi elles peuvent être toutes égales au Gouvernement, qui conséquemment laisse à un chacun la liberté d'aller au Ciel par quel chemin il lui plaît. Qu'il soit bon Citoyen, c'est tout ce qu'on lui demande.

Le faux zéle est un Tyran qui dépeuple les Provinces. La Tolérance est une tendre Mère qui les rend florissantes.



DIS-



DISSERTATION SUR L'ILE DE LA DÉESSE HERTHAM, OU ERDAMME, ET SUR LES ADORATEURS DE CETTE DIVINITÉ.

PAR M. ELSNER.

Traduit du Latin.



Nous avons vu dans un Mémoire précedent, * quelle étoit cette *Herthn*, la plus ancienne & la principale Déesse des Germains, décrite par Tacite; & nous avons donné un Commentaire étendu sur le passage de cet Auteur qui en parle, dans lequel nous avons expliqué tout l'appareil & toute la pompe des Cérémonies sacrées de cette Divinité.

* Voy. Année 1747. p. 446. & *suiv.*

Cet examen nous a fait voir en même tems, que Tacite n'a usé, à l'egard de cette Déesse & de son culte, d'aucune fiction accommodée à celles des Grecs ou des Romains, comme le prétend le célébre Mr. *Mascow*, dans sa belle *Histoire des anciens Germains*. Nous avons vû clairement au contraire, que tout le culte que Tacite attribüe aux Germains est l'ouvrage de la raison & de la nature, ou du moins qu'il à plutôt été emprunté des Orientaux & des Hebreux, une Tradition trés ancienne l'ayant transmis à la posterité la plus reculée.

Pour continuer à présent ce sujet, nous allons d'abord rechercher, quelle est cette Ile célébre par l'ancien culte rendu à *Hertha*, & sur laquelle les opinions des Savans ont été extrémement partagées. *C'est*, dit Tacite, *une Ile de l'Ocean, où se trouve un bois sacré, dans lequel ils adorent en commun Herthum*, Erdamm, *ou la Terre Mére*; Cette maniere si succinte de désigner ce lieu est également obscure & incertaine; & c'est ce qui a fourni un si vaste champ aux conjectures des Savans.

Il y a trois opinions principales sur cette Ile de l'Ocean, où se trouvoit le bois sacré, dans lequel Tacite place la demeure & le Temple de la Déesse *Erdamme*. La premiere entend par là une Ile de l'Ocean Septentrional, ou Germanique, dit vulgairement *Nord-See*, située à l'embouchure de l'Elbe, & connüe sous le nom d'Heiligeland; la seconde se détermine pour l'Ile de *Rügen*, adjacente à la Pomeranie Septentrionale, & la troisieme pour l'Ile de Zelande, où est la Capitale du Royaume de Dannemarc. Commençons par les deux dernieres, pour revenir en suite à la premiere.

Il n'y a pas longtems que M. *Albert George Schwartz*, Savant trés versé dans l'Histoire de sa Patrie, a cru devoir donner la préference à l'Ile de *Rügen*, & en a allegué les raisons dans un de ses Ouvrages. (*) Il prétend, que c'est dans cette Ile, & specialement dans sa Peninsule, nommée *Jasmund*, qu'est ce bois sacré, qui couvre tout son promontoire dans l'etendüe d'une mille ; qu'on apperçoit au milieu un rempart d'une hauteur immense, où existent de vastes débris, qui sont les masures du Temple de la Déesse Hertha; qu'à coté se trouve un grand lac, d'une extréme profondeur, qu'on nomme *noir*, à cause des poissons noirs qu'il renferme, & que les habitans venérent encore par une ancienne superstition; que du Temple il y a un chemin qui mene à ce lac, qui étoit le bain de la Déesse, & où l'on noyoit les esclaves : enfin qu'on rencontre aux environs divers chemins, qui vont aboutir à un Autel trés eloigné, d'où il paroit qu'on amenoit la Déesse au Temple & au Lac. Voilà les fonde-

(*) Il est intitulé : *Brevis Introductio in Geographiam borealis Germaniæ.* 1745. Voyez la page 88.

demens sur lesquels M. *Schwartz* appuye son sentiment, & qui lui font regarder l'Ile de Rügen, comme le lieu, auquel appartient préferablement à tous les autres, la gloire d'avoir été le domicile de la Déesse *Hertham*.

Quelque attention que nous ayons apporté à l'exposition de ces preuves, nous ne sommes pas assez pénétrans pour découvrir la demeure de la Déesse dans cet endroit, plutôt que dans un grand nombre d'autres, auxquels les mêmes caracteres conviennent. S'il suffit de rencontrer un bois, un grand lac, & quelques débris, avec un sentier, pour avoir trouvé le Temple de notre Divinité, il n'y aura presque point d'Ile, où nous ne fassions cette découverte; & je ne doute point qu'on n'apperçut les mêmes indices dans toutes les autres qui sont situees sur la côte de Poméranie. On sait que rien n'est plus commun, que de pareilles situations, surtout dans les lieux incultes; & par conséquent cela ne peut nous conduire à rien de certain sur le sejour de la Déesse.

Apres cela je ne vois pas ce qui empêcheroit, qu'il n'y eut dans l'Ile de Rügen quelque monument sacré plus recent, d'un Dieu, ou d'une Déesse des Slaves, qui ont occupé ces contrées au sixieme siécle. Ce peut même être quelque Château, qui servoit de retraitte à des brigands, à des Pirates. D'ailleurs les rochers, ou cailloux, qu'il prend pour des masures du Temple, annoncent un édifice sacré d'une moindre antiquité. Les Temples des anciens Germains, dont parle Tacite, n'etoient point faits de semblables materiaux, & n'avoient point une si vaste enceinte; c'étoit un *bocage*, ou *bois sacré*, comme le passage que nous expliquons, & tant d'autres du même Auteur en font foi; on plaçoit quelque fois une Tente au milieu, & on l'environnoit de simples Cabanes, à l'usage de la Déesse & de ses Prêtres, suivant la coutume des Germains. Le mot de *nemus* ne convient point pour désigner une forêt horrible, & d'une aussi grande étendüe que celle de l'Ile de Rügen; ce terme réveille une idée d'agrément, plutôt que de grandeur.

Les expressions mêmes de Tacite sont fort contraires à la pensée de M. *Schwartz*. *Il y a dans une Ile de l'Ocean un bois sacré.* Il ne

ne peut entendre par là que l'Ocean Septentrional, ou Germanique; qu'il désigne de même en plusieurs endroits de ce Livre. Il dit, par exemple, au Chap. I. *L'Ocean environne tout le reste*, c'est à dire, l'Allemagne. Et d'abord aprés : *Le Rhin se mêle à l'Ocean septentrional.* Au Chap. 37. il dit que *les Cimbres sont les plus proches de l'Ocean*, & ailleurs.* Le même Tacite appelle cette Mer *l'Ocean*, au Chap. 20. du second Livre de ses Annales; & on peut lui joindre *Ptolomée*, qui employe le nom *d'Ocean Germanique*, * aussi bien que *Marcien d'Heraclée* dans son *Periple*. †

* Liv. II. c. 11.

† p. 49. & 51. dans les *Geogr. Minor.* de *Hudson*.

Or l'Ile de *Rügen* est située sur la Mer Orientale, qu'on nomme aujourdhui *Baltique*. Elle est adjacente, & presque adherente à la Pomeranie, en sorte qu'elle paroit lui avoir été autrefois jointe; & par conséquent n'avoir pas été une Ile. C'est en vain que notre Savant se retranche sur ce que la Mer Baltique a aussi porté le nom d'Ocean, & que Tacite l'appelle ainsi dans ses Chapitres 43 & 44 des *Moeurs des Germains*. Car au Chap. 43 il s'exprime ainsi : *Protinus deinde ab Oceano* Rugü; ce qui ne favorise point l'idée de M. *Schwartz*; Tacite écarte au contraire les Rugiens de l'Ocean, & les considérant des Païs Bas, il les sépare entierement, *protinus*, c'est à dire, en suivant la route à droite par devant, de l'Ocean Germanique.

De plus les Rugiens ont autrefois habité, non seulement l'Ile qui porte leur nom, mais encore une partie du Duché de Mecklembourg, & de la Pomeranie Citérieure, comme notre savant Auteur l'a fait voir lui même, p. 8. Ainsi ils s'approchoient davantage de cet Ocean, comme Tacite l'a fort bien dit.

Quant au passage du Chapitre 44. Tacite y met *les Villes des Suions dans l'Ocean même*. Il s'agit de la Scandinavie, que l'Ocean Germanique & Septentrional baigne effectivement. Ainsi dans le passage même, qui fait le sujet de nos discussions, il ne peut avoir entendu par une *Ile de l'Ocean*, qu'une Ile qui ait été effectivement située dans cet Ocean.

La seconde opinion place le Sanctuaire d'*Hertham* dans l'Ile de *Sélande*, ou *Sialand*, en Dannemarc, où est, comme nous l'avons dit, la Capitale de ce Royaume. On peut regarder comme auteur de ce senti-

ſentiment *Etienne Jean Stephanius*, autre fois Profeſſeur célébre dans l'Academie de *Soroë* en Dannemarc. Il l'a propoſé dans ſes Notes ſur *Saxon le Grammairien*, où p. 74. il a mis la peinture de *Letbra*, la plus ancienne réſidence des Rois de Dannemarc, & Château trés fort avec la Vallée de la Déeſſe *Hertham*, vulgairement dite *Ertedall*. *Reſenius* a même ajouté le paſſage de Tacite dans ſon *Atlas de Dannemarc*, dont la plus grande partie des Exemplaires fut conſumée dans le terrible incendie de Copenhague.

Enfin la même choſe ſe trouve developée avec etenduë, dans le bel Ouvrage de M. *Jean Pierre Ancherſen*, Profeſſeur de Copenhague, intitulé *Origines Danicæ*. Dés l'entrée de la premiere Partie, il revendique la Déeſſe Hertham à la *Selande*, ou *Sialand*, il fait envisager ce ſentiment comme étant hors de toute conteſtation, & il y bâtit même l'edifice de ſes Origines Danoiſes.

Je ſuis cependant ſi éloigné de trouver de la certitude dans tout cela, que je n'y vois pas même un degré conſiderable de vraiſemblance. Il s'agit de la *Vallée d'Ertedall*; & Tacite ne parle d'aucune Vallée, il n'indique qu'un *bois ſacré*. Ce n'eſt point non plus une choſe indubitable qu'*Erte* denote ici la Déeſſe *Hertham*: ce peu être auſſi bien toute autre choſe, par exemple, le nom d'un Cerf qu'on appelle *Ert*, (*) ou *Hert*, ou bien celui de quelque Seigneur, ou Dame, qui ont autre fois poſſedé cette contrée, ſuivant l'uſage trés fréquent de donner aux Terres & biens de campagne des noms compoſés de celui des Vallées où ils ſont ſitués, & de celui de leurs Maîtres. C'eſt ainſi que nous avons dans la Marche *Joachimsthal*, Terre autrefois de l'Electeur *Joachim*, dont on pourroit faire tout auſſi aiſément une vallée d'Hertha, puiſqu'on y trouve en effet une vallée, une montagne aſſez elevée, une forêt trés ancienne, un lac, des ſentiers, &c. C'eſt la ſeule affinité du mot *Erte* avec *Hertha*, qui a déterminé ces ingénieux Auteurs à penſer à la Dèeſſe, dont parle Tacite;

(*) Il y auſſi dans le Golfe Baltique une Ile Danoiſe, nommée *Ertholm*, qui a tiré ce nom des Cerfs & de leur chaſſe, de même qu'un Château celebre, & Maiſon de plaiſance, dite *Hirſchholm*, ou colline des Cerfs. Il a pu en être de même de a vallée d'*Ertevall*.

cite ; tout comme dans nos contrées on s'amuse à faire venir le nom de *Reimsberg* de *Remus*, Frere de *Romulus*, celui d'*Aremberg* des Aigles Romaines, celui de *Stendal* de la base d'un trophée, celui de *Tristedt*, ou *Drustedt*, de *Drusus*. Ce sont des jeux d'esprit, mais il ne faut pas y chercher la verité.

Si pourtant, par un effet de cette liberalité ordinaire aux Savans, nous voulions accorder que cette vallée voisine de *Lethra* a tiré son nom de la Deesse Hertha, cela peut être venu de quelque ressemblance avec ce bois sacré, parce qu'on a eu coutume d'appeller les lieux agréables & élevés, *vallées* & *montagnes* de quelque Dieu, ou Deesse. C'est ainsi qu'on trouve aujourdhui par tout des *Vallées de Marie*, des *Monts de Marie*, des *Bois* & des *Lacs de Marie*, &c.

Enfin, quand même la Déesse Hertham auroit eu effectivement un lieu sacré à Lethra, il ne seroit pas nécessaire que ce fut ce Sanctuaire commun des Nations dont parle Tacite ; cette Divinité ayant pu être adorée en plusieurs lieux, surtout dans les derniers tems en conservant néanmoins sa premiere demeure, & son sejour le plus auguste dans une autre Ile ; comme nous trouvons dans les Auteurs qu'il y avoit plusieurs Temples de la Diane d'Ephese, ailleurs qu'à Ephese. Aussi M. *Schwartz* reconnoit-il en termes formels, dans l'endroit dejà cité, qu'on a rendu aussi un culte à Hertha dans d'autres lieux.

Tacite n'est pas moins contraire à M. *Aucbersen* qu'à M. *Schwartz*, en ce qu'il met le Sanctuaire de la Terre Mere *dans une Ile de l'Ocean*. Personne assurément n'appellera jamais la *Sélande* une Ile de l'Ocean, puisqu'elle est située dans la Mer Baltique, & même à son embouchure, & qu'elle est séparée par de petits détroits de diverses Iles voisines, & de la Scandie. M. *Aucbersen* veut à la verité que ce soient ces détroits que Tacite appelle des *fleuves* ; mais *Pomponius Mela* les nomme expressément *aquas interfluentes*, & *freta*. * Qui est-ce, je vous prie, qui pourroit dire d'une semblable Ile, située dans l'Archipel Danois, comme l'appelle notre Savant, que c'est une Ile de l'Ocean. Sans contredit les mots de Mer, ou Golfe Baltique, d'Archipel, & d'Ocean, sont tout à fait differens, sur tout pour Tacite dans ce Livre, où il entend

* Liv. III c. 3.

entend constamment par *Ocean*, l'Ocean *Septentrional* & *Germanique*. Nous ne croyons donc pas pouvoir adopter cette opinion, quoique nous laissions à ses Auteurs & à ses défenseurs la gloire de l'avoir soutenuë avec beaucoup d'esprit & de savoir.

Le troisieme sentiment, que nous avions indiqué le premier, donne & assigne à la Déesse *Hertham* une Ile de l'Ocean Germanique, située vers l'embouchure de l'Elbe, & vulgairement nommée *Heiligland*, *Hilligland*, & *Helgeland*. Cette Ile est située dans la Mer, à six milles de l'Elbe, & à pareille distance du Duché de Sleswick. Elle a été autre fois beaucoup plus grande qu'elle ne le paroit aujourdhui; les flots de l'Ocean en ont couvert la plus grande partie, de sorte que quand le vent d'Orient les repousse avec vehemence, il reparoit plus d'un mille d'etendüe de terrain. Elle passe aussi pour avoir été fort célébre par un Temple de *Vesta*, dite en langage vulgaire *Fosta*, qui s'y trouvoit avant l'Ere Chrêtienne. On la nommoit encore *Farria*, ou plutot *Pharia*, à cause de sa ressemblance avec l'Ile si connuë de *Pharos* en Egypte, ayant comme elle, sur une de ses Montagnes, *Bredeberg*, un fanal destiné à guider les navigateurs. Enfin la Tradition porte qu'elle a servi de retraitte à *Radbod*, Roi des Frisiens, qui aima mieux suivre ses Ancêtres dans la route de l'erreur, que de recevoir le S. Batême, & embrasser le Christianisme. * Divers Auteurs ont cru que c'etoit cette Ile qu'indique nôtre passage de Tacite; tels sont *Pontanus*, † *Petrus Saxius*, * & d'autres. Tout bien pesé, ce sentiment me paroit préferables aux autres, & je vais l'appuyer sur de nouvelles preuves.

L'Ile d' *Heiligland* a de la maniere la plus sensible tous les caracteres fournis par Tacite. C'est une Ile de cet Ocean Germanique, & Septentrional, que cet Auteur a coutume de nommer l'Ocean. Elle est en pleine Mer, & à six milles du Continent. Cet Ocean étoit connu dés ce tems là des Romains; on y avoit vû les flottes de Tibere & de Drusus, comme le témoignent Tacite, *Velleius Paterculus*, *Suetone*, & d'autres Auteurs. Au contraire, dans ce même tems, les flottes Romaines ne s'étoient pas avancées au delà du Promontoire Cimbrique, & par conséquent ne pouvoient avoir fait la découverte de

* Voy. *Dankwerth Descr Sleswick* p. 152.

† Dans ses *Origines Danica*.

* Dans son Livre *de præcipuis rebus gestis Frisiorum Septentrionalium*, qui a été inseré dans les *Monumenta Cimbrica* de l'illustre M. de *Westphal*, Tom. I. p. 1343

embouchure de la Mer Baltique, ou de l'Ile au Continent de Pomeranie.
dans l'Ocean, étoit regardée comme une , non seulement parce que ce morceau pour ainsi dire, au milieu du vaste Ocean, paroissoit admirable, mais aussi qu'on le jugeoit un domicile à la Déesse Hartham, Epouse de l'Ocean. par une Tradition de l'Antiquité la plus reculée tirent leur origine de l'Ocean & de Tethys. * & il le tenoit d'*Homere*, cette source de tou- *Orphée* dépose la même chose, & célébre l'Ocean Mere des Dieux. † *Platon* repete cette idée dans son & le Philosophe *Crates* l'inculque dans *Plutarque.* * à *Ovide* ; †

— Ad canam descendit in æquora Tethyn
Oceanumque senem, quorum reverentia movit
Sæpe Deos.

même *Tethys* se prend pour l'Ocean, suivant la remarque * Cette même *Tethys* étoit la Terre, τήθη, Nourrice des mortels, encore suivant les observations d'*Eustathe* & des *Scoliastes*, sur le même passage d'Homere. Ainsi la *Hertham*, ou *Erdamme*, étoit parfaitement la même que *Tethys* qu'on appelloit *Titre*, comme l'a fait voir au long l'ingenieux *Rudbeck*, que j'ai cité dans mon Mémoire précedent. C'est par là que cette Ile, sortant des flots de l'Ocean, parut merveilleusement propre à être la demeure de la Terre Mére, à cause de sa situation singuliere, qui faisoit que l'Ocean l'embrassoit plus etroitement, & de la même maniere qu'il ceint & embrasse toute la Terre; doctrine déja admirée dans Homere par *Hipparque*, comme *Strabon* le rapporte au commencement de son Livre, en y joignant son propre suffrage.

D'abord, cette Ile se trouve dans cet Ocean qu'on découvre du Rhin, où Tacite étoit placé; car ces Iles opposées aux Païs Bas, & à la Frise, que nous appellons Orientale, n'etoient pas encore détachées du

du Continent, & actuellement même elles en sont si proches qu'elles ne meritent pas le nom d'Iles de l'Ocean. Ce ne peut donc être que cette premiere Ile que Tacite a eu en vuë, & il n'est nullement vraisemblable que laissant là la principale Ile de l'Ocean Germanique, il ait été chercher des Iles qui en sont séparées par un aussi grand intervalle, savoir celles de Dannemarc, ou de Rügen, qui placées dans l'enceinte étroite du Golfe Baltique, & tout environnées des Terres voisines, ne sont, ni ne peuvent être appellées des *Iles de l'Ocean*.

L'Ile d'*Heiligland* satisfait également à tous les autres caracteres indiqués par Tacite. *Petrus Saxius* rapporte * qu'on y voit encore un bois ; & quand il ne s'y rencontreroit pas, personne n'auroit lieu de s'etonner qu'il ait disparu d'une Ile si souvent ravagée par les incursions des Ennemis, & en grande partie submergée sous les flots de l'Ocean.

* Dans l'endroit déjà cité.

Adam de Breme rapporte que cette Ile est toute bordée de rochers & d'ecueils, & qu'il n'y a qu'un seul endroit accessible : bienfait de la nature, qui la met à l'abri des Ennemis. De là vient que *Radbod* l'avoit choisie pour en faire sa retraitte, & y avoit outre cela bâti une forteresse sur une fort haute montagne.

Une Ile revêtuë de tous ces avantages meritoit bien d'etre le Sanctuaire de la principale Déesse des Germains. C'etoit en effet une coutume religieuse trés ancienne de placer les simulacres & les Temples des Dieux dans des lieux élevés, & fortifiés par la Nature, ou par l'Art. Quoique les Perses, aussi bien que les anciens Germains, détestassent les Edifices, & les Temples, destinés à renfermer les Dieux ; cependant ils avoient coutume d'offrir des victimes sur des montagnes trés élevées, où ils croyoient que les Dieux faisoient leur demeure, comme on en trouve des témoignages très abondans dans *Herodote*, & dans Xenophon. Il s'étoit aussi introduit une trés ancienne superstition parmi le peuple d'Israël, c'étoit celle de sacrifier sur les hauts lieux; & elle y avoit jetté de si profondes racines, que les ordres de Dieu les plus exprés, & les plus fréquemment reïterés, ne purent l'extirper. C'est par la même raison qu'une vieille opinion a assigné les lieux élevés pour demeure aux Dieux, comme moins assujettis à l'usage com-

mun, & plus inacceſſibles. De là vient enfin que les domiciles des Dieux étoient autant de bonnes fortereſſes, également propres à écarter les profanes & les ennemis, & qui laiſſoient à peine un paſſage fort étroit aux adorateurs.

Le Capitole, ce Temple ſi magnifique de Jupiter, & de toutes les autres Divinités des Romains, & qui étoit comme un autre Ciel, placé au ſommet de la haute roche Tarpeïenne, étoit un vrai Fort, inexpugnable même à de grandes armées, au jugement de notre propre Auteur. *

Il en étoit de même de l'Oracle de Delphes, qui étoit autrefois celui de la Terre Mére, comme le témoigne *Pauſanias*. † Il étoit placé dans la partie la plus haute de la Ville, qui alloit de tous cotés en pente roide & ceinte de rochers, de ſorte qu'on pouvoit difficilement arriver à ce lieu, & le forcer, comme les Gaulois, ſous la conduite de Brennus, l'éprouverent à leur dommage. *

Le *Palladium*, ce gage de l'Empire & du Salut de Troye, dont la vuë étoit interdite aux mortels, auſſi bien que celle de la Déeſſe *Hertham*, ſe conſervoit dans la Citadelle, d'où les Grecs l'enleverent par un crime atroce, que Virgile déteſte ainſi; †

Omnis ſpes Danaum & coepti fiducia belli
Palladis auxiliis ſemper ſtetit : impius ex quo
Tydides, ſed enim ſcelerumque inventor Ulyſſes,
Fatale aggreſſi ſacrato avellere templo,
Palladium cæſis ſummæ *cuſtodibus* arcis.

A' Athenes, Minerve, Déeſſe tutelaire de la Ville, reſidoit à *l'Acro-pole*, qui étoit le lieu le plus élevé, auquel on n'arrivoit que par une ſeule avenuë, bordée de toutes parts de rochers eſcarpés, & ceinte d'un fort mur. *

Enfin *Velleda*, cette Propheteſſe ſi célébre des Germains, qui a tenu le rang de Déeſſe, demeuroit dans une tour, ou au haut d'un rocher eſcarpé, comme Tacite nous l'apprend. En général la Terre Mére paſſoit pour aimer les pierres & les rochers; c'étoit ſes enfans & ſes os, ſuivant l'expreſſion d'*Ovide*. †

* Tacit. Hiſt. Lib. III. c. 78.
† Phocic. Cap. 5. p. 809.
* Ibid. cap. 8. p. 818. & cap. 23. p. 853.
† Æneid. Lib. II. v. 162.
* Pauſan. Att. c. 22. p. 51.
† Metam. Lib. I. v. 383.

Oſſa-

Ossaque post tergum magnæ jactate parentis,

un peu plus bas, * v. 393.

Magna parens terra est: lapides in corpore terræ
Ossa reor dici.

e là vient ce que Pausanias rapporte, que sa Statuë & son Thrône oient faits de pierre. Et n'avons-nous pas même vu dans le Méoire précedent, que la Mére des Dieux passoit pour être née d'un and rocher, sur lequel on avoit placé sa Statuë?

On avoit aussi consacré les lieux les plus élevés aux Dieux, & rtout aux Divinités tutelaires, comme à la Minerve d'Athenes, à Apollon de Delphes, afin que ces Divinités pussent étendre leurs reirds, veiller à la conservation de leurs adorateurs, & repousser les iaux qui pourroient les menacer. Les Dieux tutelaires portoient à iuse de cela les noms d'Επόψιοι, Σκοποὶ & Επίσκοποι, comme ant les yeux percans, & se tenant toujours à portée de secourir. [. *de Spanheim* a expliqué tout cela avec étenduë dans ses Notes sur *allimaque.* †

† In Hymnum ad Jovem v. 82.

Ainsi l'Ile d'*Heiligland*, qui étoit toute bordée d'ecueils, & où trouvoit une trés haute Montagne, étoit une trés digne demeure, n Sanctuaire trés convenable, de la Terre Mére, Déesse gardienne & itelaire, un lieu d'où elle pouvoit également exclurre les profanes & s ennemis, & veiller en même tems de toutes parts sur ceux qu'elle protégeoit. On peut joindre à cela cette Tradition qui porte que ans des tems moins éloignés, mais encore anterieurs au Christianisme, y a eu dans cette Ile un Temple de Vesta, dont la prononciation arbare de Frisiens avoit changé le nom en celui de *Fosta.* Or Vesta toit la même que la Terre Mére, ayant comme elle pour symbole un oyer construit de terre, où bruloit le feu qui lui étoit consacré; d'où ient encore le mot Allemand *Herd, foyer*, d'*Erde*, la *terre*, comme tant fait de terre, comme nous l'avons déjà remarqué dans notre preiier Mémoire. Pour la Deesse *Erdamm*, elle paroit avoir reçu le nom le Vesta, depuis que les Germains eurent appris que la Vesta des Romains étoit la même que leur Terre Mére; car alors, afin de ne pas

 parof-

paroître inferieurs aux Romains, & de pouvoir se vanter qu'ils adoroient la même Divinité, ils ajouterent le nom de Vesta au premier, ou l'y substituerent tout à fait. De cette maniere le lieu que les Germains avoient d'abord appellé la demeure d'*Hertham*, & veneré en cette qualité, devint dans la suite celle de Vesta.

Une nouvelle & considérable preuve de notre assertion se tire du nom de l'Ile, que les Germains, dés les tems les plus reculés, ont nommé *Heiligland*, *Hilligland*, & *Helgeland*; indice frappant que cette Ile de l'Ocean avoit été specialement & solemnellement consacrée au culte de la Déesse *Hertham*. *Heiligland* vent dire, *Terre*, ou *Contrée sainte*, sans doute à cause de la demeure de cette grande Divinité, & du bois sacré qu'elle y avoit. De semblables contrées, célébres par le domicile de quelques Dieux, ou Déesses, ont toujours porté le nom de saintes, *ἱεραί*. La Ville seule d'Athenes n'etoit pas sainte, à cause du séjour de Minerve, cela s'etendoit à toute l'Attique ; (*) & Aristophane l'appelle *ἱερωτάτη χώρα*. * De même Diane par sa présence rendoit sacrée & inviolable la Ville d'Ephese, & tout son territoire. Delos par une semblable raison étoit dite *ἱερὰ* & *ἁγιώτατη*, comme l'a prouvé M. de *Spanheim*, dans ses Remarques sur le commencement de l'Hymne de *Callimaque* sur Delos.

* In *Equi*. v. 578.

C'est seurtout à cause de cela que le nom de *sacrée* a été donné d'une façon singuliere à l'Ile de *Samothrace*, où la Mere des Dieux se plaisoit, y ayant placé ses fils les Corybantes, & dans laquelle on lui avoit consacré des Autels, & un bois, *τεμένος*, sacré & inviolable. † Tout cela fait assez voir qu'en vertu de cette ancienne & constante superstition, cette Ile a reçu à bon droit des Germains la nom d'*Heiligland*, à cause du séjour qu'y faisoit la Déesse *Erdamme*, laquelle étoit réputée la même que la Mere des Dieux, & résidoit dans ce bois sacré, d'où elle protégeoit ces anciens Germains, qui étoient nés d'elle, & les habitans des environs.

† *Diod. Si-* L. III. p. Edit.nov.

Le

(*) Ιερὰ μὲν τῆς Αθηνᾶς ἐςιν ἥτε ἄλλη πόλις, καὶ ἡ πᾶσα ὁμοίως γῆ. *Pausan.* L. I. c. 26. p. 63.

Le nom de cette Ile prononcé d'une autre maniere, nous découvre encore plus évidement celle dont Tacite a voulu parler. On a pu dire *Heiligland*, & il paroit que c'est ainsi qu'ont prononcé ces anciens Peuples Septentrionaux. D'abord cependant on disoit *Heilig*, *Hillig*, ou *Helgo-lund*, mais dans la suite le mot *land* s'etant introduit, & la coutume etant venüe de l'ajouter au nom de plusieurs contrées, on a changé *lund*, en *land* (*). Or dans les Langues Septentrionales un *bois*, une *forêt*, se nomment *Lund*, *Lundur*, comme on le trouve aussi dans le *Lexicon Islandique d'Hickesius*, que contient le *Thesaurus Septentrionalis*. La même signification a encore lieu en Suede & en Dannemarc. *Jean Loccenius* rapporte * ces paroles tirées des plus anciennes Loix : *Engin skal ä lunda euer steena tro*, c'est à dire, *personne ne doit se fier à un bois ou à un rocher*. C'est de cette ancienne langue qu'est resté un mot, dont nous nous servons encore, *Hollunder*, de *Hol* & *lund*, ou *lunder*, *un arbre*, ou *bois creux*. On dit aussi *bois* pour *forêt* ; les Germains & les Hollandois appellent une forêt, das Holtz, *Het Hout*. Le Dictionaire de notre défunt Confrére *Frisch* nomme *Lunden* une sorte particuliere de bois. *Hilliglund* seroit donc le bois consacré à la Déesse ; & les Peuples Septentrionaux ont plusieurs bois semblables, qu'ils appelloient *Hilgolundar*, ou *Lundar*. Le bois consacré à Odin auprés d'Upsal, portoit le nom d'*Odenslund*, au rapport de *Loccenius*. † Si donc notre Ile a été consacrée par les Nations Septentrionales à la Déesse, dont ils prétendoient tirer leur origine, ils auront nommé cette Ile dans leur Dialecte accoutumée *Hilgolund* ; nom que Tacite nous a rendu avec la derniere exactitude par *castum nemus*, & l'Ile de la Déesse *Erdamme*, située dans l'Ocean, & dite *Hilgolunde*, s'est conservée assez heureusement jusqu'à nos jours.

* *Antiq. Sueo-Gothic.* L. I. c. 3. p. 20.

† l. c. p. 18

Il s'agit présentement de parler des Peuples, qui rendoient un culte religieux à cette Divinité. Nous allons passer en revüe ceux que

(*) De même l'Ile capitale du Dannemarc, *Sialand*, a été dite autrefois *Saelundur*, *bois de la mer*, suivant le témoignage de *Stephanius*, dans ses notes sur *Sax. Gramm.* p. 20.

que Tacite indique, & répandre autant de jour sur eux, que le permet une matiere aussi abstruse, & éloignée de tant de siecles des tems où nous vivons.

Tacite nomme sept peuples Sueves, adorateurs de la Déesse, & les range dans l'ordre suivant. „Aprés (les Lombards) viennent les „Reudigniens, Avions, Anglois, Ovarins, Eudoses, Suardons, & „Nuithons, qui sont remparés par des forêts, ou par des fleuves. „Ceux-là n'ont rien de particulier, sinon qu'ils adorent la Terre, „comme nôtre Mére commune, qu'ils appellent *Herthe*, & croyent „qu'elle se promene par le Monde, & qu'elle se mêle des affaires des „hommes.“ (*). Voilà donc les noms des Peuples de la Germanie Septentrionale, issus, à ce qu'ils prétendoient, d'une origine commune; mais ces noms ont vieilli, on ne les connoit plus, la plupart ne se trouvent que dans Tacite, & n'existent même que dans ce passage. De plus, la négligence des Copistes, & les fautes qu'ils ont coutume de commettre, surtout à l'égard des mots étrangers, a defiguré ces noms, au point que les plus savans Interprêtes, partagés en mille opinions toutes differentes, n'ont pu s'en demêler, & ont au contraire épaissi les ténèbres dont ce passage est envelopé. Je vais essayer si je serai plus heureux à déterrer ces Peuples inconnus, & à les rendre reconnoissables par quelques caracteres certains.

D'abord, il est évident que ce sont des Peuples de la Germanie Septentrionale que Tacite a ici en vüe, & en particulier ceux qui habitoient la côte maritime; puisque la Déesse tutelaire de la Nation résidoit dans une Ile de l'Ocean Germanique Septentrional, comme nous l'avons vû ci-dessus. On ne sauroit avec raison trop éloigner de cette Ile *d'Helgeland*, ou *Helgelund*, des Peuples, qui dans certains tems marqués de l'année devoient venir y rendre un culte solemnel à la Déesse, des peuples des affaires desquels la Déesse devoit se mê-

les,

(*) *Reudigni deinde, & Aviones, & Angli, & Varini, & Eudoses, & Suardones, & Nuithones, fluminibus aut silvis muniuntur. Nec quicquam notabile in singulis, nisi quod in commune Herthum, id est, Terram matrem colunt, eamque intervenire rebus hominum, invehi populis arbitrantur.*

ler, & parmi lesquels elle se promenoit, suivant les expressions de Tacite. C'est donc dans le voisinage de la Déesse qu'il faut chercher ses adorateurs, ceux qui vivoient sous sa garde & sa protection, la révérant comme leur Mére & le principe de leur origine.

Ensuite, Tacite place ces Peuples *aprés les* Lombards, qui occupoient les regions interieures de la Germanie sur l'Elbe, & dit au Chap. XII. qu'ils s'etendoient encore plus avant dans le fonds de la Germanie, *qui in secretiora Germaniæ porriguntur.* Or il faut toujours se souvenir que c'est des Païs-Bas que Tacite regardoit la Germanie, & chercher par conséquent ces Peuples autour de l'embouchure de l'Elbe, où la Germanie va en quelque sorte en s'enfonçant, dans le Duché de Brême, dont la partie posterieure confine à l'Elbe, dans les Duchés de *Holstein* & de *Sleswick*, & dans le *Jutland.* Je pense au moins que c'est ainsi qu'en jugeront tous ceux qui examineront la chose d'une maniere attentive & impartiale. Je vais donc, en suivant Tacite, passer à l'examen des Noms de ces Peuples, & de leurs demeures.

'A la tête se présentent les REUDIGNIENS, ou comme d'autres lisent, les *Reudingiens*, les *Redigniens*, & ils tiennent aussi le premier rang en fait d'obscurité. *Cluvier* * & *Bucherius* † entendent par là les *Thuringiens*, ou *Deuringiens*, mais cette conjecture n'est appuyée sur rien ; car non seulement il y a une grande difference entre *Reudigniens*, & *Thuringiens*, (pour *Deuringiens*, personne ne se sert de ce nom,) mais il est aussi constant que les Thuringiens occupoient la partie interieure de la Germanie Australe ; au lieu que les Reudigniens doivent se trouver sur les bords de la Germanie Septentrionale, & que Tacite les place dans le voisinage d'une Ile de l'Ocean, & même à la gauche des Lombards. Le célébre Leibnitz, si habile & si heureux dans la découverte des choses les plus cachées, avoüe *qu'il ne connoit point* les Reudigniens.

* *Germ. Ant.* L. III. c. 27.

† Dans son *Belgium.*

M. *Ancbersen* * met les Reudigniens dans les Iles de Dannemarc, qui portent le nom de *Lolland*, *Falster* & *Moen*, mais sans donner la moindre preuve qu'elles ayent été autre fois habitées par un Peuple connu sous ce nom. Il ne fait cette supposition que pour soutenir

* *Orig. Dan.* Part. I. p. 195.

ſoutenir celle, par laquelle il donne l'Ile de Sialand pour la demeure de la Déeſſe *Hertham* ; & comme nous avons déjà détruit celle-ci, il ſeroit ſuperflu de nous arrêter à l'autre.

S'il n'y a pas une pleine évidence, il y a du moins une grande apparence de verité dans l'idée où je ſuis, que les Reudigniens ſont les KEIDINSIENS, dont la contrée eſt dans le Duché de Breme, ſur l'Elbe. C'eſt un Canton des plus anciens Saxons, dont les habitans s'appellent Kädinger, Kedinger, Kaidinger, und Keidinger. La grande reſſemblance entre les Lettres K & R rend le changement de l'une en l'autre trés facile. Soit donc qu'on liſe dans Tacite *Keidigni*, *Keidingi*, ou *Kedingi*, cela s'accordera aſſez avec mon ſyſtéme. La ſituation de l'Ile d'Helgeland, où étoit le Sanctuaire de la Déeſſe Erdamme, convient merveilleuſement à ce peuple ; & peut-être même les Keidingiens étoient-ils venus du Holſtein au lieu qu'ils habitoient, afin que les adorateurs de la Déeſſe occupaſſent l'une & l'autre rive de l'Elbe, dont le cours va aboutir à l'Ile, où réſidoit la Déeſſe.

Viennent enſuite dans Tacite les AVIONS, mot que Cluvier remarque * ne ſe trouver nulle part ailleurs, & qu'il conjecture, ſans aucun fondement, devoir être le même que celui de *Cavions*, dont *Mamertinus* fait mention dans le Panegyrique de Maximien. M. *Ancherſen* † derive le nom des *Avions* de la *Fionie*, Ile du Dannemarc ; en quoi il ſuit *Althamer*. La dérivaiſon paroit heureuſe, quand on ne fait attention qu'au ſon des mots ; mais elle enléve aux Avions la Lettre A, qui en eſt la tête, & M. *Ancherſen* n'eſt ſi ardent à ſaiſir cette idée, qu'à cauſe du voiſinage entre la Fionie, & ſa chere Sialand. Pour moi, je crois qu'il faut tirer le nom d'Avions de la nature & des proprietés du païs que ce Peuple habitoit. Les Allemans appellent *Auen*, *Awer*, *Auer*, les vallées, les plaines arroſées de ruiſſeaux, qui en font des prairies fertiles, & ils donnent le même nom à leurs habitans. Les mots *Au* & *Auen*, ſont ſeurtout d'un uſage extrémement fréquent dans les Duchés de Holſtein & de Sleswick, où on appelle ainſi & les fleuves, & les lieux qui les environnent, comme *Pinneberger au*, *Schodburger au*, *Coldinger au*, & quantité d'autres qu'on peut voir

* *Loc. cit.*

† *l. c.* p. 134.

voir dans *Dankwerth.* (*) Je mettrois donc les Avions dans les campagnes voisines de Hambourg, sur ce qu'on appelle les *quatre terres*, qui sont communes entre cette Ville & celle de Lubec, & qui s'etendent dans le Comté de Pinneberg jusqu'à l'Elbe. Les Avions peuvent avoir tiré leur nom de la nature de la contrée, *Auer*, à aussi bon droit que les *Bructeres* de leurs marais, *Brücher*, & les *Marses* de leur terre grasse & marécageuse, *Marsch* & *Masch*. Le nom le plus ancien de cette région unie, & abondante en ruisseaux, paroit avoir été *Auen*; car on sait que les noms de *Pinneberg* & de *Holstein*, usités aujourdhuy, sont récens. Si quelcun vouloit pourtant faire attention au fleuve *Hewer*, ou *Ewer*, qui est le plus considerable de cette contrée, on pourroit en tirer les *Evions*, & de là par le changement de l'E en A, les Avions, comme cela est arrivé aux noms, *Albis*, *Anglia*, *Aliso*, *Angria*, &c.

Les ANGLI sont des Peuples trés connus du Duché de Sleswick, qui s'etant associés aux Saxons dans le V. Siécle, passerent avec eux en Bretagne, & lui donnerent le nom d'*Angleterre*. L'ancienne *Anglia* étoit située entre les Saxons & les *Giotes*, dits vulgairement *Jutes*. Elle avoit pour Capitale la Ville qui en Saxon se nomme *Sleswick*, & en Danois *Haitby*. C'est que nous apprend *Leibnitz*, en se fondant sur l'autorité d'*Ethelred*, Roi des Anglo-Saxons. Il y a encore aujourdhui une contrée entre *Flensbourg* & *Slesvick*, qu'on appelle *Angeln*. * — * *Dankwerth.* cap. 10.

On met ordinairement les VARINI dans le Duché de Mecklembourg, auprés du fleuve *Varne*, dont ils doivent emprunter leur nom; mais de cette maniere on les éloigne trop, & la *Warne* semble plutot être ainsi dite des *Venedes*, qui ont aussi été appellés *Warne-Venedes*. Il est plus vraisemblable que ces *Varins* sont les habitans de la *Wagrie*, excellente contrée du Holstein; qui s'etant autrefois nommés *Wagri* & *Vairi*, ont été changés, en adoucissant la prononciation, en *Vari* & *Varini*.

Les

(*) Dans sa *Descr. Holst. & Slesw. Keysler* rapporte aussi plusiers noms de contrées de Villes, & de Villages, qui dérivent d'*au*, & *d'auem. Antiq. Septent.* p. 428.

[illegible] regardés comme un des Noms les plus [illegible] les relegue * dans la Pomeranie autour [illegible] propos, & sans la moindre apparence de ve[illegible], il avoüe son ignorance sans détour. Je [illegible] la derivaison tirée du fleuve remarquable *Eu*[illegible] autre fois *Eut*, *Eit*, suivant le témoignage de [illegible] est venu EUDONES, comme de *Teut*, TEU[illegible] veut dire, ceux qui habitent les bords de l'*Eudt*. [illegible] nous fournit encore aujourdhui la contrée d'*Eu*[illegible] habitans s'appellent Eidermänner, c'est à dire, *Eudons*. [illegible] il y a une grande contrée occupée par les *Ditmar*[illegible] même fleuve environne aussi du coté Oriental. Je croi[illegible] nom de *Ditmarsen* vient encore du même *Eudt*, ou *Eut*, [illegible] l'article prépositif des anciens Germains *de*, qui a fait [illegible] d'où par le changement fréquent d'*eut* en *it*, & par l'e[illegible] article *de*, à cause de la voyelle suivante, s'est formé *Dit*[illegible] *Marsch* signifie une région basse, marêcageuse, & grasse, où [illegible] voit point de hauteurs, dite vulgairement *Maschland*. On [illegible] dans le voisinage le distrit de *Wilstermarsch*.

Venons aux SUARDONS. *Spener* conjecture * que leur [illegible] vient de *Swerd*, & *Sward*, c'est à dire, des *larges épées* qu'ils [illegible], comme celui des *Saxons*, de leurs *courtes epées*. Cette [illegible] n'a pas la moindre ombre de vraisemblance. *Cluvier* croit que ce sont les mêmes que *Ptolomée* a nommés Φαροδηνὰς, qu'il change en σφαροδήνας, & les place auprés de Stettin en Pomeranie. M. [illegible] les renvoye plus loin, mais sans fondement, dans la partie Occidentale de la Scanie. J'entens ici par *Suardons*, les *Svandons*, habitans les plus anciens de la contrée de *Swanten*, ou *Svanteu*, dans le Duché de Sleswik, qui conservent encore aujourdhuy leur nom, & qu'on trouve souvent associés avec les *Angli*. Les Critiques n'ignorent pas que R se met quelque fois pour N. Il y a aussi dans le Holstein un fleuve, nommé *Swartow*, † dont les *Suardons* auroient pu recevoir

voir le nom; mais je soupçonne que le nom de ce fleuve est plus récent, & je préfere la premiere Etymologie.

Les derniers Peuples sont les NUITHONS, nom encore trés obscur, que *Conringius* a changé en celui de *Vitbons*, c'est à dire, *blancs*, pour les opposer aux *Svardons*, ou *noirs*. M. *Ancbersen* fait de grands efforts pour amener ici les Teutons, désignés sous le nom de THUITONS, & il prétend * que cette correction est la plus aisée du monde, puisqu'elle ne demande, que la changement trés simple de la Lettre N en T; changement d'ailleurs tout à fait nécessaire, puisque sans cela on auroit une extreme négligence à reprocher à Tacite, d'avoir omis le nom des *Teutons* dans sa Germanie. † Cet Auteur agit en tout cela conséquemment à l'hypothese, par laquelle il veut placer les THUITONS avec le Sanctuaire de Hertha dans la *Sialand;* & autour de cette *Sialand*, ou *Codanonie*, toutes les autres Nations rapportées ci dessus, dans le voisinage, & formant une espece de cercle. Cette correction lui plait infiniment, & il s'en applaudit un peu plus que de raison. Pour moi je dirai, avec la permission de cet habile homme, que je ne vois dans cette correction, ni la facilité, ni la verité, ni la nécessité qu'il y trouve. Je dis d'abord la facilité; car il ne s'agit pas, comme il le prétend, du changement d'une Lettre en une autre, mais d'une Lettre en deux; pour écrire THUITONES, il faut au lieu de N, inserer T & H. En second lieu la verité y manque; car Tacite appelle ces Peuples *Teutones*, & non *Thuitones*, au chap. 73. du IV. Livre de son *Histoire*, où il parle expréssément des *combats contre les Cimbres & les TEUTONS;* & tous les Auteurs écrivent de même, *Cesar*, *Pline*, *Pomponius Mela*, *Florus*, * & même les Grecs, *Ptolomée* & *Plutarque*. Qui est-ce donc qui se persuadera que Tacite ait voulu employer ici le nom nouveau & inusité de *Thuitones*, aprés s'être conformé ailleurs à l'usage reçu par tous les Auteurs. De ce qu'il a nommé, au premier Chapitre de la Germanie, l'Auteur de la Nation *Thuiston*, ou *Tuiscon*, on n'est pas en droit de conclurre qu'il ait dû écrire ici *Thuitons*, comme le veut M. *Ancbersen* †: car, comme on

* p. 152.

† p. 166.

* Lib. III. 37.

† p. 166.

vient

vient de le remarquer, leur vrai nom de *Teutons* étoit un mot très connu. Et d'ailleurs si leur nom devoit dériver de celui de leur Fondateur, ils devroient s'appeller *Tuistons*, ou *Tuiscons*, plutot que *Thuitons*. Mais de cette maniere, ce seroit moins désigner la posterité de *Tuiston*, qu'autant de *Tuistons* & de *Tuiscons*, Fondateurs de la Nation. Quant à la derniere difficulté de notre savant Auteur, savoir qu'il y auroit une négligence impardonnable de la part de Tacite, d'avoir oublié dans sa Germanie le nom des *Teutons*, ou *Thuitons*, cela n'est pas assez considerable pour autoriser une pareille correction. Ce n'etoit point au Chap. XL. que se trouvoit l'occasion de parler des Teutons; il y fait l'enumeration des sept Peuples des Sueves, il y décrit *partem Suevorum*, comme il le dit au Chap. XLI. Or les Teutons n'etoient point une partie des Sueves, encore moins la derniere, ou une espece d'appendice, comme Tacite a placé les *Nuitons*; ils étoient au contraire les premiers, & les plus grands Peuples de l'Allemagne, ceux qui tenoient immediatement à *Thuiston*, l'Auteur de la Nation. Aprés cela que M. *Ancbersen* voye lui-même de quel droit il mêle parmi les Sueves, & place à leur extremité, les Teutons, qui de son propre aveu sont les plus considerables Peuples de Germanie. Ensuite, si l'on admet la supposition qui place les Thuitons en Sialand, où ils habitoient, & avoient le Sanctuaire d'*Hertha*, & qui dispose les autres Peuples indiqués par Tacite, en forme de cercle autour de la Sialand & des Thuitons, comment Tacite a-t-il pu mettre au dernier rang les *Nuitons*, ou suivant l'hypothese *les Thuitons*, eux à qui le premier appartenoit, tant à cause de la dignité de la Nation, & du Sanctuaire d'Hertha, que par la situation même du lieu, qui en faisoit une espece de centre, qu'il auroit falu d'abord indiquer, pour passer de là à l'enumération des autres Peuples, qui en formoient la circonference. Pour ne pas ajouter, que malgré toute la peine que le savant *Ancbersen* a prise, il n'a point produit d'argumens suffisans pour établir que la *Codanonie*, & les *Teutons*, appartiennent uniquement à l'Ile de Sialand.

Je ne suis pas au reste fort surpris que le nom des Teutons ne

se

se trouve, ni dans ce Chapitre de Tacite, ni dans les suivans. Ce nom, aussi bien que celui des Cimbres, dont il avoit parlé ailleurs, * étoit devenu plus obscur de son tems, comme M. *Ancbersen* l'avoüe lui-même. Cependant Tacite, quoique sans les nommer, paroit avoir compris les Teutons, dans cette Germanie, dont il dit, *qu'elle revient par un grand détour au Septentrion*, (*) par où il entend non seulement la Chersonese Cimbrique, la Norwege & la Suede, qui revient se joindre au reste de l'Allemagne vers le Midi, en faisant effectivement un grand détour par la Finlande, la Livonie & la Prusse. C'est en vain que notre Savant veut restreindre cette Germanie, qui revient par un grand détour, à la seule Chersonese Cimbrique avec les Iles du Dannemarc. Le circuit de la Cimbrie ne merite pas le nom de grand; & l'on ne peut pas dire non plus, que la Germanie vienne se rejoindre de la sorte au reste de la Germanie, puisqu'aprés les Iles du Dannemarc, elle retourne plutot à la Mer Baltique, & va se terminer dans ses flots.

* c. 37.

Je trouverois donc un moyen plus facile & plus vrai de faire connoitre les *Nuitones* de Tacite; ce seroit de les changer en *Gutthones*, comme Pline les appelle, † en les joignant aussi aux *Varins*, dont Tacite a fait mention. Ce sont les mêmes que les GIOTHONES, JUTONES, *Juti*, *Jutæ*, ou *Vitæ*, comme *Beda* les a nommés. * Ils habitoient la même Chersonese, & s'etendoient jusqu'aux Cimbres, qu'ils comprirent à la fin dans leur nom. Ces *Gutthons* se sont changés bien aisément en *Nuitons*, car le G & l'N se mettent souvent l'un pour l'autre, comme les Latins substituënt leur N pour le Γ des Grecs; & l'I avant THONES devient sans peine un T. Ou bien, si vous omettez la premiere lettre N dans NUITHONES, vous aurez UITHONES, ou VITHONES, c'est à dire, les *Vitæ* de *Beda*. C'est de la même maniere qu'on dit *Frisii* & *Frisones*, *Santi* & *Santones*, *Swanti* & *Swantones*, &c. Cette explication est préférable par quantité d'endroits. En la recevant, les peuples indiqués par Tacite se trouvent placés de la maniere la plus

† *Hist. Nat.* L. IV. c. 38.

* *Hist. Eccl. Angl.* L. I. c. 15.

(*) *In Septentrionem ingenti flexu redit.* Cap. 35.

plus convenable dans le voisinage de l'Ile de l'Ocean, *Helgeland*, & ceignent en quelque sorte le Sanctuaire de la Déesse. Tacite dans sa description passe d'un peuple à l'autre à peu prés dans l'ordre, où chacun deux avoit fixé sa demeure; quoiqu'il ait pu arriver que quelcun de ces peuples se soit autrefois étendu plus loin.

Ces mêmes Peuples sont *remparés de fleuves & de forêts*, au rapport de Tacite ; & en effet les fleuves, les ruisseaux, les étangs, les lacs & les bois, sont trés fréquens dans ces contrées du Holstein, de Sleswick & de Jutland, & y servent encore à les défendre : les forêts surtout y étoient beaucoup plus abondantes dans ces anciens tems. Enfin toute l'etendüe de païs occupée par ces Peuples est comme à l'ecart, *secretà*, vers le Septentrion, & s'etend jusequ'à l'Ocean Septentrional ; situation, que chaque Carte Geographique peut mettre sous les yeux. Ce sont donc là visiblement les Peuples, desquels Tacite ajoute, au commencement du Chap. XLI. *pars Suevorum in secretiora Germaniæ porrigitur.* Tous les caracteres qu'il leur attribüe, conviennent aux Peuples, que nous avons proposés, & semblent les montrer au doit.

Ces Peuples, suivant le témoignage de Tacite, avoient un tems marqué dans l'année, auquel ils s'assembloient pour aller célébrer leur culte en commun dans une Ile de l'Ocean. Là ils adoroient *Hertham*, c'est à dire, la Terre Mére, *croyant qu'elle se méloit des affaires des hommes, & qu'elle se promenoit par le monde.* M. *Ancbersen* est encore ici d'un sentiment tout opposé, il pense que cette Déesse se rendoit chez ces Peuples, & qu'elle y venoit par mer. Voici ses propres termes. * „Il n'est pas raisonnable de croire que la Déesse Hertha ait fait un long chemin par terre avec ses Vaches, & quelle ait pu aller au delà d'un mille d'Allemagne, sans crainte de verser &c. „Ces raisons jointes à ce qu' Hertha avoit choisi une Ile pour demeure, & que l'expression, *invebi populis*, peut s'appliquer également à „un Vaisseau, & à un Char; ces raisons, dis je, donnent beaucoup de „vraisemblance à l'opinion que la Déesse alloit & revenoit le plus souvent par mer, & à la rame plutot qu'à la voile, pour courir d'autant moins de risques."

* p. 151.

Mais

Mais ces paroles répugnent en plusieurs manieres à la coutume trés ancienne de ces Peuples, & au récit de Tacite. Les Peuples de la plus haute antiquité, qui étoient attachés au culte du même Dieu, ou de la même Déesse, & lui rendoient un culte commun, alloient s'en aquitter au sejour & dans le Temple de la Divinité; ce n'étoit point les Dieux, qui venoient trouver les Peuples, & parcourir leurs païs; beaucoup moins passoient-ils les Mers, & s'embarquoient-ils pour de longs voyages chez leurs Adorateurs. Il est plus conforme à la raison que les inferieurs aillent chez leurs Superieurs, les hommes chez les Dieux immortels, comme ils les appelloient, & que des Nations unies par une Alliance commune eussent un lieu fixe, où elles vaquassent en commun à leurs Cérémonies religieuses. C'est ainsi que celles d'Ionie avoient pour lieu commun *Mycale*, dite à cause de cela, Πανιώνιον, où *Herodote* * nous apprend que les Ioniens se rendoient de toutes leurs Villes à un tems marqué pour célébrer un culte commun. Les Peuples de la Grece, surtout les Atheniens, & même les Hyperboréens, avoient pareillement coutume d'envoyer tous les ans des députations à l'Ile de Delos, pour y faire des sacrifices en leur nom, comme M. *de Spanheim* l'a fait voir avec une riche érudition. † Tous ces peuples semblent avoir imité les Israëlites, qui dans leurs Fêtes solemnelles quittoient les Villes & la Campagne, pour se rendre à ce Temple commun & unique de toute la Nation, qui étoit à Jerusalem, suivant l'obligation expresse que leur en imposoit la Loi Divine. Mais pourquoi vais-je chercher bien loin les exemples de cette coutume? Tacite lui-même l'attribüe aux *Sueves*, dits *Semnons*, dans ce passage formel du Chapitre XXXIX. „La fidelité est confirmée „par d'anciennes pratiques de Religion. Dans un tems marqué tous „les Peuples qui sont du même sang se rassemblent par Députés, (les „Grecs nomment ces députations Θεωρίας,) dans une forêt consa„crée par les augures de leurs péres, & par une ancienne frayeur, & „aprés avoir publiquement égorgé un homme, commencent ainsi la „celebration de leurs barbares rites.“

* L. I. c. 148.

† Ad Callimachi Hymnum in Delum, p. 279.

J'estime que ces exemples suffisent pour détruire entierement la pensée de M. *Auchersen*, sur les voyages de la Déesse *Hertham*

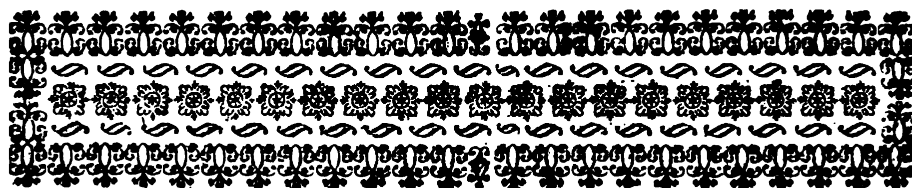
chez

chez les Peuples qui l'adoroient, & pour faire voir que ces Nations Sueves qui ont été indiquées, suivoient plutot la coutume universelle des Nations, dictée par la raison même, en se rendant à certains tems marqués dans l'Ile sacrée, où résidoit la Divinité.

Enfin Tacite est entierement contraire au Voyage par mer, que notre Savant croit avoir été fait par la Déesse, pour aller visiter ses Peuples. L'expression, *invehi populis*, & le *vehiculum* de la Déesse dont il parle aussi-tot aprés, peuvent-ils réveiller à quelcun l'idée d'une navigation, & persuader que c'etoit sur un *vaisseau*, que la Déesse faisoit son voyage. *Le Sacrificateur*, continüe Tacite, *suivoit avec beaucoup de vénération la Déesse traînée par des vaches*. Peut-on entendre ces paroles que d'un chemin par terre, & le Sacrificateur pouvoit-il suivre autrement qu'à pied un char traîné par des Vaches? Quant à ce que M. *Ancbersen* ajoute des *risques de verser*, on ne sauroit s'y arrêter, dés qu'on sait que la route de la Déesse étoit tracée d'avance, qu'elle étoit censée conduire elle même le char, & qu'il arrivoit fréquemment dans les pompes, que les simulacres des Dieux faisoient de longues routes sur leurs chars, sans qu'il y ait d'exemple que ces chars ayent versé; tant leurs religieux conducteurs y apportoient de précautions.

Voici comment j'estime que toute la Cérémonie se passoit. Dans un tems marqué de l'année, les Peuples nommés par Tacite envoyoient des Députations sacrées à l'Ile d'Helgeland, ou d'Helgelund, Sanctuaire de la Déesse Hertha, pour y adorer au nom de tous ces Peuples cette Divinité, qu'ils regardoient comme leur Mére, & la source auguste de leur origine. La Déesse, pour témoigner que ce culte lui étoit agréable, sortoit de chez elle en pompe sur son char, pour aller visiter les Députés de chaque Peuple, & les honorer de sa présence; *adventu, hospitioque dignata est*, dit Tacite. Elle étoit reçuë par tout avec les plus grandes démonstrations de joye, & au bruit des acclamations; on faisoit des Jeux & des Danses sacrées. Pendant ce tems là, ni les Députés, ni les Peuples qui les envoyoient, ne pouvoient prendre les armes, ni se mêler d'aucune guerre; il n'y avoit que paix & tranquillité, comme Tacite nous l'apprend, & comme nous l'avons suffisamment prouvé dans notre premier Mémoire.

RE-



RECHERCHES SUR L'ABROGATION DU DROIT D'ELIRE UN ROI DES ROMAINS, FAUSSEMENT IMPUTÉ À L'EMPEREUR HENRI VI.

PAR M. LE COMTE DE KEYSERLING.

Traduit du Latin.

I.



Il passe aujourdhui pour certain parmi les Savans, que l'Empereur Henri VI. s'est occupé pendant son Régne à rendre héréditaire pour sa posterité l'Empire, qui dépendoit de la libre élection des Princes. Cette opinion a même eu tant de force au jugement de M. *Gundling*, qu'il n'a pas balancé d'en inferer * que la puissance d'elire les Empereurs, appartenoit dés ce tems-là aux Electeurs. Et *Meibomius*, dans son Apologie pour Otton IV. † l'a soutenu avec autant de chaleur, que si la cause d'Otton qu'il défend, ou le salut de la République, eussent dépendu de cette créance.

* *Gundlingian.* P. XVII. p. 169.

† *Rer Germ.* Tom. III.

II. L'un & l'autre de ces Auteurs s'appuyent sur le Compilateur de la grande Chronique Belgique, qui a cité un certain Moine *Jean Gobelinus Persona*, & la Chronique de Halberstadt. Pour répandre du jour sur ce fait, & faire voir s'il doit être regardé comme certain, ou dou-

douteux, il sera nécessaire d'examiner avec attention le degré de foi que méritent les Témoins allegués, & leurs témoignages. Mais avant que de nous mettre à cet examen, rapportons les témoignages mémes.

III. Voici ce que nous lisons dans la grande Chronique Belgique. * „Cet Empereur Henri, voyant que l'Empire d'Allemagne avoit „souffert plusieurs maux, de même qu'autrefois l'Empire Romain, à „cause des fréquens changemens d'Empereurs, avant que les suffrages „des Princes se réünissent pour une nouvelle Election, il ordonna qu'il „ne se feroit plus à l'avenir d'Election, mais que l'Empire seroit dévolu par la seule succession du sang, en sorte que celui qui se trouveroit le „plus proche parent de l'Empereur défunt, parviendroit à cette dignité par droit héréditaire. Et pour commencer par son fils Fréderic, „qu'il avoit eu de sa femme Constance, Henri réünit à l'Empire Romain le Royaume de Sicile & de Calabre, le Duché de la Pouïlle, & „la Principauté de Capoüe, que son Fils tenoit héréditairement de ses „Ancêtres, afin qu'il devint Seigneur unique & perpetuel de tous „ces Etats. Il ordonna aussi que les Femmes succederoient au défaut „des Mâles, & que l'Empereur ne prétendroit plus à l'avenir aux droits „de main morte sur les biens des Ecclesiastiques. Cette Constitution, „qui auroit été si utile, fut approuvée par la Cour de Rome, & par „LII. Princes, qui avoient coutume d'elire, & qui apposerent leurs „Sceaux aux Lettres Patentes qui en furent dressées."

* Ap. *Pistorium in Scriptor.* VI. d. 203.

IV. Le recit de *Gobelinus Persona* † est conçu en ces termes. „Henri fit un accord avec les Princes de l'Empire, que ses Enfans lui „succederoient par droit hereditaire, mais les Princes de Saxe s'y opposérent. A cause dequoi l'Empereur dégagea lui-même ces Princes „de leur promesse, & du serment qu'ils avoient prêté dans cette „occasion."

† Ap. *Meibom*, Tom. I. *Rer. Germ.* p. 275.

V. Passons à la Chronique de Halberstadt. * „Conrad Archevêque de Mayence avoit conspiré avec les Princes de Saxe contre „l'Empereur Henri VI. parce qu'il leur avoit demandé que la Succession de l'Empire passât à ses heritiers. On venoit d'elire alors pour „Evêque d'Halberstadt Gardolffe, dont l'ordination fut differée de „quel-

* Ap. *Leibnit. Script. Brunsw.* Tom. II. p. 138.

„quelque tems à cause de cette affaire. Mais ce même Gardolffe ar„rêta le messager qui portoit aux Princes les Lettres de la conjuration, „& intercepta ces Lettres. Les ayant ensuite communiquées à l'Em„pereur, ce Prince, en homme sage & prudent, se désista de la de„mande qu'il avoit faite.

VI. Si nous faisons attention au tems où a vêcu le Compilateur de la Chronique Belgique, il est constant qu'il étoit contemporain de Charles le Hardi, Duc de Bourgogne. Car à la fin de cette Chronique il parle du Siége de Nuis formé par ce Prince, comme y ayant assisté ; „Le bruit des Bombes, dit il, * retentissoit dans l'air avec „un tel fracas, qu'à peine pouvois-je le soutenir, en me bouchant les „oreilles.“ Or ce Siege tombant sur l'année 1447. comme le témoigne *Pontus Heuterus*, † il en résulte que notre Chroniqueur florissoit vers la fin du XV. Siecle. Mais l'Empereur Henri VI. n'ayant poussé son Régne que jusqu'à l'an 1197. il en résulte clairement qu'il y a un intervalle de prés de trois Siecles entre le tems où Henri a régné, & celui auquel le Compilateur a écrit sa Chronique Belgique. C'est ce qui fait que je suis surpris qu'on ajoute foi à cet Ecrivain sur des choses si éloignées de son tems. Il est vrai qu'il en appelle à l'autorité d'un certain Moine *Jean* ; mais sans dire, ni si ce Moine étoit un Auteur contemporain, ni où ses Ecrits existent, & peuvent se lire.

* l. c. p. 420.

† *Rerum Burg.* L. V. c. X. p. 138.

VII. *D'Acheri* a inseré dans son *Spicilegium* * quelques Ecrits d'un Moine *Jean*, Ecrivain du XII. Siecle ; mais leur contenu ne s'etend pas jusqu'au tems d'Henri VI. Il y aussi dans *Muratori* † une *Chronique de Vulturne* par un Moine *Jean*, mais elle n'embrasse que depuis DCCIII. jusqu'à MLXXI. & par conséquent ne va point jusqu'à Henri VI. Et dans les fragmens qu'on y a ajoutés, il ne se trouve pareillement rien qui ait du rapport à ce que le Compilateur de la Chronique Belgique nous dit d'Henri VI. *Gundling* prétend * que ce *Jean* étoit un Moine de S. Vincent, & Auteur contemporain. Mais puisque *Jean Vincentius*, Moine de l'ordre des Prédicateurs, dont *Leibnitz* fait mention, n'a aucun caractere qui puisse faire croire que c'est celui dont il s'agit ici ; & que d'un autre coté *Jean*, Moine de

* Tom. III. p. 234.

† *Scriptor. Rer. Italic.* Tom I. P. 2. p. 325.

* *l. cit.*

de *S. Vincent*, prés de la source du Vulturne en Campanie, n'a fleuri qu'aprés le milieu du XV. Siécle, sans que parmi tous les autres Compilateurs de vieux monumens il existe, que je sache, un autre Moine *Jean*, ni que *Gundling* ait pu montrer aucune trace, ou vestige de cet Auteur, & du passage qu'on cherche; il est evident que cet Ecrivain & son témoignage sont ensévelis dans une profonde obscurité, & qu'ainsi il est tout à fait douteux, s'il est digne qu'on y ajoute la moindre foi. A' quoi je pourrois ajouter que les vrais Ecrivains de ce tems-là, comme *Conrad d'Ursperg*, *Arnold de Lubec*, *Otton de S. Blaise*, n'ont point entrelacé cette circonstance dans le fil de leur histoire.

VIII. Quant au fonds même du témoignage, il s'y trouve plusieurs choses, qui sont entierement éloignées de la Verité. Premierement, ce qui est dit, que l'Empereur ordonna qu'on ne feroit plus d'Election, mais que l'Empire écheoiroit par la seule succession du sang: au lieu que les Auteurs contemporains, déjà nommés plus d'une fois, déclarent positivement, qu' Henri prit soin de faire élire son Fils par les Grands du Royaume, & qu'il reçut d'eux les Lettres nécessaires pour donner de la validité à cet acte. Ces Lettres ont dû contenir l'abrogation des Elections pour l'avenir, ou non. Si elles l'ont contenüe, il est incroyable que les Ecrivains qui ont parlé de ces Lettres, ayent passé sous silence un changement aussi considerable, & il ne l'est pas moins que l'Empereur ait demandé aux Princes un semblable acte, qui leur mettoit tout à la fois sous les yeux le Droit d'Election dont ils avoient joüi, avec l'exercice qu'ils en avoient fait, & l'abrogation de ce même droit. Si ces Lettres n'ont rien exprimé sur ce sujet, la fausseté du témoignage que nous attaquons, est démontrée.

IX. Ce que le Pape Innocent III. dit dans sa *déliberation sur le fait des trois elûs à l'Empire*, s'accorde avec notre raisonnement. „Depuis cependant, dit-il, * son Pére, (Henri Pére de Frèderic) „s'appercevant qu'il avoit fait une fausse démarche, dégagea les Prin„ces de leur serment, & leur rendit les Lettres d'Election; mais en„suite

* *Epist.* Tom. I. p. 697.

„suite les mêmes Princes l'elurent, quoiqu'à peine sorti de l'enfance, „en l'absence de son Pere, de leur propre mouvement, & d'une ma-„niere unanime." Assurément si Henri, outre l'election de son fils, s'e-toit proposé l'introduction d'un Droit purement héréditaire, ce Pontife extremement acharné contre tous les Empereurs de cette famille, ne l'auroit pas épargné là dessus, & lui auroit amérement reproché cet attentat aux Droits & à la Liberté de l'Empire. Ainsi ne l'ayant pas fait, cela prouve assez que cette prétendüe entreprise étoit une chose inconnüe dans ce tems-là.

X. Il y a à la verité un passage dans la Lettre d'Innocent, * qui pourroit faire soupconner Henri d'avoir fait quelques tentatives contre la liberté des Elections. Il est conçu en ces termes. „Ils avan-„çoient aussi que ce qui ne faisoit pas peu contre lui, c'est qu'il s'ef-„forçoit d'usurper le Royaume par un droit héréditaire contre la li-„berté de l'Empire. D'où arriveroit que, si comme autrefois le frere „avoit succedé au pére, le frére présentement succedoit au frere, la „liberté des Princes seroit détruite, puisqu'il parviendroit à la Cou-„ronne, non par leur élection, mais plutot par succession.

* Ibid. p. 695.

XI. Mais cette difficulté est aisée à résoudre, si l'on fait les remarques suivantes ;

1. Que cette Lettre ne traitte que de la controverse qui étoit agitée entre Philippe, & Othon, & par conséquent qu'elle n'a aucun rapport aux fausses imputations, dont Henri a été chargé.

2. Que le Pape rapportant simplement les Objections faites contre Philippe par le parti contraire, ce n'est point là où il faut chercher la verité des faits, dont un ennemi ne se met pas ordinairement fort en peine.

3. Que l'Objection rapportée contient plutot l'interprétation fournie par les ennemis de Philippe, que les faits réels : car le Pape parle de la crainte, vraye ou feinte, qu'ils avoient conçüe que l'Empire ne demeurât dans la Famille de Stauffen ; & il ne dit point que la raison en fut prise de l'abolition du Droit d'Election : on ne crai-

gnoit que cette continuation de l'Empire dans la même Famille, qui ne pouvoit s'accorder avec la liberté d'election.

4. Que ces mêmes adversaires de Philippe n'ont point allegué l'action de l'Empereur Henri, telle qu'on la lui attribuë ordinairement, quoique les raisons de leur crainte eussent paru beaucoup plus considerables & plus solides, s'ils avoient été en état de produire quelque entreprise déjà formée contre la liberté.

XII. A tout cela on peut ajouter les paroles suivantes, qui se lisent dans les *Gestes d'Innocent III.* * „Depuis donc que l'Empereur „Henri eut acquis la possession du Royaume de Sicile tout entier, „aprés l'avoir dépouïllé de l'or, de l'argent & des pierres précieuses „qui s'y trouvoient, il revint en Allemagne avec un grand triomphe, „& obtint des Princes, qu'ils élussent pour Roi des Romains son fils „Frèderic, enfant de deux ans, & qui n'avoit pas encore été bâtisé, „& quils lui prêtassent serment de fidelité ; & parmi ces Princes, Phi„lippe dont on a parlé ci-dessus, prêta aussi le même serment." On voit par ces paroles, que l'Auteur d'où elles sont tirées n'a pas eu dessein de dépeindre la conduite de Henri du beau coté, mais qu'il a plutôt cherché à lui attirer la haine & le blâme, en disant que cet Empereur avoit pillé la Sicile, & avoit fait élire son fils Fréderic, avant même qu'il fut baptisé. Si donc ce même Empereur avoit travaillé à détruire la liberté des elections pour y substituër le droit héréditaire; assurément un Ecrivain devoüé à la Cour de Rome n'auroit pas laissé échaper cette occasion de le noircir. Car cet attentat pouvoit le rendre beaucoup plus odieux que les dépouïlles qu'il avoit emportées de la Sicile; ses prédecesseurs dans l'Empire d'Allemagne rendoient cette derniere action en quelque sorte legitime, l'ayant autorisée par leur exemple, au lieu qu'il n'y avoit point d'exemple du dessein de rendre l'Empire patrimonial, & de faire elire comme Successeur à l'Empire un enfant, qui n'avoit pas encore reçu le S. Bâteme.

* *Epist.* Tom. I. C. XIX. p. 5.

XIII. Une seconde chose qui se présente à remarquer contre la foi düe au temoignage, que nous avons tire de la Chronique Belgique; c'est ce qu'elle avance, que l'Empereur Henri, pour arriver plus aisement à ses fins, unit à l'Empire Romain le Royaume de Sicile & de Calabre, le Duché

ché de la Poüille, & la Principauté de Capoüe, qni avoient été transmis à son Fils par ses Ancêtres. Si pareille chose étoit arrivée, pourquoi, je vous prie, ne demeureroit-il pas le moindre vestige d'une union aussi memorable ? Pourquoi tous les Ecrivains auroient-ils gardé là dessus le silence le plus profond ? Pourquoi le Pape, dans l'Ecrit que nous avons déjà cité, * en parlant de l'union du Royaume de Sicile, dont il prétendoit avoir le Domaine Souverain, & de la confusion qui en résulteroit entre l'Eglise & l'Empire, auroit-il proposé cet évenement comme une chose à craindre, à cause de l'accord fait entre les Princes de l'Empire à ce sujet, & n'auroit pas plutot fondé ses craintes sur la seule promotion de Frèderic, si elle avoit déjà existé ? Ignoroit-il la grande difference qu'il y a entre des choses déjà réellement passées, & celles qui n'ont qu'une possibilité à venir ? Il est au contraire de la derniere vraisemblance, que si cette union avoit été mise sur le tapis par Henri, pour faciliter à son Fils l'acquisition du droit héréditaire à l'Empire, le Pape ne se seroit pas tû sur une pareille chose.

* p. 698.

XIV. Passons en troisieme lieu au droit de succeder, accordé aux femmes, au défaut des Mâles, & au droit de depoüilles, dont la Chronique Belgique fait mention, depuis ces mots, *Il ordonna aussi*, &c. jusqu'à la fin du passage cité. On y voit manifestement, que l'extension du droit de succeder aux Fiefs, accordé au sexe feminin, & le renoncement aux droits de main morte sur les biens Ecclesiastiques en Italie & en Allemagne, devoient être des choses dont la connoissance étoit universellement répanduë dans ce tems-là, puisqu'on prétend que la Cour de Rome, & LII. Princes avoient accordé leur consentement à cette Constitution, dont l'Allemagne auroit retiré de grands avantages. Je sais bien que le silence d'un, ou de deux Ecrivains, ne donnent pas le droit de conclurre contre l'existence d'une chose, dont il y auroit d'autres preuves. Mais il s'agit du silence universel de tous les Historiens de ce tems-là, tant d'Italie que d'Allemagne, qui n'ont fait aucune mention d'une chose cependant si importante, & qui doit s'être passée de la maniere la plus publique. On

ne

ne produit qu'une narration faite au bout de prés de trois Siecles, & appuyée sur l'autorité de je nesçai quel Moine *Jean*, dont la personne & les ouvrages sont tout à fait inconnus. C'est donc à bon droit qu'une telle narration est suspecte.

XV. Voyons aussi un peu, comment cette rélation s'accorde avec les expressions qui se trouvent dans les Lettres des Princes, qui élurent Otton IV. pour Empereur, aprés la mort de Henri. Voici ce qu'on y lit, * Lettre IX. „Il s'est aussi libéralement désisté en faveur „de nous & des autres Evêques de la mauvaise coutume qu'avoient les „Empereurs précedens de s'emparer de tous les biens meubles, qui se „trouvoient au decés des Evêques & Abbés Princes.“ Et dans la Lettre X. „De plus détruisant entiérement la mauvaise coutume „qu'avoient conservée jusqu'à présent ses Prédecesseurs à l'Empire, de „s'emparer des biens meubles, qui se trouvoient au decés des Evêques & „Abbés Princes, il nous a delivrés, nous Princes Ecclesiastiques, avec une „benéficence Royale, de cette injuste véxation, & a libéralement statué que „les biens de ceux qui décederoient, passeroient à leurs heritiers. Nous „avons donc cru devoir supplier Votre paternité, comme nous fondant „sur la fidelité & le devouëment de notre Seigneur Roi &c.

* *Epist. Innocent. III.* Tom. I. p. 689.

XVI. Ces passages nous enseignent ouvertement, 1. qu' Otton est le premier, qui ait renoncé à ce droit de dépouïlles, puisqu'on y dit que cette mauvaise coutume avoit subsisté jusqu'à son tems.

2. Que cette renonciation lui étoit imputée comme un merite tout à fait nouveau, auquel le Pontife est supplié d'avoir égard, comme à une preuve marquée de la fidelité & du devouëment d'Otton.

S'il étoit vrai, comme le prétend la Chronique Belgique, que Henri VI. eut déjà reglé que le droit de dépouïlles ne s'exigeroit plus à l'avenir, assurément, on ne sauroit concevoir, comment les Lettres qui viennent d'être alleguées, peuvent porter, que cette mauvaise coutume avoit duré jusqu'au tems d'Otton IV. & que c'étoit lui qui l'avoit enfin détruite. On dira peut-être que le renoncement à ce droit peut être également attribué à Henri & à Otton, de maniere que le premier en ait fait la déclaration, mais sans l'executer, ce qui aura

aura fourni au fecond l'occafion de proceder réellement à cette renonciation. Mais alors nous demandons, comment cette ordonnance de l'Empereur Henri, les raifons qui l'engagerent à la faire, & celles qui en empêcherent l'execution, ont échapé aux Ecrivains de ce tems, qui n'étoient pas moins revêtus de la qualité de témoins oculaires, que ceux du tems d'Otton? Pourquoi les Archives de la Cour de Rome, ni celles de l'Empire, n'en ont-elles pas confervé la moindre mémoire, puisqu'on prétend que ces chofes ont été réglées du confentement commun de ces deux Cours, & que la connoiffance s'en eft répanduë dans le Public? Le Clergé ordinairement fi attentif à tous les Droits & Benefices qu'on lui accorde, auroit-il pu mettre en oubli une chofe qui lui procuroit de fi grands avantages, en forte qu'un Moine Jean, caché dans une profonde obfcurité, foit le feul qui en ait parlé? Pourquoi l'Archevêque de Cologne, & les Princes, dans les Lettres que nous avons alleguées, ne difent-ils pas un mot de la renonciation de Henri, fe bornant à citer celle d'Otton, comme une preuve finguliere de fa fidelité & de fon devoüement. Affurément, fi Henri avoit fait une pareille renonciation, nous trouverions bien un autre nombre d'Ecrits, ou d'Actes de ces tems là, & des fuivans, que ceux dont la Chronique Belgique fait mention. Nous fommes donc obligés d'avoüer que le paffage de cette Chronique que nous avons rapporté, nous eft encore fort fufpect par cet endroit là.

Toutes les particularités rapportées par le Moine Jean, étant donc telles qu'on ne peut les accorder avec celles que nous ont tranfmifes les Ecrivains les plus dignes de foi de ce tems-là; cela nous fournit de juftes raifons de revoquer en doute le contenu du paffage en queftion de la Chronique Belgique, & cela nous détermine à lui refufer entierement notre créance.

XVII. Un autre témoin, fur le fuffrage duquel Meibomius cherche à s'appuyer, c'eft *Gobelinus Perfona*; dont on fait, qu'il fleuriffoit au commencement du XV. Siécle, puisqu'il a pouffé fon Ouvrage, intitulé *Cosmodromium*, jusqu'à l'an 1418. Mais c'eft inutilement qu'on voudroit recourir à ce témoignage; la diftance des tems eft beaucoup trop confidérable, pour qu'on puiffe en admettre la validité, d'autant plus

plus que *Gobelinus Persona* ne cite point d'autres témoins contemporains, & dignes de foi. Il est clair par conséquent, qu'on doit lui appliquer ce que nous avons dit du Compilateur de la Chronique Belgique, & il seroit superflu de le répeter ici.

XVIII. Enfin la Chronique de Halberstadt sert aussi de base au témoignage de *Meibomius* ; & cette Chronique paroit avoir été écrite, lorsque le XIII. Siécle n'etoit pas fort avancé, puisqu'elle s'arrête à l'Evêque Conrad, qui renonça à l'Evêché en 1209. * Il est donc constant que le Compilateur de cette Chronique vivoit en même tems que Henri, qui a tenu les rênes de l'Empire jusqu'en 1197. Cet avantage du tems, joint à celui du merite, lui doivent donc faire donner une entiere préference, par rapport au témoignage dont il s'agit, sur le Compilateur de la Chronique Belgique, & sur *Gobelinus Persona*, Ecrivains fort posterieurs à ces tems-la. Mais comme la Chronique de Halberstadt ne parle point de l'abolition des Elections libres, & de l'introduction du droit héréditaire, mais qu'on y lit simplement, que l'Empereur Henri demanda aux Princes, que la Succession de l'Empire passât à ses heritiers ; il a plu à *Meibomius* de faire préceder des témoins beaucoup plus modernes, croyant donner par là une certaine force à son opinion. Or il est manifeste que l'ordre ne sauroit être renversé de cette maniere, & que des Ecrivains plus récens, qui n'ont point vêcu, lorsque les faits sont arrivés, ne sauroient servir à répandre du jour sur de plus anciens, sans quoi on tombe dans le défaut de raisonnement, qui se nomme *vitium obreptionis*. Si quelcun croyoit neanmoins pouvoir inferer de la teneur du témoignage, qui se trouve dans la Chronique de Halberstadt, que Henri VI. voulut effectivement abroger la coutume d'elire les Empereurs, pour faire passer la succession de l'Empire à ses héritiers, il nous paroit qu'il tomberoit dans une grande erreur, en tirant du seul mot d'*heritiers*, employé au plurier par ces Ecrivains, l'abrogation du droit d'elire, & l'introduction du droit héréditaire. Cela est d'autant moins supportable, que l'Auteur ne dit rien du tout d'approchant, mais se borne à rapporter que Henri se désista de la demande qu'il avoit faite aux Princes. Or cette demande dont il se désista, n'avoit d'autre objet

* Voy. *Leibnitz, Script. Rer. Brunsw.* Tom. II. p. 15.

que

que l'election de son fils Frèderic, comme ces paroles, tirées des Lettres d'Innocent III. le mettent dans une pleine evidence. * „Depuis „cependant, son Pere s'appercevant qu'il avoit fait une fausse démar-„che, dégagea les Princes de leur serment, & leur rendit les Lettres „d'election de Frèderic.“ Si les Lettres qui furent renduës aux Princes par Henri, ne concernoient que l'election de son Fils, il faut nécessairement qu'elles n'ayent pas contenu l'abrogation des Elections; autrement ceux qui en parlent, feroient mention de l'un & l'autre de ces deux chefs, le second étant pour le moins aussi remarquable que le premier. Tout cela montre clairement que *Meibomius*, pour établir ce qu'il avance, travaille inutilement à se munir de l'autorité du passage en question, qui ne renferme rien de nouveau, ni d'etranger aux usages de l'Empire, mais qui rapporte seulement un fait commun aux Empereurs précedens, qui n'avoient jamais manqué de faire tous leurs efforts, pour procurer de leur vivant l'election de leurs Fils en qualité de Rois des Romains, & pour leur laisser une esperance assurée de succeder à l'Empire.

* Tom. I. p. 698.

XIX. J'ai envie d'ajouter à tout ceci un passage qui vient de tomber fortuitement sous mes yeux. Il se trouve dans *Gervaise Tilberiensis*, † & en voici la teneur. „Il (*Henri*) institua cette Loi chez „les Allemands, que suivant la coutume des François & des Anglois, „les Fiefs (*militiæ*) serviént dévolus par droit de Succession, & se „transmettroient suivant les degrés des générations, au lieu qu'auparavant ils ne dépendoient presque que de la faveur du Prince. Mais „pour faire tourner à son propre avantage le bienfait qu'il avoit ac-„cordé, il obtint de ses sujets que l'ancienne forme d'election des „Seigneurs (*Palatinorum*) cesseroit, & que l'Empire demeureroit à ses „descendans, par un ordre de Succession fondé sur la proximité, en „sorte qu'il seroit le dernier des Empereurs élus, & la tige de cette „dignité renduë successive.“

† Dans ses *Otia Imper.* p. 66. Edit. de *Maderus*, inser. dans les *Script Brunsw.* de *Leibnitz*. Tom. I. p. 943.

XX. Nous n'avons aucun sujet de douter que cet Auteur n'ait fleuri du tems de Henri VI. Car il rapporte * qu'il a vu lui-même au Concile de Venise Frèderic I. pére d'Henri VI. faisant sa pénitence. A cet égard nous n'avons donc rien à objecter contre lui. Cependant la fausseté manifeste de son témoignage découle, non seulement

* loc. cit. p. 64. & 65.

 des

des mêmes raisons que nous avons alleguées ci-dessus contre la sup-position, que Henri ait voulu abolir le droit des Elections, & établi le droit héréditaire ; mais encore de ce qu'il rapporte, qu'à cause de cela Henri fit une Loi sur la dévolution des Fiefs aux heritiers, pour fortifier l'acquisition du droit de succession héréditaire à l'Empire qu'i avoit acquis à ses descendans.

XXI. Mais, puisque les Empereurs qui ont régné avant Henri VI. avoient déjà établi des Loix publiques sur la succession des Enfans aux Fiefs, on ne sauroit assurément attribuër à Henri d'etre l'Auteur de cette Loi en Allemagne, & d'avoir réglé le premier que les Fiefs seroient dévolus par droit de Succession, suivant la proximité des degrés dans les générations. En voici la preuve dans ces paroles de la Constitution de l'Empereur Conrad. * „Nous ordonnons aussi que lorsque „quelque noble, (*miles*) soit d'entre les principaux, soit d'entre les moindres, viendra à sortir de cette vie, ses fils obtiendront son benefice ; que „s'il n'a point de fils, mais qu'il reste quelque fils d'un de ses fils, il en jouïra de même, en conservant l'usage où sont les grands Vassaux de fournir „des Armes & des Chevaux à leurs Seigneurs.“ Et dans la Constitution de Frèderic I. † „De plus si le fils d'un Vassal vient à offenser son „Seigneur, le pére en étant requis par le Seigneur, amenera son fils „pour lui faire satisfaction, ou bien il se séparera de son Fils; autrement il sera privé du Fief. Et si le Pére ayant voulu mener le Fils, „pour faire satisfaction, celui-ci n'en a tenu aucun compte ; à la mort „du Pére il ne succedera point au Fief.“ *Guntherus* fait sur cette Constitution de Frèderic I. la Remarque suivante. * „Lorsque le successeur, ou heritier d'un Fief, qui a déjà atteint l'adolescence, laisse „écouler un an & un jour, soit par dol, soit par négligence, ou par orgueil, „sans demander à son Seigneur les droits feodaux, il est déchu du Fief, „& le Seigneur peut le convertir à son propre usage.“

* *De benef. Feud.* 5. Tit. I.

† *Feud. II.* Tit. LV. §. 2.

* In *Ligurino* apud *Reuberum.* V. *Script. Rer. Germ.* L. VIII. p. 410.

XXII. Mais avant ces tems mêmes, la Succession héréditaire avoit lieu dans les Fiefs, comme cela paroit clairement par la vie de *Conrad le Salique* écrite par *Wippon*, où cet Auteur a mis formellement ces paroles. † „L'Empereur Conrad le Salique se concilia beaucoup l'esprit des Nobles, en ce qu'il ne permit pas qu'aucun descendant

† Ap. *Pistor. Script.* VI. p. 430.

„cendant perdit quoi que ce ſoit des anciens benefices de ſes Ancêtres.“ Et le Continuateur de *Reginon* * rapporte le fait ſuivant, au ſujet du Comte *Uton*, Seigneur illuſtre à la Cour de l'Empereur Otton le Grand: „Le Comte Uton venant à mourir, partagea avec la permiſſion „de l'Empereur tout ce qu'il poſſedoit de benefices & de Gouverne-„mens entre ſes Fils, comme un heritage.“ La même choſe ſe démontre par la Loi ſuivante de Lothaire le Saxon, publiée le 26. Aout 1127. „Pour terminer ces altercations nous ordonnons, que ce qu'un „Frere a fait, (ſavoir en donnant ſimplement,) ne pourra préjudicier „à un Frere qui ſurvit; même ſi le bien avoit paſſé à la ſeconde géné-„ration, à la troiſieme, & jusqu'à l'infini.“ Si donc ce qu'un Frere avoit fait en donnant ſimplement, ne devoit point préjudicier au Frere qui ſurvit, quand même le bien ſeroit paſſé à la ſeconde, ou troiſieme génération, & jusqu'à l'infini, il en réſulte néceſſairement que la Succeſſion par générations s'etendoit auſſi alors jusqu'à l'infini, & qu'ainſi l'inſtitution de ce droit eſt d'une Epoque fort anterieure au tems de Henri VI.

* p. 77.

XXIII. Cette rélation de *Gervaiſe* renferme donc tant de choſes contraires à la verité, que nous n'avons aucun lieu de regarder comme digne de foi, & veritablement faite par Henri, l'introduction du droit héréditaire à l'Empire, qu'on voudroit y fonder; ſurtout ſi nous faiſons réfléxion que cet Ecrivain étoit attaché au parti & au ſervice d'Otton, qui étoit en guerre avec la famille de *Stauffen*; & qu'ainſi c'eſt un témoin domeſtique, dont les paroles ne meritent aucune créance, & ne ſauroient être allegueés en preuve. Tout nous conduit plutôt à conclurre, que cette abrogation du droit d'elire, & cette introduction du droit héréditaire, ſont des fictions inventées en haine des Princes de la Maiſon de *Stauffen*, & nées de l'interpretation ſiniſtre, donnée à un fait qui n'avoit rien de blâmable, & divulguée comme vraye par une multitude d'Ennemis.

XXIV. Si je ne me trompe beaucoup, je vais prouver la même choſe par une autre rélation. Il exiſte, ſuivant le témoignage des Savans de Goettingen, qui nous ont donné une Deſcription de l'état préſent de la Litterature, † une Chronique qui n'a point encore été publiée

† *Delineatio nuperrimi Status Eruditionis* P. II.

publiée, du Monastere de *Reinersbrunn*, ou, sous l'an 1096. l'Auteur, aprés avoir parlé au long des diverses résolutions prises par les Princes d'Allemagne, au sujet de l'expedition de la Terre Sainte, ajoute ces paroles souverainement dignes d'attention.

XXV. „L'illustre Empereur Henri voyant les Archevêques, les „Evêques, les Ducs, les Marquis, & le Landgrave Hermann lui-même, „avec ses autres Enfans & Officiers, qui ne respiroient que le signe de „la Croix, & qui se portoient avec la plus vive ardeur à cette sainte „entreprise, il voulut satisfaire à leurs desirs, & publia un Edit géné„ral, pour former une Assemblée de tous les Princes dans la Ville de „Mayence; *voulant accorder une licence privilegiée dans le Consistoire „Imperial, à tous ceux qui iroient à la Guerre sainte, par rapport à l'he„ritage de leurs possessions, en sorte que quiconque n'auroit point de Fils „d'une personne libre, pourroit leguer son heritage à une fille, ou à l'he„ritier quelconque le plus prochain dans la Généalogie:* par où il se pro„posoit d'augmenter encore leur zele & leur dévotion. Il se trouva néan„moins peu de personnes à cette Assemblée, & ceux qui y assisterent, „*s'obligerent par promesse à l'Empereur de garder d'un consentement „volontaire une fidelité inviolable à sa posterité, qui lui succederoit here„ditairement à l'Empire.* Mais assurément, s'ils n'avoient pas voulu „contracter cette obligation, ils auroient été arrêtés, & mis dans les „prisons publiques, comme Prisonniers d'Etat. Ceux donc qui étoient „présens, dans la crainte d'être dépouillés de leurs biens, deman„derent un délai interlocutoire, & promirent, que dans l'Assemblée „prochaine, qui devoit se tenir à Würtzbourg, ils appuyeroient cette „demande de l'Empereur auprés de tous les Princes, & qu'ils les en„gageroient par toutes les voyes qui dépendroient d'eux, à donner leur „consentement à ce que l'Empire devint hereditaire; en sorte que si „leurs conseils étoient écoutés, l'affaire auroit une heureuse issüe, „mais que s'il en arrivoit autrement, ils ne seroient responsables de „rien auprés de l'Empereur. Ensuite se rendant promtement à Würtz„burg, ils y donnerent leur consentement aux propositions de l'Empe„reur, mais d'une maniere fort foible. Car quelques Princes, saisis „par la crainte, accorderent leurs seaux à l'Empereur, d'autres y fu„rent

„rent engagés par toutes fortes de voyes ; d'autres refuſerent de don-„ner aucune reſolution déciſive, proteſtant qu'ils n'avoient aucune „diſpoſition à traitter cette affaire. Il fut donc aiſé à l'Empereur de „comprendre par cette conduïte des Princes, quels étoient leurs veri-„tables ſentimens. Hermann, Landgrawe de Thuringe, préſenta ſa „fille encore en bas âge à l'Empire, & obtint qu'en vertu du ſuffrage „des Princes, l'Empereur lui confereroit le droit à ſes Principautés. „ . . . . . Cependant l'Empereur étant appellé par ſes affaires en Ita-„lie, ... crut devoir agir par ſes Ambaſſadeurs en Allemagne, „pour amener les eſprits au point qu'il deſiroit. . . . . . . Pour cet „effet il fit partir le Bourgrave Burchard (de Quernforde) qui ſe trou-„voit alors par hazard auprés de lui, & le chargea de Lettres pour „l'Allemagne . . . . . . lequel étant arrivé à Erford, ... renou-„vella devant tous les Princes la propoſition de l'Empereur, & pro-„duiſit les Lettres, par leſquelles il continuoit à demander que la ſuc-„ceſſion à l'Empire fut renduë héréditaire dans ſa famille, & que cela „fut réglé d'une maniere irrevocable dans cette Aſſemblée. Mais pre-„mierement, il n'y eut rien du tout de conclu à cet égard, & tout ce „qui en arriva fut, que les Princes fatigués des dépenſes onereuſes „qu'ils étoient obligés de faire, commencerent à ſe refroidir dans l'at-„tachement qu'ils portoient à l'Empereur . . . . . qui voyant les dif-„ficultés que les Princes d'Allemagne oppoſoient à la Succeſſion hé-„réditaire, prit auſſi-tot une autre route, & diſſimulant adroitement „ſes intentions, employa les ruſes ordinaires à ſes Ancêtres, pour „effectuer ce dont il ne pouvoit venir à bout par autorité ; auſſi parut-„il bien clairement qu'il n'avoit point changé de volonté, lorsqu'il ſem-„bla s'offrir une occaſion trés favorable d'obtenir ce qu'il avoit ſou-„haité. Car ayant declaré aux Princes qu'il vouloit ſe déſiſter du pri-„vilege qui lui avoit été accordé à cet égard, leur eſprit changea telle-„ment tout à coup, que ceux qui peu auparavant ne faiſoient que plain-„tes & menaces, aimant mieux être proſcrits & bannis que de ſouſcri-„re, ſe rendirent à l'Aſſemblée qui fut indiquée à Francfort, & y élu-„rent pour Succeſſeur à l'Empire Conſtantin (Frèderic) fils de l'Em-„pereur encore en bas âge ; & ramenés à ſi peu de fraix de leur éloi-

gnement

„gnement, ils s'epuiserent à combler l'Empereur de loüanges. C'est „ainsi que la paix succeda à la division qui régnoit auparavant entre „l'Empereur & les Princes."

XXVI. Quoique tout ce recit semble établir l'imputation faite à Henri d'avoir voulu abolir le droit d'election à l'Empire, nous ne le croyons pourtant pas assez authentique, pour qu'on puisse y faire un fonds assuré. Le Compilateur de cette Chronique n'est point un Auteur contemporain, ni même d'un tems voisin du régne de Henri, puisqu'il va jusqu'à celui de Charles IV. & que le caractere du MS. se rapporte aux tems de l'Empereur Sigismond. * De plus l'endroit de *Gervaise Tilberiensis* que nous avons cité ci-dessus §. XIX. ne s'accorde point entierement avec celui de l'Auteur de cette Chronique, le premier assurant que la cause pour laquelle Henri étendit le droit de succeder aux fiefs de l'Empire, en l'accordant aux parens suivant les degrés de proximité, c'étoit pour obtenir la même chose à l'egard de l'Empire en faveur de sa posterité; au lieu que l'autre, comme nous l'avons vu, rapporte la chose en ces termes: „Que le Landgrawe „Hermann, avec ses autres Enfans & Officiers, ne respirant que le Signe „de la Croix . . . . . (l'Empereur) voulant accorder une licence pri„vilegiée dans le Consistoire Imperial à tous ceux qui iroient à la Guer„re Sainte, par rapport à l'heritage de leurs possessions, en sorte que „quiconque n'auroit point de fils d'une personne libre, pourroit le„guer son heritage à une fille, ou à l'heritier quelconque le plus pro„chain dans la Genealogie; se proposa d'augmenter encore par ce „moyen leur zele & leur dévotion." Peut-on s'empêcher de voir, que les accusateurs de Henri accumulent plusieurs choses qui ne sauroient subsister ensemble; tandis qu'au contraire ceux qui ont écrit l'Histoire de ces tems-là, gardent le plus profond silence sur ces prétenduës entreprises de l'Empereur Henri VI. suivant la remarque que nous avons déja faite §. VII.

XXVII. Pour conclurre, nous nous rappellons encore ces paroles fort remarquables de *Felix Faber*, Moine d'Ulm. † „Quoique la „mémoire des Empereurs de Soüabe soit demeurée en execration, & que

* V. I. c. p. 159.

† Dans *Goldast Haiminsfeld*, *Script. Rer. Suev.* p. 120.

„que cela soit fondé sur l'autorité des Saints Canons, auxquels il n'est „pas permis de contredire, il paroit cependant que si les Princes de „cette Maison avoient rencontré autant d'Apologistes que d'Accusa„teurs, autant d'Ecrivains favorablement disposés pour eux, que de „laches détracteurs, on verroit sans contredit éclater bien des choses „à leur avantage, & l'injustice de l'état où ils ont été réduits, se mani„festeroit. Mais comme les ennemis de ces Princes ont été en même „tems leurs Juges, un ennemi ne sauroit servir de témoin contre son „ennemi, & la simple négative suffit pour le réfuter dans les régles. „*Ut de test. quotiens.* La même chose se prouve par ce qu'on lit *in c.* „*veniens 2 de teste in fi.* Les Soüabes donc, vaincus par les témoigna„ges des Italiens leurs ennemis, gardent le silence, n'opposant aucune „contradiction aux discours, ni aux cris de leurs ennemis, & ne vou„lant point, pour la paix de l'Eglise, se défendre, comme ils le pour„roient. C'est ce qui fait que la haine demeure sur leur mémoire, & „cela verifie ce qui est dit dans les Paradoxes des Stoïciens; *Qu'il n'y* „*a rien de si incroyable, que les discours ne sachent rendre probable.*





DISSERTATION

SUR HIPPOCRATE DE CHIO.

PAR M. CRAMER.



Hippocrate le Mathematicien étoit de Chio. Sa patrie le distingue du fameux Medecin qui étoit de Cos. *Plutarque* * nous dit qu'il avoit été Marchand. Mais le commerce ne lui réüssit pas. Sans prudence, sans génie pour les affaires, il perdit, par sa sottise, une somme considerable avec les Receveurs du 50. à Byzance. C'est d'*Aristote* † que nous tenons ce caractére d'*Hippocrate*, & ce trait de sa vie. *Philoponus* * nous en aprend un autre, qui nous interesse d'avantage. Notre Marchand eut le malheur de tomber entre les mains des Pirates, & d'y perdre tout son bien. Apparemment que ces Corsaires se réfugierent à Athenes, puisqu'il vint les y poursuivre. Mais le procés trainant en longueur, il s'amusa, dans son loisir, à écouter les Philosophes, & il prit tant de goût pour la Géometrie, qu'il y fit des progrés admirables. Cette Etude développa chez lui un talent sans pareil, † & qu'on n'auroit jamais crû trouver dans un Esprit d'ailleurs lent & bouché. On assure que *Clavius*, bon Geometre du XVI. Siécle, avoit un génie de la même trempe.

* Vie de Solon, p. 413. Trad. de Dacier. 1735. 12.

† Eudemior. L. VIII. c. 14.

* Joh. Gramm. in Aristol. Phys. L. I. p. 13. Edit. Aldi. Ven. 1535.

† Proclus in Eucl. Liv. III. p. 59.

Je ne sais si les Mathematiques détournerent *Hippocrate* du commerce; mais du moins il en conserva l'esprit. Si l'on en croit *Jamblique*, * il se fit chasser de l'Ecole de *Pythagore*, pour recevoir

* Apud Fabr. Bib. Gr. II. 13. p. 505.

avoir voulu trafiquer de sa Géometrie. Ce procedé ne passoit pas pour honnête; & il marquoit peu de jugement. Car les Pythagoriciens faisoient alors grande figure, & il n'y avoit point de meilleure compagnie que la leur.

Je n'enfle pas mes Eloges, & je ne me pique pas de peindre mon Heros uniquement par ses beaux côtés. Qu'on ne se laisse pourtant pas trop prévenir contre lui. Ce qui me reste à en dire est mieux. Il est rare qu'un Géometre ne païe tribut à la Physique. *Aristote* * nous a conservé un morceau de celle d'*Hippocrate*, qui marque quelque génie. C'est un Systême sur les queües des Cometes. Notre Philosophe qui les regardoit, avec tous les Pythagoriciens, comme des Astres errants, souvent cachés sous les raions du Soleil, & souvent perdus dans l'immensité des Cieux, jugea fort bien que la queuë ne leur est pas essentielle. Il l'atribue à des Vapeurs dont elles se chargent, & dans lesquelles les raions du Soleil venant à se rompre, font paroître un trait de lumiére, lors que la Comete est dans une position qui permet à ces raions rompus de venir à nos yeux. Il prétend expliquer par ce Systême, d'ou vient que les Cometes ne paroissent que dans la partie Septentrionale des Cieux, & rarement ou jamais, entre les Tropiques & au delà, du côté du Midi. Il faut croire qu'on regardoit cela comme un Fait, puis qu' *Hippocrate* cherche à l'expliquer. Des observations posterieures contredisent ce Principe. Au reste dans le même endroit où *Aristote* cite notre Philosophe, il nous aprend le nom d'un de ses Disciples, qui pensoit sur les Cometes comme son Maitre. Il s'appelloit *Eschyle*.

* Meteorol. L. 6.

Mais le côté brillant d'*Hippocrate*, c'est la Géometrie. C'est lui, dit *Proclus*, † qui en a le premier composé des Elémens. C'est donc lui, qui a ouvert à son Siecle & aux Siecles suivants les portes de la Géometrie, en ramassant les découvertes considerables de ses Prédécesseurs, les rédigeant en bon ordre, & y ajoutant ce qui étoit nécessaire pour en faire un corps bien lié. C'est donc notre Géometre, pour le dire en passant, qui a jetté les premiers fondemens de l'admirable Ouvrage d'*Euclide*. Car le même *Proclus* témoigne

† In Eucl. L. I. p. 19.

gne qu'aprés *Hippocrate*, *Leon*, puis *Theudius*, & ensuite *Hermotime*, travaillerent à perfectioner les Elémens de la Géometrie, jusqu'à ce qu' *Euclide* vint & y mit la derniére main, avec tant de succés que la Posterité n'y a rien trouvé à changer. Revenons à *Hippocrate*.

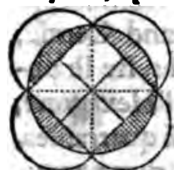
* p. 20. Edit. Hervag. 1544.

Eutocius, dans ses Comment. sur *Archimede*, * nous a conservé une lettre d'*Eratosthene* au Roi *Ptolomée*, dans laquelle il lui fait l'Histoire d'un Problême fameux dans la Géometrie. Un ancien Auteur Tragique, dit-il, introduit le Roi *Minos*, qui fait élever un Tombeau à *Glaucus*. On lui vient raporter qu'on avoit donné 100. pieds en tout sens à cet édifice : mais il le trouve trop petit, & ordonne qu'on le fasse double. Si l'on donnoit 200. pieds à chacun de ses côtés, on le feroit huit fois plus grand. C'étoit donc un Problême à résoudre, que de doubler un Corps donné, en lui conservant la même figure. Et comme il n'est point de Corps plus simple que le Cube, ce Problême s'appelloit la Duplication du Cube. Longtems, dit *Eratosthene*, les Géometres y furent embarassés, lors qu'enfin *Hippocrate* de Chios s'avisa le premier, qu'il faloit chercher deux moiennes proportionelles entre deux droites données, dont l'une soit double de l'autre, parce qu'alors le cube de la plus petite des deux moiennes est justement le double du cube de la plus petite des deux données. En démontrant cette Proposition, il réduisit le Problême de la Duplication du Cube au Problême de l'invention de deux moiennes proportionelles. Cette réduction n'est pas indifferente. Car encore que ce second Problême soit, tout comme le premier, inaccessible à la Géometrie Elementaire, il est bien plus facile d'en venir à bout par des tentatives, ou des voies mechaniques : & c'est beaucoup que d'avoir su réduire deux difficultés à une seule. C'est ainsi qu'on louë *Archimede* d'avoir réduit le Problême de la Quadrature du Cercle au Problême de la rectification de sa Circonference, & d'avoir réduit à la quadrature du Cercle la mesure des Cones, des Cylindres, de la Sphére, & de leurs surfaces. Et c'est ainsi qu'aujourdui plusieurs beaux Problêmes ne sont résolus que *concessis figurarum quadraturis*, c'est à dire, que la solution de ces Problêmes est réduite à la quadrature de quelques espaces terminés par des lignes courbes. L'utilité de ces réductions est trés grande dans

la Pratique. Aussi *Proclus*, qui attribuë * à *Hippocrate* l'invention de cette Méthode, lui donne à ce sujet les plus grands Eloges, & en parle comme d'un génie aussi heureux dans la Géometrie que qui que ce soit.

* In Euclid. L. III. p. 59.

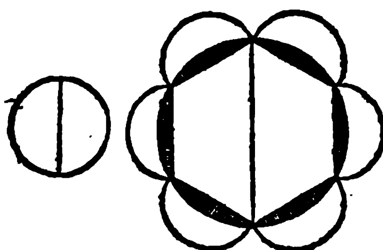
Mais la découverte d'*Hippocrate*, qui l'a fait le plus connoitre à la Posterité, c'est la quadrature de la Lunule. Quoique ce soit une chose fort connuë, il ne sera pas inutile d'en dire ici un mot. On apelle Lunule [Μηνισκος] une figure de Croissant terminée par deux arcs de Cercles. Figurez-vous donc un Cercle, avec un quarré inscrit, dont les Diagonales sont des diamétres de ce Cercle. Imaginez de plus, quatre demi-cercles décrits sur les quatre côtés du Quarré,



qui font avec les quatre arcs du grand Cercle quatre Lunules. Puisqu'un quarré n'est que la moitié du quarré de sa Diagonale, & que les Cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diametres, le Cercle auquel le quarré est inscrit, & qui a pour diametre sa diagonale, est double d'un Cercle qui auroit pour diametre le côté; il est donc égal aux quatre demi-cercles décrits sur les côtés de ce quarré. Ainsi ôtant, & du grand Cercle, & des quatre demi-cercles, qui lui sont égaux, les segments qui sont communs à ces Figures, il y aura égalité entre les restes, qui sont, d'une part le quarré inscrit au Cercle, & de l'autre part les quatre Lunules. Chaque Lunule est donc égale au quart du Quarré, qui est lui-même un Quarré.

Voilà le premier espace circulaire qui ait été quarré, & cette quadrature, indépendamment de ce qu'elle a de curieux, sert à prévenir une erreur où l'on pourroit tomber, & qu'il semble que *Des-Cartes* † même n'a pas évitée. C'est de croire que les Lignes droites & les Courbes sont d'une nature si dissemblable qu'il est impossible de les comparer. *Hippocrate* avoit donc lieu de s'aplaudir de sa découverte, & il meriteroit toutes sortes d'eloges, s'il s'en fut tenu là. Mais quelques pas qu'il voulut faire plus loin, le firent tomber dans un Sophisme, que je ne sais si l'on trouvera ingenieux ou grossier. Le voici. Concevez deux Cercles, dont l'un ait un diametre double de

† Geomet. Lib. II. p. 39. Edit. 1659. 4.



l'autre : il sera donc quatre fois plus grand. Inscrivez lui un Hexagone régulier, dont chaque côté, égal au demi-diamétre de ce grand Cercle, sera égal au diametre entier du petit Cercle. Sur les six côtés de cet Hexagone décrivez six demi-cercles, qui avec les six arcs du grand Cercle font six Lunules. Chacun de ces six demi-cercles étant égal à la moitié du petit Cercle, on aura, en comptant ces deux moitiés, huit demi-cercles, égaux ensemble à quatre Cercles tels que le petit, égaux par conséquent au grand Cercle, qui est quadruple du petit. Donc si on ôte les segments, qui sont communs au grand Cercle & aux huit petits demi-cercles, les restes sont égaux. De la part du grand Cercle, il reste l'Hexagone, & de la part des huit demi-cercles, il reste le petit Cercle & les six Lunules. Si donc on retranche de l'Hexagone, figure rectiligne & quarrable, les six Lunules, qui sont aussi quarrables, il restera un espace quarrable égal au petit Cercle. On a donc trouvé la quadrature du Cercle, cherchée avec tant d'ardeur dès lors comme aujourdui.

C'est grand dommage qu'un raisonnement qui débute fort bien, & qui aboutit à une Conclusion si desirée, se tourne en Sophisme à la derniere ligne. L'erreur consiste en ce qu'on affirme que les six Lunules sont quarrables. Quoi, direz, vous, ne le sont-elles pas ? Non. Celles qu'*Hippocrate* a quarrées, ne sont pas celles qu'il emploie ici. Les premieres étoient comprises entre une demi-circonference & un quart de circonference. Les autres sont bien terminées d'un côté par une demi-circonference, mais l'arc qui les termine de l'autre côté n'est que la sixieme partie de sa circonférence. Il semble que ce n'est rien que la différence de ces deux sortes de Lunules : mais dans le point dont il s'agit, c'est tout. Les unes sont quarrables. Les autres ne le sont pas, comme elles devroient l'être pour donner la quadrature du Cercle. On a peine à croire qu' *Hippocrate* ait pû s'y tromper, lui qui étoit si bon Geometre. Aussi *Blancanus* * plein de zéle

* Loca Mathem. Aristot. §. 16.

zéle pour l'honneur de nôtre Mathematicien, prétend-il qu'il n'étoit pas lui même la dupe de son Sophisme, & qu'il le proposoit seulement pour se divertir, & pour tenter l'habileté des autres Géomêtres. Il faut avoir bien de la pénétration pour lire si avant dans les pensées. Je ne saurois voir les choses de si loin. Il me suffit qu'*Hippocrate* ait cru, ou ait paru croire, avoir trouvé la quadrature du Cercle par le moien des Lunules. Il faut vous nommer mes garants. Le premier, c'est *Aristote* qui parle en plusieurs endroits du Sophisme des Lunules *, ou, comme il l'apelle quelque fois, de la Quadrature par les segments. † Au I. Livre *de Sophist. Elench.* * il attribue nommément à *Hippocrate* ce Paralogisme (ψευδογραφήμα, expression heureuse, puisque l'erreur ne vient que d'une fausse figure,) & il l'oppose aux Sophismes d'*Antiphon* & *Bryson*, lesquels, dit-il, péchant contre les Principes de la Géometrie, ne meritent point d'être réfutés par un Géometre, au lieu que celui d'*Hippocrate* retient les principes & demande une réfutation Géometrique. Ce qu'*Aristote* n'indique qu'en deux mots, ses Commentateurs l'expliquent au long. Je ne parle pas des Commentateurs modernes, auxquels on feroit en droit de demander de qui ils l'ont apris. Je parle des anciens, *Alexandre* d'Aphrodisée, *Themistius*, *Simplicius*, *Jean* le Grammairien, &c. qui ont écrit aux V. VI. & VII. Siécle, c'est à dire, dans des tems où il subsistoit encore des monuments, que, dans la suite, la faux du tems, l'ignorance des Chrêtiens, & l'aveugle piété des Arabes, ont consumés. Ils ne manquent point à nous dire, dans leurs Commentaires sur les endroits cités d'*Aristote*, que le Sophisme des Lunules est d'*Hippocrate* de Chio, qui a le premier consideré & quarré cette figure. Leur témoignage n'est pas une simple tradition, & il est respectable par leur unanimité.

* Anal. prior. II. 25.

† Physic. I. 2.

* Cap. 10.

On ne peut guéres douter que ce ne soit à ce même Sophisme que fait allusion *Eutocius*, dans la Préface de son Commentaire sur la mesure du Cercle par *Archimede*. † Il y dit que ce grand Homme a recherché une chose, sur laquelle *Hippocrate* de Chio & *Antiphon* s'étant fort exercés n'ont produit que les Paralogismes connus de ceux

† Pag. 49. Edit. Hervag. 1544.

qui

qui ont lû l'Histoire de la Geometrie par *Eudemus*, & les Κήρια d'*Aristote*. Je laisse ce Titre en Grec, ne sachant comment le rendre en François. Κήριον signifie un gateau de Cire, un Raion de miel. Mais quel raport de ce mot avec le Titre d'un Livre ? Il est vrai que les Titres singuliers peuvent être bien anciens, puisqu'ils ont leur origine dans la bizarrerie de l'Esprit humain & dans l'envie de mettre de l'esprit par tout.

A cette nuée de temoins, M. *Heinius* oppose uniquement *Proclus*, qui, dans le II. Livre de son Comment. sur *Euclide*, attribue la quadrature de la Lunule à *Oenopide*. Il seroit pourtant juste de balancer son témoignage avec celui des autres, & de discuter lequel merite la préférence. Mais sans nous arrêter à cette comparaison, j'oppose à *Proclus Proclus* lui-même. Au III. Livre du Commentaire * cité, parlant d'*Hippocrate* de Chio, à l'occasion de sa Méthode des réductions, il dit positivement, qu'il a quarré la Lunule, ὃς καὶ Μηνίσκον τετραγώνισεν. A qui croirons-nous donc, si *Proclus* est notre seul Oracle ? Sera-ce à *Proclus*, qui affirme qu'*Hippocrate* a quarré la Lunule, ou à *Proclus* qui donne cette Invention à un autre. Je ne crois pas que ce Problême soit fort difficile à résoudre.

* Pag. 59.

Je ne pense pas même que c'en soit un. Dans l'endroit où on veut que *Proclus* parle d'*Oenopide*, comme de celui qui a quarré la Lunule, je prétends au contraire que c'est à *Hippocrate* qu'il en attribuë l'invention. Comme le sentiment opposé est celui de M. *Heinius* & *Fabricius*, † deux Savants dont les lumieres sont infiniment au dessus des miennes, je n'oserois penser autrement qu'eux, sans les plus fortes preuves. Je vais tacher de les déveloper, & pour cet effet, je présente d'abord le Texte de *Proclus*, tel qu'il se trouve dans l'édition unique, à ce que je pense, de cet Auteur. C'est celle d'*Hervagius*, à Basle 1533. On y lit pag. [illegible]. Μετὰ δὲ τοῦτον [Πυθάγοραν] Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομένιος πολλῶν ἐφήψατο κατὰ Γεωμετρίαν καὶ Οἰνοπίδης ὁ Χῖος, ὁ τὸν τοῦ Μηνίσκου τετραγωνισμὸν εὑρών, καὶ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος ὀλίγῳ νεώτερος ὢν τοῦ Ἀναξαγόρου, ὧν καὶ ὁ Πλάτων ἐν τοῖς Ἀντερασταῖς

† Bibl. Græc. Lib. II. cap. 14. §. 18.

Ἱεραςαῖς ἐμνημόνευσεν, ὡς ἐπὶ τοῖς μαθήμασι δόξαν λαβόντων. Ἐφ' οἷς Ἱπποκράτης ὁ Χῖος, ὁ τον τȣ̃ Μηνίσκȣ τετραγώνισμον εὑρὼν, καὶ Θεώδωρος ὁ Κυρηναῖος ἐγένοντο περὶ Γεωμετρίαν ἐπιφανεῖς. Πρῶτος γὰρ ὁ Ἱπποκράτης τῶν μνημονευωμένων καὶ ςοίχεια συνέγραψε. Πλάτων δὲ ἐπὶ τȣ́τȣ γένομενος καὶ τ. λ.

Je conviens ensuite avec ces deux Messieurs que cette phrase repetée, ὁ τὸν τȣ̃ Μηνίσκȣ τέτραγώνισμον εὑρὼν, καὶ Θεώδωρος ὁ Κυρηναῖος doit être retranchée dans l'un des deux endroits où elle se trouve. Il n'est point croiable qu'*Oenopide* & *Hippocrate* aient tous deux trouvé la Lunule. La répetition de *Theodore* de Cyrene est visiblement vicieuse, & le mot Χῖος, qui précede la phrase dans l'un & l'autre endroit, a pu facilement donner lieu au Copiste, ou à l'Imprimeur, de repeter cette ligne par erreur. Mais au lieu que M. *Heinius* & *Fabricius* la retranchent de la seconde place, je crois qu'il faut plûtôt l'oter de la premiere, & voici mes raisons.

1. Ces Messieurs font dire à *Proclus* que c'est *Oenopide*, & non *Hippocrate*, qui a quarré la Lunule: ce qui est contraire au témoignage d'*Aristote*, de tous ses Commentateurs, & de *Proclus* même.

2. Selon eux, *Proclus*, aprés avoir nommé *Anaxagoras*, *Oenopide*, & *Theodore*, dit que *Platon* en a fait mention dans son Dialogue *des Amants*. Cette citation seroit fausse. *Platon* dans cet Ouvrage ne parle que d'*Anaxagoras* & d'*Oenopide*. Il ne dit pas un mot de *Theodore*.

3. Ils font faire quelques solécismes à *Proclus*. Car aiant effacé ce qu'ils veulent qu'on supprime, il resteroit Ἐφ' οἷς Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ἐγένοντο περὶ Γεωμετρίαν ἐπιφανεῖς. Qui pourroit supporter ces pluriels aprés le singulier? Aussi M. *Fabricius* change-t-il, de son autorité, ἐγένοντο en ἐγένετο, & ἐπιφανεῖς en ἐπιφανής.

4. Malgré cette correction, il reste quelque incongruïté, en ce que *Proclus* repete le nom d'*Hippocrate* dans la même ligne sans nécessité. Ces Mrs. lui font dire, Ἐφ' οἷς Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ἐγένετο πε-

ἐι Γεωμετρίαν ἐπιφανῆς. Πρῶτος γὰρ ὁ Ἱπποκράτης τῶν μνημονευομένων καὶ στοιχεῖα συνέγραψε. C'eſt au moins un défaut de ſtyle, dont on ne trouvera guéres d'exemples dans cet Auteur.

5. Un peu plus haut, *Proclus* diſoit, Ἀναξαγόρας . . . καὶ Οἰνοπίδης . . . Καὶ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος ὀλίγῳ νεώτερος ὢν τοῦ Ἀναξαγόρου. Veut-il dire de *Theodore* ſeul, qu'il étoit un peu plus jeune qu'*Anaxagoras* ? Mais alors, pourquoi placer *Oenopide* entre deux, & le joindre à *Theodore* plûtôt qu'à *Anaxagoras ?* Veut-il dire d'*Oenopide* & de *Theodore*, qu'ils ont été un peu plus jeunes qu'*Anaxagoras* ? Mais alors pourquoi νεώτερος, & non pas νεώτεροι ?

6. J'evite tous ces inconvenients, ſans faire aucun changement au Texte que celui d'effacer de la premiere place cette phraſe, dont on convient qu'elle doit étre retranchée quelque part. De cette maniere, *Proclus* dit, qu'*aprés* Pythagore, Anaxagoras *de Clazoméne s'attacha extrémement à la Géometrie, auſſi bien qu'*Oenopide *de Chio, un peu plus jeune qu'*Anaxagoras, *desquels* Platon *parle dans* ſes Amants, *comme aiant acquis de la réputation dans les Mathematiques. Aprés eux,* Hippocrate *de Chio, celui qui a trouvé la quadrature de la Lunule, &* Theodore *de Cyrene, ſe ſont rendus illuſtres dans la Geometrie. Car* Hippocrate *eſt le premier qui en a composé les Elémens,* & Platon *formé ſur celui-là*, &c.

7. Ce narré s'acorde parfaitement avec ce que nous ſavons d'ailleurs de la Chronologie de ces Mathematiciens. *Anaxagoras* eſt né, ſelon *Diogene Laërce*, la 1. année de la 70. Olympiade. *Oenopide*, un peu plus jeune que lui, ſera né vers la 72. *Hippocrate* & *Theodore*, qui ſont venus aprés, auront paru vers la 80 : de ſorte que *Platon*, né dans la 88. Olymp. aura fort bien pu être diſciple de *Theodore*, comme nous l'aprend *Diogene Laërce*; III. 6. & comme *Proclus* ſemble l'inſinuer.

Il eſt difficile de s'arranger auſſi bien dans le Syſtème de M. *Heinius* & *Fabricius*. Si *Theodore* eſt ſeulement un peu plus jeune qu'*Anaxagoras*, il faut qu'il ſoit né vers la 72. ou au plus, la 75. Olymp. &

& qu'il ait eu 60. ans à la naissance de *Platon.* Il auroit donc été bien vieux, lorsque *Platon*, agé d'environ 30. ans, alla étudier sous lui à Cyréne.

8. Ces preuves se fortifient par cette considération. C'est qu'il y a un ordre dans les verités Géometriques qui ne permet pas d'entendre, moins encore d'inventer, celles qui suivent sans connoitre celles qui précedent. La quadrature de la Lunule suppose nécessairement, ce me semble, ces deux Propositions; qu'un quarré n'est que la moitié du quarré de sa diagonale, & que les Cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamétres. Je crois volontiers que la premiere a été connuë d'*Oenopide*, & avant lui de *Pythagore*, parce que c'est une conséquence fort simple de la Proposition trouvée par ce grand Philosophe, que le quarré de l'hypotenuse est égal à ceux des deux autres côtés. Mais je ne pense pas de même de la seconde. Du moins la demonstration qu'en donne *Euclide*, Liv. XII. Prop. 2. suppose une Géometrie assez avancée. J'aurois donc peine à croire qu'*Oenopide* en fut venu là, lui dont les principales découvertes ont été, selon *Proclus* * la 12. & la 23. Prop. du I. Livre des Eléments: *Abaisser une perpendiculaire*, & *Faire un angle égal à un angle.* Il y a loin de là à la Lunule. Mais dans les 30. ou 40. ans, qui se sont écoulés d'*Oenopide* à *Hippocrate*, la Géometrie, cultivée avec ardeur par les plus beaux Génies, a fait sans doute de grands progrés, & celui-ci, qui avoit essaié & avancé jusqu'à un certain point le Problême de la Duplication du Cube, a pu fort naturellement être tenté de travailler sur la quadrature du Cercle, & a du avoir les principes nécessaires pour la quadrature de la Lunule.

* Libr. cit. pag. 75. & 87.

Si j'ai réüssi à réhabiliter *Hippocrate* dans la gloire de l'invention de la Lunule, il sera assez inutile d'écarter les ressemblances que M. *Heinius* trouve entre *Oenopide* & *Hippocrate*, & desquelles il semble vouloir inferer qu' *Hippocrate* n'est qu'un personage imaginaire copié d'aprés *Oenopide.*

Ils ont, dit-il, tous deux fleuri pendant les mêmes années. Mais, au contraire, *Proclus*, de quelque maniere qu'on le lise, dit qu' *Hip-*

pocrate n'eſt venu qu'aprés *Oenopide*. Il ſe peut bien que les années de la vieilleſſe de l'un aient été celles de la jeuneſſe de l'autre. Mais cela même les diſtingue aſſez.

Ils ont été, continue M. *Heinius*, tous deux peu eſtimables en Phyſique. Je conviens qu'il le prouve aſſez bien d'*Oenopide*, quoiqu'il ſoit vrai de dire que les Phyſiciens de cette datte-là méritent quelque indulgence. Mais je ne vois pas qu'il ait montré qu' *Hippocrate* étoit un mauvais Phyſicien. Son opinion ſur les queües des Cometes, qui eſt tout ce qui nous reſte de ſa Phyſique, peut bien être fauſſe, mais elle n'eſt pas ſi fort à mépriſer que pluſieurs Modernes ne l'aient fait revivre. Voiez *Riccioli Almag*. L. VIII. Sect. II. chap. 25. Il ſemble même qu'on en peut conclurre que notre Philoſophe avoit déjà obſervé que les queües des Cométes s'étendent toujours du côté oppoſé au Soleil, obſervation dont les Modernes ſe ſont fait honneur.

Il eſt vrai que Mr. *Heinius* trouve le caractére d'un Phyſicien ignorant dans la ſimplicité d' *Hippocrate*, qui lui fit perdre une groſſe ſomme avec les Reçeveurs de Byſance. Mais je crois que de trés habiles Phyſiciens peuvent être la dupe des Fermiers, & que ceux qui n'ont aucune teinture de Phyſique n'en ſont pas moins propres à éviter les piéges de ces gens-là.

Mr. *Heinius* ajoute qu'*Hippocrate*, auſſi bien qu' *Oenopide*, a été en Egypte. Il ſe fonde ſur le paſſage de *Plutarque*, qui parlant des Philoſophes qui ont fait le commerce, nomme *Thales*, *Hippocrate* & *Platon*. Mais quoique le premier & le dernier aient fait le voiage d'Egypte, je ne vois pas que Mr. *Heinius* ſoit en droit d'inferer qu'il en eût de même d' *Hippocrate*. *Plutarque* ne le joint aux deux autres que comme aiant fait le commerce. Ne pouvoit on pas commercer, ſans voyager en Egypte?

Je ne ſens pas, comme Mr. *Heinius*, que le trafic que faiſoit *Hippocrate* de ſa Géometrie, ſoit dans le caractére d'*Oenopide*. Il n'a point établi que ce Philoſophe fut avare & intéreſſé.

Enfin

Enfin, comme il n'eſt plus vraiſemblable qu' *Oenopide* ait part à la quadrature de la Lunule, on peut bien me permettre de conclure qu' *Oenopide* & *Hippocrate* ont été deux hommes différens; quoique tous deux de Chio, tous deux Mathématiciens, tous deux de la Secte de Pythagore.

Je finis par quelques Réfléxions mathematiques que la Lunule d' *Hippocrate* m'a occaſionées. Les voici.

Trouver une infinité de Lunules quarrables.

La Lunule CEDFC (Fig. 1.) ſera quarrable, ſi le Secteur ACED compris entre l'arc CED & ſes raions AC, AD, eſt égal au Secteur BCFD, compris entre l'arc CFD & ſes raions BC, BD. Car ôtant, de l'un & de l'autre de ces deux Secteurs égaux, la partie commune BCED, il y aura égalité entre les reſtes, qui ſont, d'un côté, le quadrilatére ACBD, & de l'autre la Lunule CEDFC.

Or les Secteurs ACED, BCFD ſont égaux, ſi les angles CAD, CBD, ou leurs moitiés CAF, CBF ſont entr'eux en raiſon doublée inverſe des raions AC, BC. Car ſi l'on mene par le centre B le raion BG paralléle à AC, le Secteur GBF, eſt au Secteur CBF du même Cercle, comme l'angle GBF ou ſon égal CAE, à l'angle CBF. Mais le même ſecteur GBF eſt au ſecteur ſemblable CAE en raiſon doublée des raions BG ou BC & AC. Donc ſi les angles CAE, CBF ſont en raiſon doublée inverſe des raions AC, BC, le ſecteur GBF a la même raiſon aux ſecteurs CBF, CAE. Ils ſont donc égaux, auſſi bien que leurs doubles CBDF, CADE, & conſéquemment la Lunule CEDFC eſt quarrable.

Pour avoir donc tant de Lunules quarrables qu'on voudra, il ne s'agit que de décrire ſur une même corde CD deux arcs CED, CFD tels que les angles au Centre CAD, CBD, ſoient en raiſon doublée inverſe des raions AC, BC.

La Solution générale de ce Probléme eſt transcendente, & ſuppoſe la multiſection indéfinie de l'angle. Il faut donc récourir à des

Courbes transcendentes. Par ex. si aprés avoir divisé la demi-circonference ADB (Fig. 2.) en tant de parties égales qu'on voudra, on divise le diamétre AB en un pareil nombre de parties égales, & que prenant les points de division correspondants, E sur la circonférence, & F sur le diamétre on mene les droites EG, FG paralleles aux raions perpendiculaires CA, CD; que du point G où ces droites se coupent, on mene la droite GA & la perpendiculaire AH, qui coupe en H la droite GE prolongée, on pourra avoir une infinité de points H de la Courbe ALHKA, qui donne fort simplement une infinité de Lunules quarrables. On voit que sa nature consiste en ce que AF ou IG troisieme proportionelle de l'ordonnée HI à l'abscisse AI a une raison donnée à l'arc correspondant AE savoir, celle du diamétre AB à la demi-circonf. ADB.

Donc, si on mene une droite quelconque CL parallele à CD, qui coupe cette Courbe aux points K & L, desquels on mene KM, LN, paralleles à AB, & qui rencontrent la circonference en M & N, qu'on tire le raion NC & par le point M une droite MO parallele à NC, qui coupe en O la droite AB prolongée s'il le faut; qu'enfin du centre O ou décrive par le point M l'arc de Cercle MTV; Je dis que cet arc comprendra avec l'arc MAV une Lunule MAVTM, qui sera quarrable.

Car, par la nature de la Courbe, l'arc AM est à la 3e. proportionelle de KR à RA, qui est AR^2 : KR comme l'arc AN à la 3e. proportionelle de LS à AS, qui est AS^2 : LS. Donc, *alternando*, l'arc AM est à l'arc AN, ou l'angle ACM à l'angle ACN, ou TOM, comme AR^2: KR est à AS^2 : LS, soit AR^2 à AS^2, puisque KR & LS sont égales, ou comme PM^2 à QN^2, ou enfin comme OM^2 à CN^2, puisque les triangles POM, QCN sont semblables. Ainsi les secteurs ACM, TOM ont leurs angles en raison doublée inverse de leurs raions. Ils sont donc égaux, aussi bien que les secteurs doubles MAVCM, MTVOM. La Lunule MAVTM est donc égale au quadrilatére MOVC, & par conséquent quarrable.

Mais

Mais laissant cette Construction générale, qui doit passer pour méchanique, puisque la Courbe AKHLA est transcendante, & qui ne peut proprement servir qu'à trouver des Solutions approchées: Si l'on veut se renfermer dans les bornes des solutions algebriques, on pourra concevoir la Courbe KCL (Fig. 1.) dont la nature soit telle que menant d'un de ses points quelconque C, aux deux points donnés A, B, les droites CA, CB, les angles CAF, CBF soient entr'eux en raison donnée de m à n; & le Cercle ICH, dont la nature est telle, que menant d'un de ses points quelconque C les droites CA, CB, elles soient entr'elles en raison de $\sqrt{m}$ à $\sqrt{n}$. Le point C, où ces deux Courbes se coupent, sera celui par lequel décrivant, des centres A & B, les arcs CED, CFD, les secteurs ACEDA, BCFDB seront égaux, & la Lunule CEDFC sera quarrable.

Quand la raison de m à n est rationelle, la Courbe KCL est algébrique. On peut en trouver facilement une infinité de points par les Sections angulaires, & même par la Géométrie élémentaire, toutes les fois qu'un des deux nombres, m ou n, ait ou l'unité, ou une puissance de 2. Il seroit même aisé de construire un Instrument qui feroit tourner deux droites AC, BC, autour des points A, B, desorte que leurs vitesses angulaires fussent en raison de m à n; & alors l'intersection C de ces deux droites décriroit la Courbe KCE.

L'équation générale de cette Courbe, en nommant AB, 1; AP, x; BP, z; PC, y; est $\pm\left(\frac{y - z\sqrt{-1}}{y + z\sqrt{-1}}\right)^m = \left(\frac{y - x\sqrt{-1}}{y + x\sqrt{-1}}\right)^n$, où le signe + doit servir, quand les deux nombres m & n sont impairs, & le signe —, quand l'un des deux est pair. Si on développe ces Puissances, qu'on ôte les termes communs de part & d'autre, & qu'on divise par les communs diviseurs, il en résultera cette équation

$$nx^{n-1}z^{m} - \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}x^{n-3}z^{m}yy + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}\times\frac{n-4}{5}x^{n-5}z^{m}y^{4}\ \&c. =$$

$$-mx^{n}z^{m-1} + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{m}{1}x^{n-2}z^{m-1}yy - \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{n-3}{4}\times\frac{m}{1}x^{n-4}z^{m-1}y^{4}$$

$$-\frac{n}{1}\times\frac{m}{1}\times\frac{m-2}{2}x^{n-1}z^{m-2}yy + \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}x^{n-3}z^{m-2}y^{4}$$

$$+\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}x^{n}z^{m-3}yy - \frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}x^{n-2}z^{m-3}y^{4}$$

$$+\frac{n}{1}\times\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}x^{n-1}z^{m-4}y^{4}$$

$$-\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}\times\frac{m-4}{5}x^{n}z^{m-5}y^{4}$$

dans laquelle, quoiqu'il paroiſſe trois inconnuës, il eſt pourtant aiſé de les réduire à deux, puiſque $z = x - 1$, ou $x = z + 1$. Cette équation eſt ordonnée ſelon les puiſſances paires de $y^{\cdot}$, y^{0}, y^{2}, y^{4}, y^{6}, y^{8}, &c. & l'on en trouvera ſans peine les coëfficients par cette Régle, quoique d'ailleurs la Loy de continuation ſoit aſſez manifeſte.

Qu'on éleve $z + 1$ à la puiſſance m, & $x + 1$ à la puiſſance n, & ſoient ces puiſſances $z^{m} + az^{m-1} + bz^{m-2} + cz^{m-3}$ &c. $x^{n} + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3}$ &c. Qu'on change, de deux en deux, les ſignes des termes de ces ſeries, deſorte qu'alternativement les termes correſpondants aient même ſigne & différents ſignes, comme ou le voit-ici,

$z^{m} - az^{m-1}$	$-bz^{m-2} + cz^{m-3}$	$+dz^{m-4} - ez^{m-5}$	&c.
$x^{n} + Ax^{n-1}$	$-Bx^{n-2} - Cx^{n-3}$	$+Dx^{n-4} + Ex^{n-5}$	&c.

Aprés quoi, pour avoir le coëfficient de y^0, on prendra les deux premiers termes de chaque série, & les multipliant en croix, on aura $Ax^{n-1}z^{m} - ax^{n}z^{m-1}$. Pour avoir le coëfficient de yy, on prendra les quatre premiers termes de chaque série & les multipliant les uns par les autres dans un ordre retrograde, on aura $-Cx^{n-3}z^{m} + Bax^{n-2}z^{m-1} - Abx^{n-1}z^{m-2} + cx^{n}z^{m-3}$. De même, prenant les six premiers termes de chaque série, & les multipliant en ordre retrograde, on aura $Ex^{n-5}z^{m} - Dax^{n-4}z^{m-1} + Cbx^{n-3}z^{m-2} - Bcx^{n-2}z^{m-3} + Adx^{n-1}z^{m-4} - ex^{n}z^{m-5}$, pour le coëfficient de y^4, & ainsi de suite. C'est ainsi qu'on a calculé ces équations,

si $m = 1$, $n = 2$ .... $(xx - 2x) + yy = 0$. Equation au Cercle, conformément à Eucl. III. 20

si $m = 1$, $n = 3$ .... $(2x^3 - 3xx) + (2x + 1)yy = 0$... Equat. à une Courbe du 3e. Ordre, Espéce 41e. de Mr. Newton.

si $m = 2$, $n = 3$ .... $(x^4 - 4x^3 + 3xx) + (2xx - 4x - 1)yy + y^4 = 0$.

si $m = 1$, $n = 4$ .... $(3x^4 - 4x^3) + (2xx - 4x)yy - y^4 = 0$.

si $m = 3$, $n = 4$ .... $(x^6 - 6x^5 + 9x^4 - 4x^3) + (3x^4 - 12x^3 + 6xx + 4x)yy + (3xx - 6x - 3)y^4 + 3y^6 = 0$.

si $m = 1$, $n = 5$ .... $(4x^5 - 5x^4) + (10x^2)yy - (4x + 1)y^4 = 0$.

si $m = 2$, $n = 5$ ... $(3x^6 - 8x^5 + 5x^4) + (5x^4 - 10xx)yy + (xx + 8x + 1)y^4 - y^6 = 0$.

si $m = 3$, $n = 5$ ... $(2x^7 - 9x^6 + 12x^5 - 5x^4) + (6x^5 - 15x^4 + 10x^2)yy + (6x^3 - 3xx - 12x + 1)y^4 + (2x + 3)y^6 = 0$.

si $m = 4$, $n = 5$ .. $(x^8 - 8x^7 + 18x^6 - 16x^4 + 5x^3) + (4x^6 - 24x^5 + 30x^4 + 20x^2 - 40x)yy - (4x^4 + 24x^3 - 6xx - 16x - 1)y^4 + (4xx - 8x - 6)y^6 = 0$.

On

On peut aussi, & cela est souvent plus court & plus simple, substituer dans ces équations au lieu de yy sa valeur $-xx + \frac{2n}{n-m}x - \frac{n}{n-m}$, ce qui donnera une équation en x, d'où l'on tirera la valeur de cette inconnuë, qui fera ensuite connoitre y. Ainsi quand $m = 1$ & $n = 2$, on a $x = 1$, & $y = 1$, ce qui est le cas de la Lunule d'*Hippocrate*; quand $m = 1$ & $n = 3$, on a $xx = \frac{3}{4}$ & $yy = \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{9}{4}$; quand $m = 2$ & $n = 3$, on a $7xx - 15x + 6 = 0$, ou $x = \frac{15-\sqrt{57}}{14}$, & $y = \frac{\sqrt{(390 - 54\sqrt{57})}}{14}$. Ainsi ces deux Cas, qui sembloient dependre de la trisection de l'angle, donnent pourtant géometriquement des Lunules quarrables. Je ne dis rien des Quadratures partiales de ces Lunules. Cela me meneroit trop loin.



TABLE.

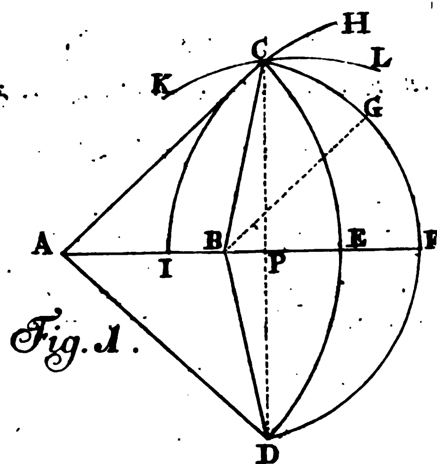


Fig. 1.

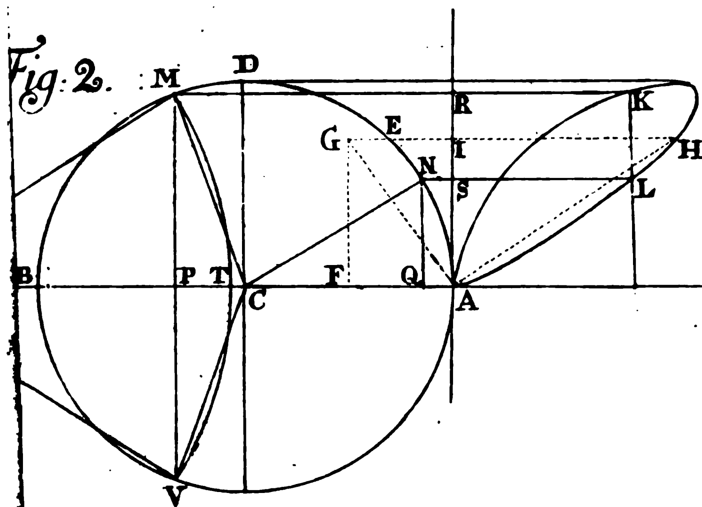


Fig. 2.

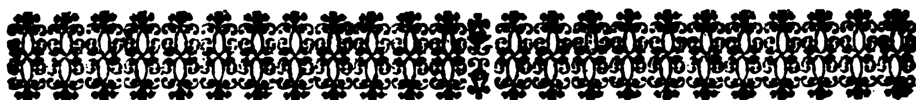


TABLE.

CLASSE de Philosophie Experimentale.

CLASSE de Mathematique.